TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE A L'USAGE DES INGÉNIEURS DU CADASTRE, ET...



TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE,

A L'USAGE

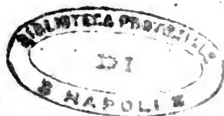
DES INGÉNIEURS DU CADASTRE,

ET

Des Élèves qui se destinent, à l'École Polytechnique, à la Marine, à l'Artillerie et au Commerce;

PAR A. A. L. REYNAUD,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, actuellement Professeur d'analyse, au Cadastre, à l'Athénée de Paris, (ci-devant Lycée de Paris), et à l'École Polymathique.



A PARIS,

Chez
L'Auteur, rue Geoffroy-Lasnier, N°. 17.
COURCIER, Imprimeur-Libraire, Quai des Augustins, N° 71.
Le Libraire de l'Athénée de Paris, rue du Lycée.
Le Concierge du Cadastre, rue de Cléry, N° 95.
Le Concierge de l'École Polymathique, rue de Clichy, N° 337.

MESSIDOR AN XII (1804).

Observation. L'étendue de ce *Traité d'Arithmétique* ne doit pas effrayer les élèves ; toute la théorie du calcul se trouve dans la première partie, composée de 226 pages. Le reste de l'Ouvrage, qui n'exige aucune étude sérieuse, offre les applications du calcul à la résolution d'un grand nombre de problêmes utiles et amusans. Ces problêmes, nouveaux pour la plupart, exercent le jugement, et préparent à l'algèbre. Les personnes qui se destinent au commerce, trouveront tout ce qui peut leur être utile.

Avertissement. Lorsque dans le cours d'une démonstration, on aura besoin de s'appuyer sur un principe déjà établi, ou à établir, on indiquera l'article qui renferme ce principe, au moyen d'un numéro mis entre deux parenthèses ; et quand le numéro renverra à un article dont l'étendue pourrait laisser quelques doutes sur le principe cité, on aura soin d'indiquer la page où il se trouve.

Pour ne pas détourner son attention, on ne doit consulter les articles cités qu'après la lecture de la démonstration entière.

Dans le détail d'une opération, on doit effectuer par soi-même les calculs indiqués ; s'il reste encore quelques doutes ; on relira le même article ; l'attention, ne se portant plus sur le mécanisme du calcul, pourra se livrer toute entière à l'esprit de la démonstration.

Les élèves doivent lire les notes placées au bas des pages ; elles sont destinées à lever les difficultés qui pourraient les arrêter. Ces notes sont distinguées par des *étoiles*, mises entre deux parenthèses.

DISCOURS
PRÉLIMINAIRE.

L'ARITHMÉTIQUE, utile dans toutes les professions, doit être considérée comme une des premières branches de l'instruction publique : elle dirige les plus belles spéculations du commerce, et sans elle, l'homme le plus instruit d'ailleurs, serait incapable d'exercer le plus petit emploi ; elle sert d'introduction aux sciences exactes, car c'est toujours aux nombres qu'il faut ramener les résultats des calculs les plus sublimes. Il est donc indispensable de traiter avec soin toutes les parties d'une science qui a occupé dans tous les temps les génies les plus vastes, et que LAGRANGE enseigna lui-même à l'*École Normale*.

Les premiers hommes réunis en société s'occupèrent sans doute de l'Arithmétique ; le besoin dut faire éclore les notions du *calcul*, et l'idée de *grandeur* fut le résultat des combinaisons les plus simples de l'entendement. A cette idée, qui ne peut naître que de la comparaison, succéda naturellement celle de l'*unité;* on sentit qu'il ne devait pas exister de grandeur absolue, et qu'une chose ne pouvait être grande ou petite que comparativement à une autre de son espèce plus petite ou plus grande. L'idée de l'unité et du *nombre*, s'est né-



cessairement offerte aux premiers êtres pensans qui ont considéré un arbre parmi plusieurs arbres, une étoile parmi plusieurs étoiles, et en général un individu parmi plusieurs individus de son espèce. Le besoin de distinguer un nombre d'individus d'un autre nombre d'individus de même nature, amena l'invention des noms de nombres : la nécessité de réunir plusieurs nombres de même espèce en un seul, conduisit à l'*addition* ; et quand il fallut déterminer l'excès d'une grandeur sur une autre, on eut recours à la *soustraction*.

Ces deux opérations élémentaires furent très-simples dans leur principe, mais peu à peu la nécessité de les appliquer à des nombres de plus en plus grands, conduisit à des calculs de plus en plus composés, capables de rebuter par leur longueur. La confusion qui en fut la suite, produisit des erreurs multipliées, et l'on sentit que le seul moyen d'y remédier était de convenir de certains *signes* qui pussent représenter les nombres d'une manière plus abrégée et plus propre à leur calcul. C'est à cela qu'on doit attribuer l'invention des chiffres et les ingénieuses combinaisons au moyen desquelles on est parvenu à leur faire exprimer tous les nombres. La complication qui dut résulter de l'addition d'une grande quantité de nombres égaux amena la *multiplication*, et le besoin de partager un nombre en plusieurs parties égales fournit la *division* ; celle-ci donna naissance aux *fractions*, que l'on soumit ensuite aux quatre opérations connues.

Ce nouveau calcul, pénible à pratiquer à cause des transformations continuelles qu'il exige, fit sentir le besoin d'une nouvelle espèce de quantité, qui, sans participer aux inconvéniens des fractions, réunit cependant leurs avantages. Telle est l'origine des *fractions décimales*, dont le principal objet est, comme on voit, d'éviter les longueurs résultantes du défaut d'uniformité, qui règne dans les subdivisions de l'unité, exprimées par les fractions ordinaires.

On parvint ainsi à réduire le calcul des fractions à celui des nombres entiers; mais le desir de perfectionner fit probablement remarquer que les décimales n'exprimaient pas exactement toutes les fractions ordinaires, et ne donnaient que les subdivisions de l'unité principale de dix en dix fois plus petites. On crut, sans doute, que l'uniformité de ces subdivisions nuisait à la variété de leurs usages, et que par conséquent chaque espèce d'unité concrète devait être divisée suivant une loi particulière à sa nature. Le résultat de ces observations fut l'invention des *nombres complexes*; par leur moyen, on conserva la forme d'entiers à la plupart des subdivisions de l'unité principale; mais ce faible avantage n'empêcha pas d'apercevoir la longueur et l'excessive complication du calcul des nombres complexes; on sentit que le seul moyen d'y remédier était de soumettre les subdivisions de chaque espèce d'unité concrète à la loi décimale; ce qui forma le *système des nouvelles mesures*. Enfin, on parvint à résoudre

toutes les questions numériques, au moyen des combinaisons des quatre règles. Telle est l'origine qu'on est naturellement conduit à attribuer aux diverses branches de l'Arithmétique.

L'histoire vient à l'appui des hypothèses précédentes; lorsqu'on la consulte, on aperçoit à travers l'obscurité des temps, que les peuples les plus anciens et les moins instruits cultivaient la science du calcul. Suivant STRABON et HÉRODOTE, les *Phéniciens*, qui ont été les premiers commerçans du monde, ont été aussi les premiers arithméticiens: il est probable que l'origine du calcul remonte plus haut que ces peuples; mais comme ils l'appliquèrent d'une manière aussi heureuse qu'utile aux spéculations commerciales, ils partagèrent et méritèrent à juste titre, la gloire de l'invention. L'historien JOSEPHE, prétend que l'Arithmétique fut enseignée aux *Égyptiens* par ABRAHAM; et la Mythologie, jalouse de cette découverte, regarde la science du calcul, comme un don de la déesse NUMÉRIE. La seule lumière qui puisse naître du choc de ces opinions, c'est que l'origine de l'Arithmétique remonte à la plus haute antiquité. Nous n'avons pas de données plus certaines sur l'invention des *poids et mesures*; STRABON l'attribue à PHOEDON, LAERCE à PYTHAGORE, et JOSEPHE à CAÏN fils d'ADAM. La *monnaie* fut sans doute inventée, lorsque les accroissemens du commerce rendirent les échanges impossibles. MACROBE, rapporte que JANUS fut le premier qui donna au cuivre la destination monétaire, et que les pièces qu'il fit frapper, portaient

l'empreinte d'une brebis, ou d'un bœuf; cette monnaie fut nommée *pecunia* par les latins, de *pecus*, qui signifie troupeau. Il paraît que PHOEDON employa le premier, l'argent au même usage. Mais sans nous perdre dans des opinions opposées, consultons l'histoire sur des faits plus certains et plus importans.

L'antiquité révéra la science des prêtres égyptiens; ils furent les dépositaires des connaissances que les hommes avaient acquises depuis l'origine du monde. Six cents ans avant l'ère vulgaire, THALÈS de Milet, et PYTHAGORE de Samos, vinrent s'instruire parmi eux, et répandirent ensuite leur doctrine, l'un dans la Grèce, et l'autre dans l'Italie, où il devint le chef d'une école long-temps célèbre; doué d'une imagination vive, il fit plusieurs découvertes, dignes sans doute de passer à la postérité, mais parmi lesquelles le temps n'a respecté que la table de multiplication, qui porte encore son nom. On dit qu'il eut des idées superstitieuses sur des propriétés de nombres (*), mais

(*) Les sectateurs de PYTHAGORE et la plupart des anciens attribuaient des propriétés mystérieuses à différens nombres. L'*Unité* était pour eux le caractère sublime de la divinité : ils n'aimaient pas le nombre *deux*. Les nombres impairs étaient consacrés aux choses divines, car dans les sacrifices, les victimes offertes aux Dieux étaient en nombre impair. Le nombre *trois* était le nombre par excellence; les sacrifices à JUPITER se faisaient *trois* fois par jour; la terre fut peuplée par les *trois* enfans d'ADAM; et après le déluge, elle fut repeuplée par les *trois* enfans de NOÉ; etc. Le nombre *quatre* était en grande

ses écrits dans ce genre ne sont point parvenus jusqu'à nous ; on lui attribue l'invention de la *règle de trois*, anciennement nommée *règle d'or*, à cause de sa grande utilité. Plusieurs philosophes marchant sur les traces de PYTHAGORE, augmentèrent les domaines de la superstition, en attribuant aux nombres des propriétés mystérieuses ; ils s'efforcèrent de pénétrer jusqu'au sanctuaire du destin, à travers l'ingénieux dédale des combinaisons numériques ; mais le cours des événemens mit bientôt en évidence la fausseté et le ridicule de leurs prédictions. On abandonna les spéculations sur l'avenir, pour se livrer à des recherches plus utiles,

---

vénération ; il exprimait le cube de la perfection : dans presque toutes les langues, le nom de l'Être suprême est de *quatre* lettres : les Français disent DIEU ; les Assyriens, ADED ; les Perses, SYRÉ ; les Mages, ORSI ; les Arabes, ALLA ; les Turcs, AYDI ; les Espagnols, DIOS ; quelques habitans du Nouveau Monde, ZIMI, etc. Le nombre *cinq*, est le symbole du bonheur ; il exprime les secrets de la nature. Le nombre *six* ne jouit d'aucunes propriétés. Le nombre *sept* fut accueilli des anciens et des modernes ; quelques charlatans y ont trouvé les vicissitudes de la vie humaine ; le *septième* siècle après la fondation des empires, leur est ordinairement funeste ; à *sept* mois la naissance de l'enfant est heureuse ; le chandelier d'or du temple de Jérusalem, portait *sept* lampes ; etc. Le nombre *huit* n'est pas heureux. Il n'en est pas de même du nombre *neuf*, et de ses multiples ; les magiciens offrirent des sacrifices à un homme qui était mort dans sa 99[e] année, attendu que sa vie avait atteint le dernier point de la perfection. Le nombre *dix* est le plus haut point du bien et du mal. Le nombre *treize* est le sinistre présage des plus affreuses calamités, etc. etc.

dont le but était de perfectionner les calculs. On y parvint ; mais l'histoire ne nous a pas transmis les noms de ceux à qui nous devons les quatre premières règles. Suivons les progrès de la science.

Alexandre et la plupart de ses successeurs protégèrent les Mathématiques ; elles fleurirent pendant plus de dix siècles dans l'École d'Alexandrie, fondée (320 ans avant l'ère vulgaire) par Lagus, maître de l'Égypte. Cette école produisit des mathématiciens célèbres, dont plusieurs contribuèrent aux progrès de l'Arithmétique. Euclide, si connu par ses élémens de *Géométrie*, réunit dans son ouvrage les propositions d'arithmétique, qui avaient été trouvées avant lui ; il en ajouta de nouvelles, et les enchaîna d'une manière admirable. Ératosthène, bibliothécaire d'Alexandrie, découvrit une méthode extrêmement ingénieuse pour connaître les *nombres premiers ;* cette méthode est connue sous le nom de *crible* d'Ératosthène. Depuis la mort de ce philosophe, arrivée 194 ans avant J. C., les Mathématiciens, occupés de la *géométrie* et de l'*astronomie*, délaissèrent l'Arithmétique; cette dernière languissait depuis cinq siècles, lorsque le célèbre Diophante, né à Alexandrie, l'an 320 de l'ère chrétienne, vint hâter ses progrès en l'enrichissant de nombreuses découvertes ; il s'occupa de problèmes absolument nouveaux, dont il donna des solutions fort ingénieuses, consignées dans treize livres : les six qui nous restent, font vivement regretter la perte des sept autres. Le desir de les remplacer, excitant la curiosité de plu-

sieurs savans modernes, tels que Bachet de Méziriac, éditeur et commentateur de Diophante; Fermat, Frenicle de Bessy, Prestet, Billy, Maclaurin, Saunderson, Euler, etc, ils parvinrent à suppléer aux méthodes perdues; et de nos jours, MM. Lagrange et Legendre, mettant à profit les travaux de ces illustres Mathématiciens, ont enrichi de nouvelles découvertes les domaines de l'Arithmétique.

Le septième siècle fut témoin des ravages que les *Arabes* commirent dans l'*Égypte* et dans la *Lybie ;* la perte la plus funeste aux sciences, comme la plus irréparable, fut sans doute causée par l'incendie de la célèbre bibliothèque d'Alexandrie, arrivé l'an 641 ; le calife Omar, l'un des plus rapides conquérans qui ait existé, fit brûler les livres recueillis depuis des siècles, dans ce sanctuaire des plus belles productions de l'esprit humain. Le même siècle vit encore la ruine de la fameuse école d'Alexandrie.

Les Mathématiques effrayées vinrent se réfugier dans la *Grèce ;* mais fatiguées par les persécutions qu'elles avaient souffertes, elles ne firent que languir, jusqu'à l'époque où les Arabes, lassés par une guerre continuelle, les rappelèrent dans leur patrie. La plupart de leurs califes s'illustrèrent dans les sciences exactes; et pendant plus de trois siècles, ce peuple, jadis si barbare, servit inutilement de modèle au nord de l'Europe qui restait enseveli dans la plus profonde ignorance. Nous devons aux Arabes notre système de numération

actuel; cette découverte est sans contredit une de celles qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain; si quelques défauts semblent nuire à la perfection de ce système, on doit les attribuer aux notions que les Arabes ont puisées chez les autres peuples; le sceau du génie est trop bien imprimé sur leurs découvertes, pour qu'on soit éloigné de croire, que si l'Arithmétique avait pris naissance chez eux, ils auraient inventé le *système duodécimal*, infiniment supérieur à celui qu'ils nous ont transmis. Nous leur devons aussi, les règles de fausse position, simples et doubles. Ce qui les a probablement conduits au système décimal, c'est que la plupart des peuples, dirigés par le nombre de leurs doigts, assemblaient les nombres par dixaines; mais l'obscurité des symboles dont ceux ci faisaient usage, devait alonger excessivement les calculs les plus simples, et atteste à cet égard, la faiblesse de leurs connaissances. Le peu d'uniformité qui règne dans les valeurs relatives des chiffres des anciens, laisse apercevoir combien les calculs étaient longs et pénibles; la confusion devait nécessairement entraîner dans des erreurs multipliées. Les lettres de l'alphabet servaient de chiffres; les unités des différens ordres se distinguaient, chez les Grecs, par des accens, et chez les Romains par les diverses combinaisons des lettres numérales. L'*Arithmétique binaire*, paraît avoir été celle des anciens *Chinois;* les *Thraces*, selon ARISTOTE, se servaient de quatre chiffres. Quelques personnes prétendent que l'invention de notre système de

numération appartient aux *Indiens ;* les auteurs arabes, ALSÉPHADI et ABEN-RAGEL, attribuent expressément la découverte de leur Arithmétique aux philosophes indiens. Je dois observer que plusieurs *pythagoriciens* employèrent dans leurs calculs des *caractères* particuliers, tandis que les autres Arithméticiens se servaient des lettres de l'alphabet; il paraît même certain que l'on connut dans l'école de PYTHAGORE, une manière de noter les nombres analogue à la nôtre.

Vers l'an 960, GERBERT, qui fut ensuite pape sous le nom de SYLVESTRE II, répandit dans une partie de l'Europe, les connaissances qu'il avait acquises chez les *Maures* d'Espagne. Pendant plusieurs siècles, la science du calcul ne fit aucuns progrès; les Arithméticiens s'occupaient alors d'une classe de problèmes dont le seul mérite était produit par la combinaison de la nouveauté et de la difficulté vaincue. L'an 1200, SACROBOSCO, surnommé HOLYVOOD, composa un Traité en vers techniques, sur l'Arithmétique arabe ; ce Traité renferme quelques théories curieuses. Au commencement du treizième siècle, LÉONARD de Pise, fit connaître en Italie les chiffres arabes et l'algèbre; il composa un Traité d'Arithmétique qui est assez estimé.

La science du calcul fit de grands progrès dans le cours du quinzième siècle ; une des découvertes qui y contribua le plus, fut sans doute l'invention des décimales ; nous la devons à (*Jean*) MULLER, surnommé REGIO-MONTANUS. Dans le même temps, le professeur MAUROLICO, rendit

des services aux sciences exactes, par ses découvertes et sa manière d'enseigner ; il perfectionna les calculs, et somma plusieurs suites, comme la suite des nombres *naturels* , celle des nombres *pyramidaux*, etc ; on lui reproche d'avoir abusé de ses moyens, en se mêlant de prédire les événemens. Tartaléa, composa un excellent Traité des nombres et des mesures ; le célèbre et malheureux Ramus, publia deux livres d'Arithmétique qui sont fort au-dessous de sa réputation ; le plus grand mérite des ouvrages de ces deux derniers auteurs, est de renfermer le germe de l'importante théorie des *logarithmes*.

Vers l'an 1570, le modeste et savant Viéte, si justement célèbre par les découvertes qu'il fit dans toutes les branches des mathématiques, résolut plusieurs problêmes relatifs aux propriétés des nombres ; ce fut lui qui parvint à deviner le sens de plusieurs lettres écrites en chiffres.

Le 17ème siècle vit paraître une foule de Mathématiciens célèbres, qui augmentèrent considérablement les richesses que l'Arithmétique avait accumulées depuis sa naissance : Snellius Wilbrod, professeur de mathématiques à *Leyde*, perfectionna les théories connues, et en créa quelques-unes : Bachet de Méziriac, et Fermat, firent des découvertes importantes sur les propriétés des nombres : Frenicle de Bessy, inventa des méthodes très-ingénieuses pour résoudre les problêmes numériques, sans aucune idée d'algèbre ; cet illustre arithméticien parvint à des résultats où l'analyse algé-

brique conduirait difficilement; il composa un excellent Traité d'Arithmétique, qui contribua au perfectionnement de la science. On attribue à Néper, la découverte des logarithmes; mais il paraît certain qu'il ne fit que réduire en table une méthode connue long-temps avant lui; on en trouve les principes dans les ouvrages de Tartaléa et de Ramus, dont nous avons déjà parlé. Cette découverte est sans contredit une de celles qui contribua le plus aux progrès rapides que les sciences exactes firent ensuite. Les logarithmes introduisirent dans les calculs numériques, des abréviations auxquelles l'*astronomie* doit une partie de ses progrès; par leur secours, la multiplication, la division, la formation des *puissances* et l'extraction des *racines*, se trouvent réduites à l'addition à la soustraction à la multiplication et à la division. Il est vrai que l'impossibilité de déterminer la valeur exacte des logarithmes introduit quelques erreurs; mais elles sont d'autant moindres que les tables sont plus étendues; et comme il suffit dans la plupart des calculs d'obtenir une valeur approchée du résultat, on peut, dans les usages ordinaires, employer les logarithmes avec succès; leur grande utilité doit faire oublier leurs légers inconvéniens. Néper fut enlevé aux sciences avant la fin de son travail; mais (Henry) Briggs, professeur de mathématiques à *Londres*, et (Adrien) Ulacq, mathématicien de la ville de *Gand*, terminèrent et perfectionnèrent son travail, en publiant les tables de *logarithmes* qu'on emploie aujourd'hui. Nous

devons à NÉPER une méthode très ingénieuse pour former les produits des nombres, avec des *lames* ou *baguettes*, connues sous le nom de *bâtons de Néper;* par leur moyen, les multiplications les plus composées se trouvent réduites à l'addition de deux nombres d'un seul chiffre, ensorte qu'il n'y a pas d'enfant qui ne puisse exécuter ces sortes d'opérations avec autant d'exactitude que de facilité, même sans connaître la table de multiplication de PYTHAGORE. Cette dernière table est comprise dans l'une des dispositions des *baguettes.*

L'illustre DESCARTES, marqua une des époques les plus utiles aux progrès des mathématiques; son génie, aussi vaste qu'entreprenant, se fraya une nouvelle route et enrichit la science d'un grand nombre de découvertes. Dans le cours du même siècle, MERCATOR et WALLIS imaginèrent des séries de nombres d'une espèce nouvelle : le lord BROUNKER inventa les fractions continues, qui lui fournirent un rapport très-approché du diamètre à la circonférence : PASCAL, âgé de 19 ans, imagina cette fameuse *machine arithmétique*, si connue et si extraordinaire, qui effectue toute sorte de calculs : le célèbre HUYGHENS, perfectionna la théorie des fractions continues de BROUNKER, et l'appliqua au calcul d'une machine destinée à représenter les mouvemens de notre système planétaire : OZANAM contribua au progrès de l'arithmétique, en formant de bons élèves et publiant des ouvrages amusans et utiles; tout le monde connaît ses Récréations mathématiques et ses Tables de logarithmes.

Le milieu du dix-septième siècle fut honoré par la naissance de l'illustre NEWTON ; il parut pour éclairer le monde savant, et son *Arithmétique universelle*, effaçant les ouvrages qui avaient été publiés jusqu'alors, forma une époque bien supérieure aux précédentes. Ce grand homme prépara les découvertes qu'il ne fit pas lui-même, et ouvrit une carrière immense à ses successeurs; l'arithmétique lui doit une partie de ses richesses.

L'heureux LÉIBNITZ, fit des découvertessublimes dans toutes les parties des mathématiques; il s'occupa des différens systèmes de numération, et inventa l'*Arithmétique binaire*, au moyen de laquelle, il parvint à expliquer une énigme chinoise fort compliquée. Les solutionsdes problèmes numériques furent perfectionnées par le Père PRESTET ; il trouva à l'aide de combinaisons assez ingénieuses, que le vers latin....

Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera cœlo.

Peut être varié de 3376 manières, sans cesser d'être vers. Nous devons à VARIGNON de bons Elémens de mathématiques. Dans le même temps, le Père REYNAUD, publia deux ouvrages fort estimés, la Science du calcul et l'Analyse démontrée. Le célèbre LAGNY, né en 1660, composa une arithmétique qui renferme des méthodes nouvelles et abrégées, pour l'extraction et l'approximation des *racines*, pour la résolution des problêmes, etc; il eut la patience de calculer le rapport du diamètre à la *circonférence* avec 127 décimales; mais dans la pratique le rapport de 7 à 22, donné par

Archiméde, est le plus commode; lorsqu'on a besoin d'un plus grand degré d'exactitude, on peut employer le rapport de Métius, celui de 113 à 355. La théorie des suites fut perfectionnée par Moivre; il s'occupa des jeux de hasard et fit des découvertes importantes dans les autres parties des mathématiques.

Les progrès de l'arithmétique et la perfection de ses méthodes avaient mis cette science à la portée des êtres les moins intelligens; mais l'homme de génie, privé de la vue, admirait les beautés de l'arithmétique sans pouvoir opérer par lui-même; lorsque l'illustre aveugle Saunderson inventa une *arithmétique palpable*, au moyen de laquelle il effectuait les calculs les plus compliqués; cette découverte importante était bien due à l'homme étonnant, qui, privé de la vue à un an, enseigna la théorie de la lumière et des couleurs.

Les nombreuses découvertes du célèbre Euler, né à Bâle en 1707, et mort en 1783, perfectionnèrent toutes les branches des mathématiques; ce savant fit des recherches profondes, sur les propriétés des nombres, sur les fractions décimales *périodiques*, sur les séries, etc. Mais ayant eu le malheur de perdre la vue, l'activité de son génie lui suggera l'idée de composer des élémens, au moyen desquels on pût apprendre seul. Il essaya sa méthode sur un jeune homme d'une capacité assez ordinaire, qui n'avait aucune teinture des mathématiques; ce jeune homme fit des progrès rapides, et parvint à rédiger, d'après

les leçons de son illustre maître, le Traité d'arithmétique et d'algèbre, publié en 1770, par l'académie impériale des sciences de *Saint-Pétersbourg*. Cet ouvrage est surtout recommandable, par la clarté des démonstrations. L'académicien CAMUS, né en 1710, publia des Elémens qui obtinrent beaucoup de succès; on y trouve quelques théories assez intéressantes. L'abbé de LACAILLE a composé des Elémens de mathématiques justement estimés, que l'abbé MARIE a ensuite publiés avec des additions fort étendues. Cet ouvrage est extrêmement concis. Nous devons à BEZOUT deux Cours complets de mathématiques, l'un pour l'artillerie, l'autre pour la marine; les nombreuses éditions de ces ouvrages attestent leur utilité et leur mérite; si l'on y rencontre des théories peu rigoureuses, on ne doit pas en faire un reproche à l'auteur, qui, voulant mettre son ouvrage à la portée de la jeunesse, dut quelquefois sacrifier l'exactitude à la clarté; il mourut en 1783.

Les savans du dix-huitième siècle, ont perfectionné toutes les parties des mathématiques; le goût particulier de la jeunesse pour les sciences exactes, doit être attribué à la bonté des ouvrages actuels. Nous citerons les Traités d'arithmétique, de BOSSUT, de MAUDUIT, de LACROIX, etc, comme offrant des collections précieuses aux amateurs. Ces savans, en enrichissant l'arithmétique de leurs propres découvertes, l'ont présentée sous des aspects différens, qui me semblent également propres à disposer l'esprit de l'élève

lève aux considérations abstraites de l'*algèbre*. Enfin, les dernières recherches de LAGRANGE, sur les fractions continues et celles de LEGENDRE, sur les propriétés des nombres, viennent d'élever l'arithmétique à un degré de perfection qu'elle aura peine à dépasser.

Après avoir jeté un coup-d'œil rapide sur l'origine et les progrès de l'arithmétique, je suis naturellement conduit à faire connaître les motifs qui m'ont engagé à la présenter sous un point de vue nouveau (*).

Si l'on compare entr'elles les nombreuses méthodes adoptées dans les ouvrages élémentaires, on apercevra qu'elles se réduisent toutes à deux essentiellement différentes. La première est la méthode *analytique*; on suit la marche des inventeurs, les théorêmes découlent naturellement les uns des autres, l'utile curiosité de l'élève est continuellement excitée par des difficultés grandes à ses yeux, mais de telle nature néanmoins que ses efforts parviennent à les surmonter; l'élève, encouragé par des premiers succès qu'il attribue à

(*) J'ai craint long-temps de risquer des idées nouvelles, mais les succès que j'ai obtenus en les appliquant à l'instruction d'un grand nombre d'élèves, qui se destinaient à l'*École Polytechnique*; l'admission de ces élèves; leur avancement rapide, dans le *génie civil et militaire*; mes démonstrations, consignées en l'an dix, dans les fragmens sur l'Algèbre, et dans les notes sur l'Arithmétique de BEZOUT, recueillies dans des Traités complets d'Arithmétique et d'Algèbre, imprimés en l'an onze; et enfin les avis d'hommes instruits, m'ont déterminé à développer mon système dans un ouvrage complet, sur les élémens.

ses propres forces, saisit avec avidité tout ce qui peut le conduire à de nouvelles découvertes; son esprit travaille, se fortifie, s'accoutume à vaincre des obstacles de plus en plus puissans et à découvrir la vérité. L'étude, au lieu de paraître aride et rebutante, offre les attraits du plaisir et de la gloire, et ce n'est qu'avec peine que l'esprit fatigué, se repose quelques instans, pour reprendre ensuite le travail avec plus de force et d'activité. Mais, si l'on doit stimuler l'élève indolent, on doit au contraire mettre un frein à une imagination trop fougueuse; la nature punit également le dépositaire infidèle, qui abuse de ses dons et celui qui néglige de s'en servir.

La méthode que nous venons d'exposer peut plaire et même séduire; elle offre des avantages réels; mais on ne peut se dissimuler qu'elle n'ait beaucoup d'imperfections. En effet; si l'on écarte toute prévention, on verra, que les théorêmes ne se classent pas bien dans la mémoire, que les fleurs qui paraissent embellir la route que l'on suit, servent réellement à cacher ses nombreux détours et ses écueils; ensorte que, de ceux qui la parcourent, les uns échouent, les autres intimidés, ou n'apercevant aucun terme, rétrogradent ou finissent par languir tristement sur le milieu de la carrière. Cette méthode d'invention est surchargée d'une foule de détails minutieux, qui fatiguent l'attention sans la fixer sur les théories importantes; les théorêmes se perdent dans la foule des corollaires.

La seconde méthode est la méthode *synthétique ;* elle conduit plus directement au but ; les parties différentes sont bien séparées ; les idées se classent naturellement, l'étude est claire et facile ; mais ces avantages apparens couvrent malheureusement quelques défauts. L'élève ignore continuellement le but et l'origine de ses recherches, son intérêt n'est pas soutenu, son zèle se ralentit, so etn esprit n'acquiert pas ce degré d'énergie nécessaire aux grandes découvertes.

Les deux méthodes que je viens d'exposer, offrent chacune des avantages et des inconvéniens ; j'ai cherché à réunir les uns en éliminant les autres ; je ne suis pas assez téméraire pour me croire parvenu au but, en parcourant tous les points de la ligne droite qui marque le plus court chemin du lieu de départ au point que je m'étais proposé d'atteindre, mais peut-être qu'en suivant la route que j'aurai frayée, quelqu'un de plus habile découvrira un jour ce qui peut manquer au perfectionnement de mon ouvrage ; j'aurai du moins la satisfaction d'avoir concouru aux progrès des élémens.

Après avoir long-temps médité sur les travaux de mes prédécesseurs, j'ai cru pouvoir en déduire une méthode d'instruction d'autant plus simple, qu'elle me paraissait plus naturelle ; mais l'expérience m'a convaincu que la pratique détruit les illusions d'esprit, souvent causées par l'amour-propre. Les élèves les moins intelligens me donnèrent quelquefois des leçons utiles dont je cher-

chai à profiter ; elles servirent aussi à me convaincre qu'on apprend soi-même en instruisant les autres. L'esprit capable des plus belles découvertes, ne parvient à les mettre à la portée commune, qu'après les avoir long-temps enseignées. L'intelligence des élèves est si différente, qu'une méthode claire pour les uns est obscure pour les autres. En étudiant avec soin les impressions diverses qu'une même démonstration produisait sur des élèves, également instruits et de même capacité, j'ai reconnu que le seul moyen de mettre un ouvrage élémentaire à la portée des lecteurs intelligens, est de présenter certaines questions sous différens points de vue ; parce que la monotonie étant l'écueil de l'imagination, on doit souvent préférer un raisonnement plus difficile lorsqu'il introduit une idée nouvelle. « C'est ainsi, dit Lacroix, » que de même qu'il y a dans les affaires des dé- » penses bien entendues qui conduisent à une » véritable économie, il y a aussi dans les sciences » des longueurs qui abrègent, ce sont celles qui » ouvrent une source d'idées nouvelles. On ne » peut contester qu'un corps de doctrine, com- » posé de détails dépourvus de cette liaison qui » soulage la mémoire, et qui dirige le jugement, » ne s'efface plus promptement de l'esprit qu'un » petit nombre de théories bien liées. Si ces der- » nières exigent quelqu'effort pour être saisies, » il restera du moins, lorsqu'on les aura oubliées, » la faculté d'en comprendre d'aussi difficiles, » tandis que le premier savoir n'aura laissé après

» lui aucun résultat » On peut dire que *la difficulté est une sorte de mordant qui grave les idées dans la mémoire; ce qu'on apprend sans peine s'oublie aussi facilement.*

Guidé par ces considérations, j'ai cherché à concilier la clarté avec la rigueur de la démonstration. Mais il m'a paru impossible de réunir, dès le principe, ces deux qualités. L'esprit n'étant pas toujours dirigé par un raisonnement juste, c'est l'exercice seul qui peut, en le fortifiant, le mettre à même de concevoir et d'apprécier les démonstrations rigoureuses. Je crois qu'il est extrêmement dangereux de diriger l'élève sur un obstacle qu'il n'est pas encore en état de surmonter.

Le mode d'enseignement qui paraît donc le plus convenable à la majorité des élèves, consiste à présenter d'abord l'arithmétique sous un point de vue clair, simple, facile, et à reprendre ensuite les mêmes théories pour les compléter, les généraliser et leur donner des formes plus rigoureuses; c'est peut-être le seul moyen de préparer l'esprit aux considérations exactes de l'algèbre. Je dois me justifier d'un reproche que j'ai paru mériter; on a cru que mon but, en réduisant l'arithmétique aux quatre règles, était de la dépouiller d'une partie de ses richesses en faveur de l'algèbre; mais j'ai seulement établi un juste échange entre les deux sciences; l'arithmétique a restitué à l'algèbre, toutes les théories algébriques, telles que les puissances, l'extraction des racines, les rapports, les proportions, les logarithmes, etc, et par droit

d'échange, l'algèbre s'est laissé enlever les problêmes qui ne lui appartenaient pas. La généralité des opérations de l'algèbre, a tellement fait négliger le calcul numérique, que des élèves forts dans les parties élevées, ignorent quelquefois les beautés de l'arithmétique, et par cela même ont peu d'estime pour elle. Un tableau couvert de longs calculs algébriques, destinés à résoudre un problême numérique fort simple, plaît à leur orgueil et leur paraît plus précieux qu'une solution arithmétique infiniment plus courte et plus élégante; ils se plaisent à étaler des difficultés apparentes, parce qu'ils savent que l'ignorance admire ce qu'elle ne comprend pas. Quelques savans de l'antiquité eurent cette faiblesse, ils proposaient des problêmes et publiaient leurs solutions, en cachant avec soin la route qu'ils avaient suivie; et sacrifiant l'utilité publique à leur amour propre, ils dérobèrent à la postérité des démonstrations importantes. Moins jaloux d'étonner que d'instruire, l'auteur élémentaire doit éclairer la marche du raisonnement avec le flambeau de la vérité, en faisant apercevoir les théories peu rigoureuses; et surtout, qu'il ne dédaigne jamais ces petits détails, qui ne semblent minutieux, qu'à des esprits superficiels, plus jaloux de leur savoir que des progrès de la science. Il doit guider ses lecteurs, en les conduisant pas à pas dans les sentiers qu'il a parcourus, et applanir certaines difficultés, en conservant néanmoins celles qui exciteront un jour l'émulation.

L'élève arrêté par des obstacles aurait tort de se rebuter; qu'il se persuade bien que celui qui croit n'en rencontrer aucun, doit cette faveur illusoire à son ineptie et à son amour-propre, qui ne permettent pas à son jugement d'apercevoir les difficultés inséparables des élémens; aussi ce dernier ne saurait distinguer une démonstration fausse d'une démonstration exacte. Lorsque celui qui étudie rencontre un objet capable de l'arrêter trop long-temps, il doit passer outre, pour y revenir ensuite; les connaissances acquises applànissent les difficultés laissées en arrière. Il ne faut cependant pas abuser de ce principe, en glissant trop légèrement sur des théories importantes, qu'un travail assidu peut faire comprendre; et d'ailleurs on tenterait en vain de passer outre, lorsque la connaissance de ces théories est nécessaire à l'intelligence de celles qui les suivent.

La clarté des méthodes de l'arithmétique, convient à la faiblesse des commençans, et les formes variées dont ces méthodes sont susceptibles, en exerçant utilement l'esprit des élèves, les préparent à saisir des considérations plus abstraites. Les grands moyens de l'algèbre attestent, il est vrai, sa puissance, mais la force même de ses instrumens, semble demander des bras plus exercés. Je me suis convaincu que les théories générales enseignées de trop bonne heure, sont rarement comprises et perdent alors le jugement, en l'accoutumant à se laisser aveuglément conduire par le calcul; au contraire, les considérations fines

et délicates qu'exigent les solutions arithmétiques, préparent le raisonnement aux artifices brillans de l'analyse. La solution d'un probléme étant le résultat de la combinaison du raisonnement avec un calcul purement mécanique, il doit s'établir une espèce de compensation entre le nombre des raisonnemens et celui des calculs ; on perd donc toujours d'un côté ce qu'on gagne de l'autre, ensorte que plus le raisonnement avance la solution, moins il reste de calcul à faire pour la terminer ; et comme la marche du raisonnement est plus sûre et plus rapide que celle du calcul, il en résulte enfin qu'il est toujours avantageux de ne confier à ce dernier que ce qui échappe au raisonnement ; on en tire le double avantage d'exercer l'esprit et d'abréger le calcul.

Ces considérations m'ont déterminé à ne traiter dans l'arithmétique que des quatre règles ; mais comme le passage, d'une arithmétique aussi simple, à l'algèbre, serait trop subit, et que d'ailleurs ceux qui ne doivent point étudier cette dernière science, ont besoin de savoir résoudre toutes les questions numériques ; j'ai cru devoir donner dans une *Introduction à l'Algèbre*, non-seulement toutes les questions consignées dans les ouvrages sur l'arithmétique, mais encore une grande partie des problémes du premier degré, que l'on croyait appartenir à l'algèbre. Toutes mes solutions sont purement arithmétiques, elles résultent des combinaisons les plus simples des quatre règles, déterminées par un raisonnement rigoureux et in-

dépendant des proportions. Ceux qui pourront résoudre algébriquement les mêmes questions, verront que l'arithmétique a quelquefois l'avantage sur l'algèbre, ce qui ne doit pas les étonner; car lorsqu'on applique cette dernière à une question qui est réellement du ressort de l'arithmétique, il faut que les moyens généraux qu'on emploie conviennent à toutes les questions de même espèce, et réunissent les difficultés qu'elles comportent; la solution arithmétique, au contraire, n'ayant rapport qu'à une seule question, ne doit renfermer que les difficultés qui lui sont relatives, et profiter de toutes les simplifications dont elle est susceptible; on peut dire qu'une solution algébrique réunit toutes les difficultés et toutes les longueurs des problêmes particuliers qu'elle peut résoudre, tandis que la solution arithmétique n'offre que les difficultés inséparables de la question particulière que l'on traite.

En général : *pour reconnaître si un problême est du ressort de l'Algèbre ou de l'Arithmétique, il faut, lorsque cela est possible, le résoudre des deux manières; il appartiendra à la science qui aura fourni la solution la plus simple, la plus claire, la plus directe et la plus élégante.* C'est ce procédé qui a déterminé le choix des problêmes que je traite dans mon *Introduction à l'Algèbre.* Pour achever de convaincre de l'utilité de l'Arithmétique, j'ai donné, par son moyen, la solution de problêmes très compliqués, qui semblent du ressort de l'algèbre, et que cette dernière ne peut

cependant pas résoudre. Il est d'ailleurs certain que pour les commençans, les nombres ont l'avantage sur les lettres, parce qu'ils vérifient à chaque instant l'exactitude du résultat obtenu; on peut dire que *les nombres éclairent le raisonnement.*

On m'objectera sans doute, qu'en traitant ainsi par le seul moyen de l'Arithmétique la plupart des problêmes, l'algèbre ne paraît plus avoir aucun but d'utilité; il est vrai que si je la commençais par les questions données dans l'Arithmétique, cette objection serait fondée; mais ceux qui liront mon algèbre, verront que je débute par des problêmes du premier degré, d'une forme nouvelle, dont les solutions conduisent très-naturellement à la découverte des *signes.* J'ai cru que l'algèbre fournissait assez de difficultés réelles, pour qu'on ne s'abaissât pas à tromper l'esprit de l'élève, en donnant l'apparence de la difficulté algébrique, à des questions numériques très-simples. Enfin, l'Arithmétique m'a paru offrir assez d'attraits pour qu'on ne l'abandonnât qu'à la dernière extrémité. L'élève qui l'a ainsi cultivée, entre, il est vrai, plus tard dans la carrière algébrique, mais l'énergie qu'il a acquise lui fait bientôt atteindre ceux qui avaient paru le devancer, et son imagination, accoutumée à lier un grand nombre d'idées, saisit le véritable esprit de l'analyse.

Je crois devoir terminer ces observations par l'exposé des diverses causes qui ont concouru d'une manière plus ou moins directe à la formation des élémens que je publie. Admis à l'*École Polytech-*

nique, lors de son origine, je fis tous mes efforts pour profiter des leçons de ses célèbres professeurs. Après deux ans d'étude, je fus reçu aux *Ponts et Chaussées*. Nommé en l'an sept professeur d'analyse à l'*École Polymathique*, je m'occupai sérieusement des élémens; je les présentai aux élèves sous des formes variées, dans l'intention de simplifier l'étude. Des expériences multipliées me firent connaître le mode d'instruction le plus convenable à la majorité; je substituai de nouvelles démonstrations, à des démonstrations qui me parurent peu rigoureuses, et je présentai les théories dans un ordre différent de celui qui a été suivi jusqu'ici. Je consignai le résultat de mes recherches dans des Fragmens sur l'Algèbre, publiés au commencement de l'an dix. Nommé, la même année, *professeur d'analyse du Lycée de Paris*, je fis de nouveaux efforts pour corriger mes Elémens; j'en publiai quelques résultats dans des notes sur l'Arithmétique de Bezout, imprimées à la fin de l'an dix. J'étais prêt à faire paraître mon Cours complet, lorsque ma nomination à la place de *professeur du Cadastre*, m'imposa de nouvelles obligations; je sentis que je devais répondre à la confiance publique, en revoyant avec le plus grand soin toutes les parties, et en ajoutant quelques théories, dont la connaissance est utile aux *ingénieurs géographes.*

Mon Arithmétique est divisée en quatre parties; les deux premières, qui composent le premier volume, offrent une *théorie complette du calcul.*

Les deux autres parties, qui composent le second volume, renferment les *applications du calcul, à un grand nombre de problêmes utiles et amusans. Le Supplément au Cours d'Arithmétique*, qui forme le troisième volume, renferme deux parties; la première est destinée à ceux qui veulent approfondir l'étude des Mathématiques ; la deuxième partie exige des notions de *Géométrie* et de *Trigonométrie;* elle n'est en conséquence destinée qu'aux *élèves du Cadastre*, qui veulent s'instruire ou se perfectionner dans l'art de lever les plans, avec les seules notions du calcul numérique. Voici l'analyse de ces diverses parties.

La PREMIÈRE PARTIE traite des Nombres abstraits. On y développe l'origine de l'*Unité*, du *Nombre* et du *Calcul;* on donne, la définition de l'*Arithmétique*, la formation des *Nombres entiers*, leur *numération* et leur calcul. La division engendre les *fractions*, et explique leur véritable origine ; j'expose ensuite leur numération, en examinant avec soin toutes les difficultés qu'elle présente; je fais remarquer les différens aspects sous lesquels on peut considérer les fractions; je démontre leurs propriétés principales, leur calcul et la *théorie du plus grand commun diviseur*; cette théorie me donne un procédé direct pour réduire les fractions à leur plus simple expression. Je parle des *fractions irréductibles*; j'examine avec soin l'origine et la nature des *fractions de fractions*, leurs propriétés principales, leur calcul et leur conversion en fractions ordinaires. La complica-

cation du calcul des fractions comparée à la simplicité du calcul des nombres entiers, conduit assez naturellement aux *fractions décimales.* J'expose successivement, leur numération, leurs propriétés et leur calcul. La réduction des fractions ordinaires en décimales, donne naissance aux *fractions décimales périodiques*, et aux *fractions décimales périodiques mixtes.* Je parle de leurs propriétés les plus importantes. J'enseigne à remonter d'une fraction décimale périodique, ou d'une fraction décimale périodique mixte, à la fraction ordinaire dont elle est le développement. Je donne le calcul des fractions décimales périodiques de toute espèce, et je lève toutes les difficultés qu'il peut offrir. Je termine cette première partie par des méthodes nouvelles, tendantes à abréger le calcul des nombres décimaux.

La SECONDE PARTIE, qui termine le premier volume, offre une théorie complète de la numération et du calcul des *nombres concrets*, *incomplexes et complexes*, avec toutes les méthodes abrégées dont ce calcul est susceptible, appliquées à un grand nombre d'exemples. J'insiste fortement sur la conversion des nombres concrets en fractions irréductibles, et sur le développement d'une *fraction concrète*, en nombre complexe. Je prouve que la connaissance du résultat, auquel doit conduire la solution d'un probléme quelconque, dépend toujours de la nature de ses unités et de leur nombre, qui est essentiellement *abstrait ;* la nature de la question détermine l'espèce des unités du résultat,

le seul but du calcul est de faire connaître le nombre abstrait de ces unités. Je termine la théorie des nombres complexes, par des règles générales, qui donnent à leur calcul tout le degré d'exactitude et de simplicité dont il est susceptible. J'applique cette importante théorie à la solution d'un grand nombre de problèmes.

La complication et la longueur du calcul des nombres complexes, dues au défaut d'uniformité de leurs subdivisions, conduit aux *nouvelles mesures*. Je développe leur théorie avec tout le soin que mérite son importance. Je parle de leur origine et de leur utilité. Je donne leur numération, leur calcul, leurs rapports avec les *anciennes mesures*, et les tableaux comparatifs au moyen desquels on peut convertir, à l'aide de l'addition seule, les anciennes mesures en nouvelles, et réciproquement les nouvelles en anciennes. J'explique, avec le plus grand détail, la manière dont on a formé ces tables et leurs usages; je fais connaître les cas dans lesquels il serait dangereux de s'en servir; j'enseigne à y suppléer, et je termine par de nombreux exemples.

La TROISIÈME PARTIE *peut servir de complément à l'Arithmétique*, et d'INTRODUCTION A L'ALGÈBRE. *Elle contient des méthodes nouvelles pour résoudre toutes les questions numériques, et une partie de celles de l'algèbre, à l'aide des seules combinaisons des quatre règles de l'Arithmétique, et sans le secours des proportions.* Ma méthode offre un procédé simple et abrégé, qui peut remplacer

toutes les règles jusqu'ici connues sous les noms de, *règles de trois simples et composées directes et inverses ; règles de compagnie*, *d'escompte*, *de change*, *de troc*, *d'alliage*, *de fausse position*, *de double fausse position*, *etc*..... J'ai cru rendre un double service aux commençans, en soulageant leur mémoire, et fortifiant leur raisonnement. J'ai pensé que cet énorme échafaudage de noms et de règles, n'était propre qu'à obscurcir les idées, en conduisant au résultat d'une manière purement mécanique. Il était sans doute impossible à ceux qui ne pratiquaient pas continuellement ces nombreuses règles, de les retenir; et d'ailleurs, comme ils ne se rendaient pas compte des opérations, il leur arrivait de commettre des erreurs grossières. Le calcul, dirigé par le raisonnement seul, n'est sujet à aucun de ces inconvéniens : on peut dire que *le raisonnement rassure sur les incertitudes de la mémoire.*

Après avoir fortement insisté sur les *questions relatives à l'intérêt de l'argent*, je donne des règles abrégées pour le *calcul*, *des intérêts simples et composés*, *directs et inverses*, *des annuités*, *des changes*, *etc*; enfin, je lève toutes les difficultés que comportent les questions de chaque espèce. Je démontre rigoureusement ce qui concerne les *rapports directs et inverses*; j'applique leur théorie à un grand nombre de *problêmes relatifs aux travaux et au commerce*. Je donne une *méthode générale pour classer toutes les spéculations, suivant les avantages dont elles sont sus-*

ceptibles. Je parviens à résoudre plusieurs *questions sur l'écoulement des fluides*, *sur les couriers*, *sur les rencontres des aiguilles d'une montre*, *etc.* Enfin, cette INTRODUCTION A L'ALGÈBRE renferme toutes les questions numériques qui peuvent se résoudre à l'aide d'artifices de calcul indépendans des signes algébriques.

La QUATRIÈME PARTIE, qui termine le second volume, offre une *collection complète de tous les tours amusans qu'on peut exécuter en société*; ces tours sont nouveaux pour la plupart; le double aspect sous lequel je les présente, les met à la portée de ceux même qui ne connaissent pas l'Arithmétique. Je donne dans les notes quelques démonstrations algébriques.

Le SUPPLÉMENT *au Cours d'Arithmétique*, est composé de deux parties. La PREMIÈRE PARTIE renferme des théories absolument nouvelles. Après avoir fait des réflexions sur la nature des nombres, et sur les relations qui existent entre les nombres et les résultats numériques engendrés par leur calcul; j'expose les *complémens arithmétiques* et leurs usages. Je donne des *règles relatives aux abréviations dont le calcul numérique est susceptible*, *suivant le degré d'exactitude avec lequel on veut obtenir le résultat*. Je démontre un *principe général*, *qui comprend tous les caractères relatifs à la divisibilité des nombres*. Je fais connaître comment on peut déterminer les *nombres premiers*. Je parle du *crible* d'ÉRATOSTHÈNE. Je généralise les démonstrations de l'Arithmétique; je

je fais des recherches sur les fractions décimales périodiques ; j'expose la *théorie des fractions continues ; etc.* Enfin, je démontre toutes les *propriétés des nombres qui servent de fondement à l'algèbre.*

La SECONDE PARTIE du SUPPLÉMENT, qui termine le troisième volume, contient : 1°. *Le calcul des* PUISSANCES ; l'*extraction des* RACINES : *des méthodes nouvelles pour obtenir les racines à un degré d'approximation donné : des caractères auxquels on juge, à la seule inspection d'un nombre, si sa racine d'un degré connu est incommensurable ;* 2°. Des règles abrégées et commodes pour la mesure des *surfaces* et des *volumes*, en considérant successivement les anciennes mesures et les nouvelles ; 3°. Les RAPPORTS, les PROPORTIONS, et les PROGRESSIONS, avec les problèmes qui les concernent ; 4°. L'origine et les propriétés des LOGARITHMES ; leur calcul ; la disposition et les usages des *tables* qui les contiennent. L'évaluation du degré d'exactitude sur lequel on peut compter, lorsqu'on emploie les *logarithmes*. L'examen des cas où il serait dangereux de les employer. La solution, au moyen des *logarithmes*, d'un grand nombre de problèmes.

5°. Le calcul des *logarithmes des lignes* TRIGONOMÉTRIQUES ; la disposition et les usages des *tables* qui les contiennent ; une méthode générale pour calculer ceux des logarithmes des lignes trigonométriques que l'on ne trouve pas dans les tables ; des procédés pour découvrir la longueur du *rayon*,

et pour trouver, au moyen des tables, les longueurs des lignes trigonométriques correspondantes à des rayons donnés. 6°. La *résolution des triangles*, *rectangles et obliquangles*, dans tous les cas possibles. L'examen des difficultés qui peuvent s'offrir : 7°. L'application des logarithmes à la résolution d'un grand nombre de *problêmes relatifs au lever des plans*, *et aux mesures des surfaces et des volumes.*

Nota. Le Supplément est terminé par les *tables de logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques.* Ces tables, calculées et imprimées avec le plus grand soin, offriront au géomètre le degré d'exactitude qui lui est nécessaire. Elles sont disposées d'une manière neuve, et n'exigent aucune étude pour s'en servir. On a joint au Supplément, des *tables fort étendues*, *qui renferment tout ce qui peut être utile aux* Ingénieurs géographes ; *on y trouve les déclinaisons du soleil*, *celles de l'aiguille aimantée*, *les pesanteurs spécifiques des corps*, *etc.*

Je crois devoir terminer ce *Discours préliminaire*, en faisant quelques réflexions sur le caractère et les ouvrages de l'un des hommes qui a le plus concouru aux progrès des élémens. Clairaut, né en 1713, ne fit que paraître sur la scène du monde savant, mais quelques années lui suffirent pour s'immortaliser, par les découvertes les plus sublimes; unissant la modestie au savoir, il se fraya une route aussi nouvelle que philosophique. Ses

travaux eurent surtout pour objet de mettre à la portée commune *l'Algèbre*, qui jusqu'alors avait été la science d'un petit nombre de savans; ils se proposaient des difficultés, et publiaient leurs solutions, couvertes de *symboles* mystérieux, qui semblaient ne donner les résultats que par une sorte de magie. CLAIRAUT, moins jaloux de sa gloire que des progrès de la science, conduit pas à pas ses lecteurs dans les sentiers qu'il a parcourus, et les fait participer, pour ainsi dire, à ses recherches et à ses découvertes : sa méthode est claire et facile ; elle laisse à l'élève le plaisir d'être en quelque sorte inventeur avec son maître. On doit regretter que CLAIRAUT n'ait pas fait précéder son algèbre, d'un traité d'Arithmétique ; son génie eût sans doute jeté un grand jour sur cette dernière science. Suivant la route des inventeurs, CLAIRAUT se livra trop à cette méthode séduisante, qui éclaire, encourage et fortifie l'élève, lorsqu'on l'emploie avec prudence, mais qui, lorsqu'on la suit trop exactement, est surchargée d'une foule de détails minutieux, qui fatiguent l'esprit, sans le fixer sur les objets les plus essentiels. Les théorêmes, dans son ouvrage, se perdent dans la foule des corollaires ; c'est un vaste tableau dans lequel la multitude des personnages empêche de distinguer ceux qui remplissent le principal rôle. Ces inconvéniens firent le plus grand tort aux élémens de CLAIRAUT; on attribua à l'esprit de la méthode ce qui n'était dû qu'à son abus, et au lieu de chercher à la corriger, on l'abandonna. CLAIRAUT, enlevé trop

promptement aux sciences, n'eut pas le temps de découvrir les vices de sa méthode ; mais on doit croire que s'il eût vécu plus long-temps, son esprit supérieur et modeste, les eût reconnus et corrigés. Ainsi l'Algèbre, sur laquelle cet ouvrage devait tant influer, rétrograda après avoir fait quelques pas. Les travaux immenses des Euler, des Waring, des Lagrange, sur la théorie générale des équations, restaient ensevelis dans les Mémoires académiques, où ils les consignaient. On les regardait comme des dépôts précieux, et on les admirait sans les connaître. La science resta dans cet état de stagnation, jusqu'à l'époque où Lagrange, Laplace et plusieurs autres savans furent appelés pour faire des cours, aux hommes instruits réunis à l'*École Normale.* Laplace reproduisit le système de Clairaut, comme celui qui convient le mieux à l'enseignement raisonné des Élémens ; il fixa l'attention des professeurs, sur les richesses immenses enfouies dans les Mémoires des Académies. Les recherches que Lagrange et lui firent à cette occasion, mirent au grand jour ces théories sublimes, et leurs nombreuses découvertes enrichirent beaucoup les sciences exactes. Tout conspirait alors à reculer leurs bornes, lorsque les établissemens des Ecoles centrales, et de l'École Polytechnique, achevèrent ce que ces hommes célèbres avaient si heureusement préparé. Ces établissemens appelèrent aux places de professeurs les hommes les plus instruits dans tous les genres ; et l'émulation qui en résulta,

donna aux sciences une impulsion générale. Électrisés par les leçons de ces grands maîtres, les élèves firent des progrès rapides, et les théories les plus abstraites leur devinrent familières. Déjà plusieurs de ces élèves occupent honorablement des places d'ingénieurs, d'examinateurs et de professeurs; et moi-même je dois à ces leçons ce que j'ai pu offrir de nouveau dans mes ouvrages. Élève de l'*École Polytechnique*, j'aurais parlé de ses illustres professeurs, si leurs noms étaient moins connus; je me borne à les assurer de ma reconnaissance.

Tel est l'état actuel des Mathématiques; toutes les autres sciences ont reçu la même impulsion; n'assignons plus de bornes à nos travaux, sous un Gouvernement qui n'en met pas à ses encouragemens et à ses récompenses.

Fin du Discours Préliminaire.

TABLE.

ARITHMÉTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

NOMBRES ABSTRAITS.

Numération.

Opérations de l'Arithmétique sur les nombres entiers abstraits.

ADDITION.

SOUSTRACTION.

MULTIPLICATION.

DIVISION.

Preuves des 4 Règles.

FRACTIONS.

CALCUL DES FRACTIONS.

Théorie des Décimales.

ARITHMÉTIQUE.

SECONDE PARTIE.

Théorie des Nombres concrets.

Nombres concrets incomplexes.

Théorie des Nombres complexes.

Opérations directes de l'Arithmétique sur les nombres complexes.

239 Règle

Nouvelles Mesures.

Fin de la Table du premier Volume.

Ouvrages de M. Reynaud, qui se trouvent chez M. Courcier, Imprimeur-Libraire.

Fragmens sur l'*Algèbre* et la *Trigonométrie*, précédés du Programme d'un Cours complet de Mathématiques. Prix, 3#

Notes sur l'Arithmétique de Bezout. Prix, 2# 10ʃ

Introduction à l'Algèbre, nouvelle édition, augmentée d'un grand nombre de Problêmes, et d'une collection fort étendue des *tours amusans* qui peuvent s'exécuter en société. Prix, 2# 10ʃ

Supplément au Cours d'Arithmétique, suivi de Tables de logarithmes, et d'un grand nombre de problêmes relatifs au levé des plans. (Sous presse).

Cours à l'usage des Ingénieurs du Cadastre; *Arithmétique*, *Introduction* à l'Algèbre, et *Supplément* au Cours d'Arithmétique; par A. A. L. *Reynaud*.

Élémens de *Géométrie*, par *Hautier*, professeur du *Cadastre*. (Sous presse).

Géodésie, par *Pommiés*, professeur du Cadastre. (Sous presse).
Trigonométrie de la Grive. *(sous presse)*.

Nota. Les tableaux relatifs aux nouvelles mesures, ont été calculés avec le plus grand soin, par M. *Bauzon* (Guy-Marie), ancien arpenteur-forestier dans le département de la Côte-d'Or, actuellement élève du Cadastre.

M. *Bauzon* s'occupe d'une édition in-18, des Tables de Logarithmes des nombres, depuis 1 jusqu'à 12,000, et des lignes trigonométriques. Ces tables seront précédées d'une Trigonométrie analytique, suivie d'un grand nombre de problêmes nouveaux, relatifs au levé des plans; et d'un Traité abrégé de l'arpentage.

ARITHMÉTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

NOMBRES ABSTRAITS.

1. LORSQU'ON réfléchit sur la nature des *quantités* (*), on s'aperçoit qu'il serait impossible de se former une idée exacte de leurs grandeurs, si l'on ne choisissait pas une certaine quantité connue qui pût leur servir de terme de comparaison. En effet, une quantité considérée isolément n'est ni grande ni petite, car elle ne pourrait l'être que par rapport à d'autres quantités de son espèce plus petites ou plus grandes qu'elle : par exemple, s'il n'existait qu'un seul arbre, on ne pourrait pas dire s'il serait grand ou petit, car il ne pourrait l'être que comparativement avec d'autres plus petits ou plus grands, ce qui ne peut avoir lieu si cet arbre existe seul. On peut donc dire qu'*il n'existe aucune grandeur absolue.*

2. Cette quantité qui sert de terme de comparaison entre plusieurs quantités de son espèce, s'appelle *unité*. L'assemblage de plusieurs unités de même nature compose le *nombre;* et la science qui a pour but d'enseigner à effectuer diverses opérations sur les nombres, se nomme *arithmétique*.

3. *La suite des nombres est illimitée ;* car, quelque grand que soit un nombre, il suffit de lui ajouter l'unité pour en obtenir un plus grand. D'après cela, pour former cette suite, on part de l'unité ou *un ;* cette unité ajoutée à elle-même forme déjà un nombre ; celui-ci augmenté de l'unité donne un nouveau

(*) Par *quantité*, on entend tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution.

nombre ; et si l'on continue à ajouter l'unité à chaque nombre obtenu, on formera la série des *nombres entiers*. Dans cette série, chaque nombre contient une unité de plus que celui qui le précède, et par conséquent, *entre deux nombres entiers qui ne diffèrent que de l'unité, il ne peut tomber aucun nombre entier*.

4. Quand on eut ainsi appris à former les nombres, on s'occupa de les distinguer par des noms. La nécessité de les calculer conduisit ensuite à inventer des *caractères* particuliers, à l'aide desquels on pût les écrire d'une maniere plus abrégée. Je ne parlerai pas des diverses tentatives qui furent faites à cet égard ; je me bornerai à offrir leurs résultats dans notre *système de numération ;* on nomme ainsi l'art d'énoncer et d'écrire tous les nombres avec des mots et des *caractères ;* ces caractères se nomment *chiffres*, nous les ferons bientôt connaître.

5. La multitude des nombres mettant dans l'impossibilité d'inventer un nom particulier pour chacun d'eux, on adopta quelques noms simples dont les diverses combinaisons formèrent tous les noms de nombres. Ainsi, on donna un nom particulier à chacun des neuf premiers nombres qui formèrent l'ordre des unités. Ces noms sont : *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit et neuf* (*).

Le nombre neuf augmenté d'un donna le nombre *dix ;* la collection de dix unités forma un nouvel ordre d'unités qu'on nomma *dixaine ;* et, de même qu'on avait compté depuis une unité ou *un*, jusqu'à neuf unités ou *neuf*, on compta aussi depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines ; mais, pour abréger, au lieu de ces mots composés, une dixaine, deux dixaines, trois dixaines, quatre dixaines, cinq dixaines, six dixaines, sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit seulement

---

(*) L'*unité* ajoutée à elle-même compose le nombre *deux*. L'unité ajoutée à ce dernier nombre, donne le nombre *trois*. Celui-ci augmenté d'un, donne *quatre*. *Cinq* s'obtient en ajoutant une nouvelle unité au nombre quatre. Cinq augmenté d'un, donne *six*. Six augmenté d'un, donne *sept*. Sept plus un, forme *huit*. Enfin huit augmenté d'un, produit *neuf*.

dix, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix* (*). Pour exprimer les neuf nombres compris entre deux dixaines consécutives, on énonça successivement les dixaines et les unités. Par exemple, pour énoncer les neuf nombres compris entre vingt et trente, on ajouta au premier nom *vingt*, les noms des unités, depuis *un* jusqu'à *neuf*. Ainsi la collection de deux dixaines et de trois unités se nomma *vingt-trois*; cinq dixaines et sept unités se nommèrent *cinquante-sept*; la réunion de huit dixaines et de trois unités se nomma *quatre-vingt-trois*, ou *octante-trois*; l'assemblage de neuf dixaines et de sept unités, prit le nom de *quatre-vingt-dix-sept* unités, ou de *nonante-sept* unités, et ainsi de suite, jusqu'à la

(*) Au lieu des trois noms *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix*, il vaudrait bien mieux adopter les noms *septante*, *octante*, *nonante*, qui sont usités dans plusieurs pays, et cela par plusieurs raisons : 1° parce qu'ils sont plus simples et moins longs; 2°. parce qu'ils sont plus conformes à l'*analogie* qui veut qu'on dise, *septante* pour sept dixaines, *octante* pour huit dixaines, et *nonante* pour neuf dixaines, comme on dit cinquante pour cinq dixaines, soixante pour six dixaines, etc.; 3°. parce qu'on éviterait la bizarrerie de compter de dix en dix, depuis dix jusqu'à soixante, et ensuite de vingt en vingt; car alors on dirait, par exemple, *septante-cinq* au lieu de soixante-quinze, *octante-huit* au lieu de quatre-vingt-huit, *nonante-cinq* au lieu de quatre-vingt-quinze; ces expressions seraient bien plus naturelles; car on ne dit pas cinquante-dix-sept et trente-dix-huit, pour exprimer soixante-sept et quarante-huit; 4°. les énoncés soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, ont le défaut de ne point mettre en évidence le nombre de dixaines dont ils se composent. Pour connaître combien soixante-dix contient de dixaines, on est obligé de dire : soixante vaut six dixaines, dix vaut une dixaine; soixante-dix vaut donc sept dixaines : septante offre directement l'idée de sept dixaines, comme trente offre celle de trois dixaines. Vingt exprime deux dixaines, conséquemment quatre-vingts valent quatre fois deux dixaines, c'est-à-dire huit dixaines : octante l'exprime bien mieux. Enfin, comme quatre-vingts valent huit dixaines, quatre-vingt-dix valent huit dixaines et une dixaine, c'est-à-dire neuf dixaines : ces neuf dixaines sont en évidence dans l'expression nonante.

On voit donc que les noms septante, octante et nonante ont l'avantage de mettre en évidence les nombres de dixaines dont ils se composent. Toutes ces considérations concourent à faire adopter les mots *septante*, *octante* et *nonante*, au lieu des mots *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix*. Cependant, pour nous conformer à l'usage, nous emploierons quelquefois ces trois dernières expressions.

collection de neuf dixaines et de neuf unités, nommée *nonante-neuf*, ou *quatre-vingt-dix-neuf*. On doit seulement excepter du même système, les six premiers des neuf nombres compris entre dix et vingt; car, au lieu d'énoncer, comme on le devrait, une dixaine et une unité, par *dix-un*, une dixaine et deux unités par *dix-deux*, une dixaine et trois unités par *dix-trois*, une dixaine et quatre unités par *dix-quatre*, une dixaine et cinq unités par *dix-cinq*; enfin une dixaine et six unités par *dix-six*, on a inventé les mots *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*, dont on pouvait se passer; car on dit: *dix-sept*, pour énoncer une dixaine et sept unités; *dix-huit*, pour indiquer une dixaine et huit unités; enfin *dix-neuf*, pour une dixaine et neuf unités. Cependant, comme ces expressions vicieuses sont consacrées par l'usage, nous les conserverons, en nous contentant d'observer qu'elles ont le double inconvénient d'augmenter le nombre des mots, et de nuire à l'uniformité de la nomenclature (*).

On doit aussi observer que *dans les noms de nombres, le mot* UNITÉ *est toujours sous-entendu*; ainsi, vingt-sept exprime vingt-sept unités; trente vaut trente unités, etc.

Parvenu au nombre *nonante-neuf*, formé de neuf dixaines et de neuf unités, on lui ajouta une nouvelle unité, ce qui donna le nombre suivant, composé de neuf dixaines plus neuf unités plus une unité; mais neuf unités plus une unité, donnent une dixaine; le nombre nonante-neuf augmenté d'un, se compose donc de neuf dixaines plus une dixaine, c'est-à-dire, de dix dixaines. Or, de même que la collection de dix unités a formé une nouvelle espèce d'unités, nommée *dixaine*, de même la collection de dix dixaines a formé une nouvelle espèce d'unités nommée *centaine*, et le nombre composé d'une centaine a été nommé *cent*; ensorte que l'addition d'une nouvelle unité au nombre nonante-neuf, donne le nombre cent, composé de dix dixaines, ou d'une centaine; et de même qu'on avait compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on compta aussi depuis une centaine jusqu'à neuf centaines. Pour énoncer les nonante-neuf

(*) Par *nomenclature*, nous entendons ici le système des noms de nombres.

nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajouta successivement au nom de chaque nombre de centaines, ceux des nonante-neuf premiers nombres. Ajoutant donc successivement au nombre cent, les nombres, un, deux, trois, jusqu'à nonante-neuf, on forma les nombres

cent un, cent deux......, cent nonante-neuf.

A ce dernier nombre, composé d'une centaine et de nonante-neuf unités, on ajouta une nouvelle unité; on obtint un nouveau nombre, composé d'une centaine et de nonante-neuf unités plus une unité, ou de deux centaines; car nous avons vu que nonante-neuf unités plus une unité, donnaient une centaine. Or la collection de deux dixaines s'est nommée *vingt;* l'*analogie* conduirait donc à donner un nom particulier à la collection de deux centaines; mais on ne l'a point fait, pour ne pas compliquer la *nomenclature,* ce qui, d'ailleurs, eût présenté peu d'avantages. Ainsi les nombres composés, d'une centaine, de deux centaines, de trois centaines......, de neuf centaines, se nommèrent,

cent, deux cents, trois cents....., neuf cents.

Ajoutant successivement au nombre deux cents, les nombres un, deux..., nonante-neuf, on forma les nombres *deux cent un, deux cent deux..., deux cent nonante-neuf;* et de même que le nombre cent nonante-neuf, augmenté d'un, a donné le nombre deux cents, composé de deux centaines; de même le nombre deux cent nonante-neuf, augmenté d'un, donne un nombre, composé de trois centaines, nommé trois cents. En continuant le même système, et ajoutant successivement à chaque nombre de centaines, jusqu'à neuf centaines, les nonante-neuf premiers nombres, un, deux...., nonante-neuf, on parviendra enfin au nombre *neuf cent nonante-neuf*, composé de neuf centaines et de nonante-neuf unités.

Ajoutant une nouvelle unité au nombre neuf cent nonante-neuf, on obtint un nouveau nombre, composé de neuf centaines et de nonante-neuf unités plus une unité, c'est-à-dire de dix centaines; car nonante-neuf unités plus une unité, composent une centaine; or la collection de dix dixaines a formé une nouvelle

espèce d'unité nommée centaine : de même la collection de dix centaines forma une nouvelle espèce d'unité nommée *mille;* ensorte que le nombre neuf cent nonante-neuf, augmenté d'un, donna le nombre *mille*, composé de dix centaines; et de même qu'on avait compté depuis une centaine jusqu'à neuf centaines, on compta aussi depuis un mille jusqu'à neuf mille : pour énoncer les neuf cent nonante-neuf nombres compris entre deux mille consécutifs, on ajouta au nom de chaque nombre de mille, ceux des neuf cent nonante-neuf premiers nombres. On ajouta donc au nombre mille, tous les nombres qui le précèdent, c'est-à-dire, un, deux, trois....., jusqu'à neuf cent nonante-neuf, ce qui forma les nombres *mille un*, *mille deux*..., *mille neuf cent nonante-neuf;* à ce dernier nombre, composé d'un mille et de neuf cent nonante-neuf unités, on ajouta une nouvelle unité, ce qui forma le nombre *deux mille*, car neuf cent nonante-neuf, augmenté d'un, donne mille ; continuant le même système, et ajoutant successivement à chaque nombre de mille, les neuf cent nonante-neuf premiers nombres, qui sont, un, deux...., neuf cent nonante-neuf, on parvint enfin au nombre *neuf mille neuf cent nonante-neuf*, composé de neuf mille et de neuf cent nonante-neuf unités.

Le nombre neuf mille neuf cent nonante-neuf, augmenté d'un, donna un nouveau nombre composé de neuf mille et de neuf cent nonante-neuf plus un, ce qui fait en tout *dix mille*, car neuf cent nonante-neuf plus un fait mille ; or, puisque jusqu'ici l'assemblage de dix unités d'un certain ordre a reçu le nom d'une nouvelle unité, il paraîtrait convenable, pour conserver l'*analogie*, d'exprimer dix mille par un nouveau nom, à l'exemple des Grecs qui l'appelaient *myriade;* mais dans la vue de diminuer le nombre des noms, et surtout pour conserver l'uniformité des *tranches*, comme on le verra bientôt, on est convenu de compter depuis un mille jusqu'à *mille-mille*, qu'on a nommé *un million;* et de même qu'on avait compté par, unités dixaines centaines, d'unités, jusqu'à neuf cent nonante-neuf, on compta également par, unités dixaines centaines, de mille, jusqu'à neuf cent nonante-neuf mille. Quant aux nombres com-

pris entre deux mille consécutifs, on ajouta au nom des mille, les noms des unités, depuis un jusqu'à neuf cent nonante-neuf; ainsi, par exemple, pour trouver les noms des nombres compris entre deux cent vingt-six mille, et deux cent vingt-sept mille, on ajouta successivement au nom deux cent vingt-six mille, les noms, un, deux, jusqu'à neuf cent nonante-neuf, et l'on dit, *deux cent vingt-six mille un, deux cent vingt-six mille deux....,* jusqu'à *deux cent vingt-six mille neuf cent nonante-neuf;* ce dernier nombre, augmenté d'un, donna le nombre deux cent vingt-sept mille, auquel on appliqua la même méthode; et, continuant ce procédé, on parvint au nombre neuf cent nonante-neuf mille : on lui ajouta les noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres, ce qui conduisit enfin au nombre *neuf cent nonante-neuf mille neuf cent nonante-neuf:* ce dernier nombre augmenté d'un, donna un nouveau nombre, composé de mille-mille, que nous avons nommé *million.*

Par une suite du système précédent, qui consiste à ne jamais énoncer plus de neuf cent nonante-neuf unités d'un certain nom, on compta par, unités dixaines centaines, de millions; et la collection de mille millions fut nommée *billion;* celle de mille billions donna le *trillion;* et en continuant ces noms suivant la même loi, on nomma *quatrillion, quintillion, sextillion, septillion, octillion,* etc. l'assemblage de mille unités de l'ordre inférieur. Quant aux nombres compris entre un million et un billion, on composa leurs noms, en ajoutant successivement aux noms, un million, deux millions, trois millions....., neuf cent nonante-neuf millions, les noms un, deux...., neuf cent nonante-neuf mille neuf cent nonante-neuf. On parvint de même aux nombres compris entre un billion et un trillion, en ajoutant successivement aux noms un billion, deux billions, trois billions...., neuf cent nonante-neuf billions, les noms déjà connus, un, deux, trois...., neuf cent nonante-neuf millions neuf cent nonante-neuf mille neuf cent nonante-neuf; le dernier de ces nombres fut neuf cent nonante-neuf billions neuf cent nonante-neuf millions neuf cent nonante-neuf mille neuf cent nonante-neuf. En lui ajoutant une nouvelle unité, on forma le

nombre *un trillion*, composé de mille billions, et ainsi de suite.

6. Cette loi pouvant se continuer aussi loin qu'on voudra, nous avons résolu la première partie du problême de la numération, qui consiste à donner des noms à tous les nombres. On doit observer que *le nom d'un nombre ne dépend jamais que de la combinaison des noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres*, *avec les noms*, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, etc.; et comme neuf cent nonante-neuf se compose de neuf unités, de neuf dixaines et de neuf centaines, on doit en conclure que *l'énoncé d'un nombre n'exprime jamais plus que neuf unités*, *neuf dixaines et neuf centaines de chaque espèce*, ensorte que les mille, les millions, les billions, les trillions, etc. se comptent comme les unités, par unités, dixaines et centaines. Toutes ces observations nous seront utiles par la suite. Passons à la seconde partie du problême de la numération, où l'on donne les moyens d'écrire les nombres d'une manière plus abrégée et plus propre à leur calcul.

7. Les remarques faites sur les noms de nombres (n° 5, pag. 2) peuvent s'appliquer à leur écriture en chiffres; le moyen qui dut s'offrir le premier, comme le plus naturel, fut sans doute d'inventer un *signe* particulier pour chaque nombre; mais on s'aperçut bientôt, qu'en multipliant ainsi les *signes*, on mettait la mémoire dans l'impossibilité de les retenir, et que d'ailleurs, la complication qui en fût résultée, eût engendré des difficultés beaucoup plus grandes que celles qu'on cherchait à éviter. La manière d'écrire tous les mots, au moyen des diverses combinaisons d'un petit nombre de lettres, dut faire pressentir la possibilité de représenter tous les nombres avec très-peu de signes; on dut même prévoir que ces derniers, nommés *chiffres*, pourraient être en moindre nombre que les lettres; car ils ne doivent servir qu'à désigner une très-petite partie des mots exprimés par les lettres; *un chiffre est donc un signe particulier destiné à représenter une ou plusieurs unités de même espèce*.

8. L'objet des chiffres étant d'abréger l'écriture des nombres, il était très-naturel, et même indispensable de suivre dans l'invention des chiffres, la route déjà tracée par l'invention des mots;

autrement la numération écrite n'eût point été d'accord avec la numération parlée (*). Ainsi, de même qu'on n'avait inventé que neuf noms primitifs, pour désigner les neuf premiers nombres, de même on n'inventa que neuf chiffres différens pour les représenter; et comme les combinaisons de ces neuf noms simples avec les noms des différentes unités, avaient engendré les noms de tous les autres nombres, on dut chercher à soumettre les chiffres à la même loi, en exprimant par un même chiffre, comme on avait énoncé par un même nom, un même nombre, d'unités, de dixaines, de centaines, etc. Voici comment on y parvint,

9. On représenta d'abord les neuf premiers nombres.......

un, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*,

par les chiffres........

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

ce qui fournit le moyen de simplifier un peu l'écriture des nombres, en remplaçant les nombres d'unités, dixaines, centaines, de chaque ordre, par les chiffres qui les représentent : à cet effet, on décomposa le nombre proposé, en ses unités, dixaines et centaines de chaque espèce, et l'on remplaça le nom du nombre de ces unités, dixaines et centaines de chaque espèce, par le chiffre qui le représente; ce qui fut toujours possible; car l'énoncé ne peut jamais contenir plus que neuf unités, neuf dixaines, et neuf centaines de chaque espèce (n°. 6); ainsi, par exemple, ayant le nombre.......

neuf cent quarante-sept unités,

on observera qu'il se compose des neuf centaines, exprimées par neuf cents, des quatre dixaines, exprimées par quarante, enfin

---

(*) *La numération écrite est l'écriture des nombres par les chiffres; la numération parlée se compose des noms de nombres, ou, ce qui est la même chose, de leur écriture en lettres.* Nous prévenons donc, une fois pour toutes, que par *nombre énoncé*, nous entendrons toujours un nombre *dicté ou écrit en toutes lettres*, tandis que le *nombre écrit* sera toujours censé *exprimé par des chiffres:* ces observations sont utiles pour prévenir les erreurs souvent causées par l'obscurité du langage.

de sept unités, et que conséquemment on peut l'écrire de cette autre manière........,

neuf centaines, *quatre* dixaines, *sept* unités.

Substituant, dans cet énoncé, aux mots, *neuf*, *quatre*, *sept*; les chiffres, 9, 4, 7, qui les représentent, on verra que le nombre proposé peut s'écrire ainsi : ......

9 centaines, 4 dixaines, 7 unités.

Cette manière d'écrire le nombre proposé, n'est pas beaucoup plus abrégée que la première ; mais elle a le grand avantage de mieux mettre en évidence le nombre d'unités de chaque espèce, ce qui facilite infiniment les calculs. Prenons, pour 2[ème] exemple, le nombre.........

nonante-six mille, huit cent septante-trois.

Comme nonante-six valent neuf dixaines et six unités, les nonante-six mille, valent neuf dixaines de mille et six unités de mille ; mais huit cent septante-trois expriment huit centaines, sept dixaines et trois unités, le nombre énoncé est donc composé de *neuf* dixaines de mille, de *six* mille, de *huit* centaines, de *sept* dixaines et de *trois* unités ; il peut donc s'écrire comme on le voit ici........

neuf dixaines de mille, *six* mille, *huit* centaines, *sept* dixaines, *trois* unités.

Remplaçant les mots *neuf*, *six*, *huit*, *sept*, *trois* par les chiffres, 9, 6, 8, 7, 3, qui les représentent, on verra que le nombre énoncé peut s'écrire ainsi........

9 *dixaines de mille*, 6 *mille*, 8 *centaines*, 7 *dixaines*, 3 *unités*.

L'écriture du nombre.......... *soixante-seize*

pourrait peut-être embarrasser, car soixante valant six dixaines, on serait naturellement conduit à décomposer le nombre donné en

six dixaines et *seize* unités.

Sous cette forme, il serait impossible d'exprimer le nombre *seize*, des unités, car un chiffre ne peut représenter plus de neuf. Cette difficulté tient à ce que le nombre soixante-seize renferme plus de six dixaines, ensorte que le nombre de ses unités n'est réellement pas seize : en effet, seize valent dix unités plus six

unités, ou une dixaine et six unités; le nombre soixante-seize est donc réellement composé, des six dixaines de soixante, et des une dixaine plus six unités, de seize; il se compose donc de *sept* dixaines et de *six* unités, on doit donc l'écrire ainsi.........

7 dixaines, 6 *unités.*

On verrait de la même manière, que le nombre, quatre-vingt-dix-sept, ou nonante-sept, se compose de neuf dixaines et de sept unités, et que par conséquent il doit s'écrire, 9 dixaines 7 unités. Le nombre neuf cent sept, composé de neuf centaines et de sept unités, s'écrira, 9 centaines 7 unités. S'il s'agit du nombre........

neuf cent soixante-seize millions vingt-cinq unités.

Pour le décomposer en ses unités des différens ordres, on observera que neuf cent soixante-seize valant neuf centaines, plus sept dixaines, plus six unités, les neuf cent soixante-seize millions valent, neuf centaines plus sept dixaines plus six unités, de millions; et conséquemment le nombre énoncé, composé de *neuf* centaines de millions, de *sept* dixaines de millions, de *six* millions, de *deux* dixaines et de *cinq* unités, doit s'écrire....

9 *centaines de millions*, 7 *dixaines de millions*, 6 *millions*, 2 *dixaines*, 5 *unités.*

Ces exemples suffisent pour faire apercevoir la *possibilité d'écrire tous les nombres au moyen des seules combinaisons des neuf chiffres, avec les noms, unités, dixaines, centaines, mille, millions, billions, etc.*

10. La nécessité de soumettre les nombres à diverses opérations, dut bientôt faire apercevoir que le mélange des mots, *unités, dixaines, centaines, mille, millions, billions, etc.* avec les chiffres, alongeait excessivement l'écriture des nombres, et que par conséquent, il serait de la plus grande importance de faire disparaître les lettres; mais comment y parvenir? comment donner à un même chiffre, ces deux propriétés (contradictoires en apparence), de représenter constamment le même nombre d'unités, et d'indiquer en même temps leur espèce dif-

férente? Cette difficulté, d'autant plus grande qu'elle consistait en deux points, fut levée au moyen d'un *artifice* extrêmement ingénieux, dont je suppose que voici l'origine.

11. En réfléchissant sur la manière dont on écrit les mots, on dut s'apercevoir, comme nous l'avons déjà dit (page 8, n° 7), qu'on était parvenu à représenter une infinité de mots avec un petit nombre de lettres, en donnant à chaque lettre, outre sa valeur absolue, une valeur dépendante de sa position. L'*analogie* dut donc conduire à donner à chaque chiffre, outre sa valeur absolue, une valeur dépendante de sa position, ce qui conduisit au but, de la manière suivante :

Puisque, d'après le système exposé ci-dessus, les nombres peuvent se décomposer, en *unités dixaines* et *centaines* de chaque espèce, c'est-à-dire, en *unités dixaines* et *centaines* d'unités, en *unités dixaines* et *centaines*, de mille, en *unités dixaines* et *centaines*, de millions, etc. il était naturel de classer les noms de ces unités suivant leur rang. On le fit en effet; les unités simples furent nommées *unités du 1er ordre;* les dixaines, *unités du 2ème ordre;* les centaines, *unités du 3ème ordre;* les mille, *unités du 4ème ordre*, et ainsi de suite.

12. D'après ces conventions, le nombre traité dans le premier exemple du n° 9, peut s'écrire de ces trois manières....

Neuf cent quarante-sept unités.

9 *centaines*, 4 *dixaines*, 7 *unités.*

9 *unités du 3ème ordre*, 4 *unités du 2ème ordre*, 7 *unités du 1er ordre* (*).

(*) L'énoncé d'un nombre commençant par celui de ses plus hautes unités, il paraîtrait sans doute plus naturel de suivre le sens de l'écriture, qui va de gauche à droite, et d'appeler unités du 1er ordre les plus hautes unités d'un nombre, unités du 2eme ordre les unités immédiatement inférieures, et ainsi de suite : car alors, dans l'énoncé 9 *centaines* 4 *dixaines* et 7 *unités*, le 1er chiffre 9, au lieu d'exprimer des unités du 3eme ordre, exprimerait des unités du 1er ordre, le 2eme chiffre 4 exprimerait encore des unités du 2eme ordre; enfin le 3eme chiffre 7, au lieu d'exprimer des unités du 1er ordre, exprimerait des unités du 3eme ordre. Ce système serait en effet préférable, si la plus haute unité de tous les nombres était la même; mais comme elle varie dans chaque nombre, si on la choisissait pour point de départ, les rangs des

La dernière paraîtra sans doute la plus compliquée ; ce fut néanmoins celle qui fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres à côté les uns des autres, de manière que le rang de chacun indique l'ordre d'unités qu'il représente. *On convint donc que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le 1er, en partant de la droite, exprimerait des unités du 1er ordre, ou unités simples ; le 2ème, des unités du 2ème ordre, ou dixaines ; le 3ème, des unités du 3ème ordre, ou centaines ; le 4ème, des unités du 4ème ordre, ou mille ; le 5ème, des unités du 5ème ordre, ou dixaines de mille ;* et ainsi de suite à l'infini. Le nombre.....

neuf cent quarante-sept,

composé de 9 unités du 3ème ordre, de 4 unités du 2ème, et de 7 unités du 1er, peut donc s'écrire de cette manière infiniment abrégée........ 947 ;

car, en partant de la droite, et traduisant tout en unités simples, le 1er chiffre 7, vaut 7 unités du 1er ordre, c'est-à-dire, 7 unités ; le 2ème chiffre 4, vaut 4 unités du 2ème ordre, ou 4 dixaines, ou quarante unités ; enfin le 3ème chiffre 9, vaut 9 unités du 3ème ordre, c'est-à-dire, 9 centaines, ou neuf cents unités. L'assemblage 947, exprime donc effectivement le nombre donné. Dans le deuxième exemple du n° 9 (pag. 10), où il s'agissait du nombre

nonante-six mille, huit cent septante-trois,

composé de.......

9 *dixaines de mille*, 6 *mille*, 8 *centaines*, 7 *dixaines*, 3 *unités.*

Comme les unités, dixaines, centaines, mille et dixaines de mille, expriment respectivement des unités, du 1er ordre, du 2ème, du 3ème, du 4ème et du 5ème, il suffit d'écrire les uns à la suite des autres, en allant de droite à gauche, les 3, 7, 8, 6, 9,

---

unités, dixaines, centaines, etc. varieraient continuellement. Comme l'unité n'est pas sujette à cet inconvénient, en la prenant pour point de départ, les unités des ordres supérieurs conserveront constamment le même rang dans tous les nombres ; l'unité simple sera toujours du 1er ordre ; la dixaine, du 2ème ordre ; la centaine, du 3ème ; le mille, du 4ème ; la dixaine de mille, du 5ème, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

qui expriment le nombre d'unités de chaque ordre, car dans le nombre...... 96 873
qui en résultera, chaque chiffre occupera le rang qui convient à l'ordre de ses unités ; le 1er chiffre 3, exprimera 3 unités du 1er ordre, ou *trois unités;* le 2ème chiffre 7, exprimera 7 unités du 2ème ordre, ou sept dixaines, ou *septante unités ;* le 3ème chiffre 8, exprimera 8 unités du 3ème ordre, ou 8 centaines, ou *huit cents unités;* le 4ème chiffre 6, exprimera 6 unités du 4ème ordre, ou 6 mille, ou *six mille unités;* enfin le 5ème chiffre 9, exprimera 9 unités du 5ème ordre, ou 9 dixaines de mille, ou *nonante mille.* Réunissant ces cinq parties dans l'ordre inverse, qui est celui de l'énoncé, on verra que l'assemblage 96 873 est composé, de nonante mille, de six mille, de huit cents unités, de septante unités et de trois unités ; il représente donc effectivement le nombre énoncé *nonante-six mille, huit cent septante-trois.* Comme le sens de l'écriture, ou de l'énoncé, est de gauche à droite, il est beaucoup plus commode de commencer par la gauche : ainsi, dans notre exemple, on dira; les dixaines de mille, les mille, les centaines, les dixaines et les unités forment cinq classes d'unités qui sont respectivement, du 5ème ordre, du 4ème, du 3ème, du 2ème et du 1er ; il suffit donc d'écrire à la suite les uns des autres, en allant de gauche à droite, les chiffres 9, 6, 8, 7, 3; car, dans le résultat 96 873, chaque chiffre occupe le rang qui convient à l'ordre de ses unités. *Il sera facile d'écrire, en suivant le même système, les nombres qui contiennent des unités de chacun des ordres compris entre le premier et le dernier : à cet effet, on décomposera le nombre en ses unités des différens ordres, c'est-à-dire, en ses unités, dixaines, centaines, mille, millions, etc. ; suivant le sens de l'énoncé, on écrira successivement, en commençant par les plus hautes unités, les chiffres qui expriment le nombre d'unités de chaque ordre : ces chiffres ainsi disposés, occuperont le rang qui conviendra à l'ordre de leurs unités, et leur assemblage exprimera le nombre énoncé.*

13. Il existe beaucoup de nombres qui échappent à cette règle ; on ne saurait par son moyen écrire un nombre qui ne contiendrait pas tous les ordres d'unités inférieurs à l'ordre de ses

plus hautes unités. Tels sont, par exemple, *neuf cent sept*, qui contient 9 centaines et 7 unités, sans dixaines; *sept mille*, qui n'a ni centaines, ni dixaines, ni unités. Cette difficulté ne s'est pas présentée, lorsqu'on a écrit les noms de chaque ordre d'unités, parce qu'on pouvait alors omettre les noms des unités manquantes, sans altérer la valeur des autres unités ; mais une telle omission n'est plus permise, quand on veut écrire les nombres au moyen des chiffres, parce qu'alors le rang des chiffres peut seul déterminer l'ordre de leurs unités; ainsi le nombre *neuf cent sept*, qui contient 9 centaines et 7 unités, sans dixaines, a pu s'écrire, 9 *centaines* 7 *unités;* mais si l'on supprimait les noms *centaines* et *unités*, on le dénaturerait; car, dans le nombre 97, qui en résulterait, le 2ème chiffre 9 exprimerait 9 unités du 2ème ordre, ou 9 dixaines, tandis qu'il doit exprimer 9 centaines.

Si l'on réfléchit sur ce nouveau genre de difficulté, on sentira que le seul moyen de le surmonter était d'inventer un nouveau *signe* qui, n'ayant aucune valeur par lui-même, conservât aux autres chiffres le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Telle est l'origine et la nature du chiffre auxiliaire o, qui se nomme *zéro;* ainsi le *zéro, que l'on écrit* o, *est un chiffre auxiliaire qui n'a aucune valeur par lui-même, et qui sert seulement à conserver aux autres chiffres le rang qui convient à l'ordre de leurs unités.*

D'après cette nouvelle convention, pour écrire en chiffres le nombre *neuf cent sept*, qui contient 9 centaines et 7 unités, sans dixaines, on mettra un o, entre 9 et 7, pour occuper la place des dixaines, et l'on écrira 907. L'assemblage 907 exprime effectivement neuf cent sept; car le 3ème chiffre 9, vaut 9 unités du 3ème ordre, ou 9 centaines, ou neuf cents; le zéro indique l'absence des dixaines, et le 1er chiffre 7, vaut 7 unités du 1er ordre, ou sept. S'il s'agit du nombre *sept mille*, qui manque de centaines, de dixaines et d'unités; on remplacera ces trois ordres d'unités par autant de zéros, et l'on écrira 7000; par ce moyen, le 4ème chiffre 7, vaut 7 unités du 1er ordre, ou 7 mille, ou sept mille. S'il s'agissait du nombre.......

neuf cent septante-six millions, vingt-cinq unités;

composé, de 9 centaines de millions, de 7 dixaines de millions, de 6 millions, de 2 dixaines et de 5 unités; on écrirait les chiffres 9, 7, 6, 2, 5, qui expriment respectivement le nombre d'unités de chaque ordre, en ayant soin de mettre quatre zéros entre 6 et 2 pour tenir la place, des centaines de mille, des dixaines de mille, des mille et des centaines, qui manquent; ce qui donnerait 976 000 025.

14. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer pouvant s'appliquer à tous les nombres, nous en conclurons cette règle générale : *Pour écrire en chiffres, un nombre énoncé en toutes lettres, ou dicté, décomposez-le d'abord en ses unités, dixaines et centaines des différens ordres, de manière que le nombre d'unités et centaines de chaque ordre, n'excède jamais neuf. Commençant alors par la gauche, écrivez successivement les chiffres qui expriment le nombre d'unités, dixaines et centaines de chaque ordre, en ayant soin de mettre des zéros à la place des ordres qui pourraient manquer; arrivé aux unités, le nombre énoncé sera écrit en chiffres.* Ainsi, pour écrire en chiffres le nombre........

vingt-sept mille six cent quarante-huit.

On le décomposera d'abord en.......

2 *dixaines de mille*, 7 *mille*, 6 *centaines*, 4 *dixaines*, *et* 8 *unités.*

Comme les ordres d'unités inférieurs aux plus hautes unités, qui sont ici des dixaines de mille, se succèdent sans interruption, il suffit d'écrire à la suite les uns des autres les chiffres 2, 7, 6, 4, 8, qui expriment le nombre d'unités, dixaines et centaines de chaque ordre; car dans le nombre, 27 648, qui en résulte, la position de chaque chiffre, donne à ses unités le rang convenable; le 4ème chiffre 7, par exemple, représente 7 unités du 4ème ordre, ou 7 mille, comme l'énoncé l'exige; il en est de même des autres chiffres. S'il s'agissait du nombre......

Un million cinquante mille trois cents.

On le décomposerait d'abord en ses unités, dixaines et centaines des différens ordres, ce qui donnerait......

1 *million*, 5 *dixaines de mille*, 3 *centaines;*

et

et comme en descendant des millions aux unités, les unités des différens ordres se succèdent ainsi......

Million, centaine de mille, dixaine de mille, mille, centaine, dixaine, unité.

On voit que le nombre énoncé manque, de centaines de mille, d'unités de mille, de dixaines et d'unités; remplaçant ces unités manquantes par autant de zéros, j'écris...... 1 050 300; par ce moyen, le 7ème chiffre 1 vaut une unité du 7ème ordre, ou *un million;* le 5ème chiffre 5, vaut 5 unités du 5ème ordre, ou 5 dixaines de mille, ou *cinquante mille;* enfin le 3ème chiffre 3, vaut 3 unités du 3ème ordre, ou trois centaines, ou *trois cents;* la réunion de ces parties compose effectivement le nombre énoncé.

15. La solution du problème inverse n'offre aucune difficulté. *Pour énoncer en lettres un nombre écrit en chiffres, on déterminera d'abord le nom de l'espèce d'unité indiquée par chaque chiffre, en commençant par la droite, et énonçant, sur les chiffres du nombre donné, les noms unité, dixaine, centaine, mille, dixaine de mille, etc., ce qui fera connaître les noms des unités de chaque chiffre; commençant alors par la gauche, on énoncera chaque chiffre, en ayant égard au nom de ses unités; parvenu au dernier chiffre à droite, l'énoncé sera terminé.* Pour énoncer, par exemple, le nombre... 96 873; on prononcera sur ses chiffres 3, 7, 8, 6, 9, les noms, unité, dixaine, centaine, mille, dixaine de mille, qui conviennent au rang qu'ils occupent; commençant alors par la gauche, et faisant suivre le nom de chaque chiffre, du nom de ses unités, on trouvera que l'énoncé cherché est.... *neuf dixaines de mille, six mille, huit centaines, sept dixaines, trois unites.* S'il s'agissait du nombre 25 275 729 235 845; après avoir écrit sous chaque chiffre, le nom qui convient à l'espèce de ses unités, comme on le voit ici

2	5	2	7	5	7	2	9	2	3	5	8	4	5
dixaines de trillions.	TRILLIONS.	centaines de billions.	dixaines de billions.	BILLIONS.	centaines de millions.	dixaines de millions.	MILLIONS.	centaines de mille.	dixaines de mille.	MILLE.	centaines.	dixaines.	UNITÉS.

On reconnaîtra que l'énoncé demandé est ; *deux* dixaines de trillions, *cinq* trillions, *deux* centaines de billions, *sept* dixaines de billions, *cinq* billions, *sept* centaines de millions, *deux* dixaines de millions, *neuf* millions, *deux* centaines de mille, *trois* dixaines de mille, *cinq* mille, *huit* centaines, *quatre* dixaines et *cinq* unités.

16. Si l'on examine avec soin les deux énoncés précédens, on verra qu'ils ont une forme trop compliquée ; car nous avons vu (n° 6), que le nom d'un nombre ne dépendait jamais que de la combinaison des noms, des neuf cent nonante-neuf premiers nombres, avec les mots, unités, mille, millions, billions, etc. *L'énoncé d'un nombre écrit en chiffres ne doit donc dépendre que de l'énoncé des nombres de trois chiffres, et des noms, unités, mille, millions, etc.* Pour en convaincre, nous reprendrons le nombre

25 275 729 235 845,

que nous séparerons cette fois en *tranches de trois chiffres*, en partant de la droite, sauf à n'en laisser qu'un ou deux dans la dernière tranche à gauche ; et pour plus de clarté, nous mettrons sous chaque chiffre le nom de l'espèce d'unités qu'il représente, ce qui nous fournira le tableau suivant.....

2 5	2 7 5	7 2 9	2 3 5	8 4 5
dixaines unités	centaines dixaines unités	centaines dixaines unités	centaines dixaines unités	centaines dixaines unités
de trillions.	de billions.	de millions.	de mille.	de unités.

On voit que les trois chiffres de chaque tranche expriment tous, en allant de droite à gauche, des unités, dixaines et centaines de l'*ordre ternaire* (*) de la tranche à laquelle ils appar-

(*) On entend par *ordre ternaire*, la réunion des unités, dixaines et centaines de chaque tranche, ensorte que les noms des ordres ternaires sont

tiennent, et que cet ordre est indiqué par les noms, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions;* le nombre dont il s'agit ainsi décomposé en 25 trillions, 275 billions, 729 millions, 235 mille, 845 unités, peut donc s'énoncer de cette manière plus abrégée : *vingt-cinq* TRILLIONS, *deux cent septante-cinq* BILLIONS, *sept cent vingt-neuf* MILLIONS, *deux cent trente-cinq* MILLE, *huit cent quarante-cinq* UNITÉS.

S'il s'agissait du nombre 96873; après l'avoir partagé en deux tranches comme on le voit ici : 96 873; on reconnaîtrait qu'il se compose de 96 mille et de 873 unités; substituant, aux nombres 96 et 873, leurs énoncés, nonante-six et huit cent septante-trois, et supprimant le mot *unité*, toujours sous-entendu (n° 5, p. 4); on aurait enfin *nonante-six mille huit cent septante-trois* pour l'énoncé demandé, ce qui s'accorde parfaitement avec le second exemple du n° 12, où l'on a vu que cet énoncé était celui du nombre 96 873. Des décompositions analogues pouvant s'appliquer à tous les nombres, nous en déduirons cette règle générale, infiniment plus simple que celle du n° 15.

17. *Pour énoncer ou dicter un nombre quelconque écrit en chiffres, partagez-le d'abord en tranches de trois chiffres, en allant de droite à gauche, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche à gauche; commençant alors par la gauche, énoncez chaque tranche significative* (*) *comme si elle était seule, et donnez-lui le nom des unités de cette tranche. Ces unités sont de l'ordre du dernier chiffre à droite de la tranche qu'on considère, de façon qu'en allant de droite à gauche,*

---

déterminés par ceux des premiers chiffres à droite de chaque tranche de trois chiffres. Ainsi, en partant de la droite, le 1er ordre ternaire est celui des unités, le 2eme est celui des mille, le 3eme est celui des millions, le 4eme est celui des billions, le 5eme est celui des trillions, etc.

(*) Une *tranche significative* est celle qui contient un ou plusieurs chiffres significatifs : ainsi, par exemple, dans le nombre 27 000 008 900 000; les tranches significatives sont 27, 008, 900; les tranches 000, 000, qui ne contiennent que des zéros, ne sont pas significatives, car elles ne signifient rien par elles-mêmes, et ne servent qu'à conserver aux tranches significatives le rang qui leur convient.

les noms des tranches de trois chiffres, ou des ordres ternaires, se succèdent ainsi : unités, mille, millions, billions, trillions, quatrillions, quintillions, sextillions, etc. Parvenu à la dernière tranche significative à droite, le nombre écrit sera énoncé. Pour appliquer cette règle au nombre......

257 345 829 952 489 747 923;

on le partagera d'abord en tranches de trois chiffres, en allant de droite à gauche; et mettant sous chaque tranche le nom de ses unités, on formera ce tableau :

257	345	829	952	489	747	923
quintill.	quatrill.	trillions.	billions.	millions.	mille.	unités.

Commençant par la gauche, et énonçant chaque tranche comme si elle était seule, en lui donnant le nom de ses unités, on verra que le nombre proposé s'énonce......

Deux cent cinquante-sept QUINTILLIONS, *trois cent quarante-cinq* QUATRILLIONS, *huit cent vingt-neuf* TRILLIONS, *neuf cent cinquante-deux* BILLIONS, *quatre cent octante-neuf* MILLIONS, *sept cent quarante-sept* MILLE, *neuf cent vingt-trois* UNITÉS.

L'énoncé d'un nombre quelconque ne dépendant jamais que de celui de nombres de trois chiffres au plus, nous allons examiner quelques petites difficultés qui peuvent s'offrir dans l'énoncé des tranches de trois chiffres; et à cet effet, nous choisirons le nombre 20 027 003 410 500 000 428, que nous partagerons ainsi en sept tranches......

20	027	003	410	500	000	428
quintill.	quatrill.	trillions.	billions.	millions.	mille.	unités.

Commençons par la gauche, et voyons comment on doit énoncer chaque tranche : la 1ère, qui contient le nombre 20, vaut *vingt* quintillions; la 2ème, 027, vaut *vingt-sept* quatrillions, car le zéro placé au rang des centaines, indique qu'il n'y a point de centaines; par une raison semblable, la 3ème tranche 003 vaut *trois* trillions, car les zéros placés aux rangs des dixaines et des centaines, indiquent qu'il n'y en a point; les

tranches 410 et 500 ont pour énoncés *quatre cent dix* billions et *cinq cent* millions ; les trois zéros qui composent la tranche des mille, indiquent que le nombre proposé ne contient pas de mille, on doit donc omettre le nom de cette tranche dans l'énoncé du nombre proposé ; enfin la dernière tranche 428 s'énonce, *quatre cent vingt-huit*. D'après ces observations, le nombre donné doit s'énoncer : *vingt* QUINTILLIONS, *vingt-sept* QUATRILLIONS, *trois* TRILLIONS, *quatre cent dix* BILLIONS, *cinq cent* MILLIONS, *quatre cent vingt-huit* UNITÉS.

18. La règle précédente devrait s'appliquer aux énoncés de tous les nombres, mais l'habitude a consacré quelques exceptions vicieuses que nous allons expliquer au moyen d'exemples : Soit proposé d'énoncer le nombre 1124, au lieu de dire, *mille cent vingt-quatre*, comme on le devrait, on prononce *onze cent vingt-quatre*. Ce dernier énoncé est vicieux, comme contraire à l'uniformité de la nomenclature, qui veut qu'on ne compte pas plus de neuf centaines ; mais cependant il exprime aussi le nombre donné, car onze centaines valant un mille et une centaine, *mille cent* et *onze cents* expriment le même nombre. Par une raison semblable, au lieu de dire : *mille deux cents, mille trois cents, mille quatre cents, mille cinq cents, mille six cents, mille sept cents, mille huit cents, mille neuf cents*, on prononce plus communément : *douze cents, treize cents, quatorze cents, quinze cents, seize cents, dix-sept cents, dix-huit cents, dix-neuf cents*. Par exemple, le nombre 1829, qui devrait s'énoncer mille huit cent vingt-neuf, s'énonce plus communément, dix-huit cent vingt-neuf. Mais, passé dix-neuf centaines, l'exception cesse ; 2372 se prononce deux mille trois cent septante-deux, et non pas *vingt-trois cent septante-deux*. Il n'y a pas d'autres exceptions.

19. Si l'on examine attentivement la règle du nº 14, on s'apercevra qu'elle a le désavantage d'exiger la transformation de l'énoncé, en énoncés partiels de nombres d'un seul chiffre, ce qui décompose le nombre donné en ses unités, dixaines et centaines de chaque espèce. Cette décomposition est inutile ; on peut écrire directement les nombres énoncés, il suffit pour cela

d'appliquer la règle suivante, qui n'est qu'une conséquence de celle du n° 17. *Pour mettre en chiffres un nombre énoncé en toutes lettres, ou dicté, écrivez successivement à côte les uns des autres, et en commençant par la gauche, les chiffres qui marquent les nombres de centaines, dixaines et unités de chaque ordre ternaire énoncé; remplacez par des zéros celles de ces unités, dixaines et centaines qui pourraient manquer, et mettez une tranche de trois zéros à chaque ordre d'unités ternaire, dont le nom peut être omis dans l'énoncé proposé. Parvenu à la tranche des unités, le nombre énoncé sera écrit. Comme on peut supprimer les zéros qui se trouvent sur la gauche de la première tranche à gauche, il est plus commode dans la pratique, d'écrire directement le premier nombre énoncé, qui peut alors contenir moins de trois chiffres. On doit bien se rappeler que les noms des ordres d'unités ternaires se succèdent ainsi, en allant de droite à gauche : unités, mille, millions, billions, trillions, quatrillions, etc.* Appliquons cette règle à quelques exemples, et proposons-nous d'abord d'écrire en chiffres le nombre, vingt-cinq *trillions*, deux cent septante-cinq *billions*, sept cent vingt-neuf *millions*, deux cent trente-cinq *mille*, huit cent quarante-cinq *unités*, les plus hautes unités de ce nombre étant des trillions, et les unités des ordres ternaires inférieurs se succédant sans interruption, il est facile de voir qu'il suffit d'écrire à la suite les uns des autres, les nombres d'unités de chaque ordre ternaire, ce qui donnera 25 275 729 235 845. Prenons pour second exemple le nombre, vingt *quintillions*, vingt-sept *quatrillions*, trois *trillions*, quatre cent dix *billions*, cinq cent *millions*, quatre cent vingt-huit *unités*. Voici comment il s'écrira en chiffres :

20	027	003	410	500	000	428
quintill.	quatrill.	trillions.	billions.	millions.	mille.	unités.

En effet, comme les plus hautes unités de ce nombre sont des quintillions, on aura nécessairement sept tranches, dont voici les noms......

quintillions, quatrillions, trillions, billions, millions, mille, unités.

Posant donc à chacune de ces tranches les centaines, dixaines et unités énoncées; remplaçant celles qui manquent, par des zéros, et commençant par la gauche, on mettra; 1°. 20 à la première tranche à gauche, qui sera suivie de six autres tranches, et exprimera alors les vingt quintillions énoncés; 2°. l'énoncé du nombre indiquant ensuite 27 quatrillions, on remplacera les centaines de quatrillions qui manquent, par un zéro, ce qui donnera 027 pour la tranche des quatrillions; 3°. le nombre ne contenant que trois unités de trillions, on doit remplacer les dixaines et centaines de trillions qui manquent, par des zéros, ce qui donne 003 pour la tranche des trillions; 4°. d'après l'énoncé, on doit mettre 410 à la tranche des billions, et 500 à celle des millions; 5°. la tranche des millions doit être suivie de celle des mille, mais l'énoncé du nombre ne contient pas de mille, on doit donc poser trois zéros à la tranche des mille, afin de conserver aux tranches déjà écrites, le rang qu'elles doivent occuper; 6°. la dernière tranche contient 428 unités. Écrivant donc à la suite les unes des autres, les tranches 20, 027, 003, 410, 500, 000, 428, que nous venons de former, on aura 20 027 003 410 500 000 428, pour l'écriture en chiffres du nombre donné. S'il fallait écrire en chiffres le nombre......

vingt-sept trillions onze mille onze,

on poserait d'abord ses plus hautes unités, dont le nombre est 27; la tranche des trillions doit être suivie de celle des billions, de celle des millions, puis de celle des mille, enfin de celle des unités; mais les billions et les millions n'entrent point dans l'énoncé; on doit donc poser trois zéros, pour occuper la place de chacune de ces deux tranches, ensorte qu'il doit y avoir six zéros entre 27 et les mille; la tranche des mille est 011, le zéro occupe la place des centaines de mille qui manquent; enfin, la tranche des unités est 011; ensorte que le nombre énoncé doit s'écrire......

27 000 000 011 011.

On trouvera de la même manière que les énoncés; trente mille trente; sept mille vingt-sept; trente-sept billions dix mille; trois

millions; expriment les nombres 30 030; 7 027; 37 000 010 000; 3 000 000.

20. Les expressions vicieuses indiquées dans le n° 18, (p. 21); donnent lieu à quelques difficultés que nous allons lever. Proposons-nous d'abord d'écrire en chiffres le nombre *dix-sept cent quarante-huit*, composé de dix-sept centaines et de quarante-huit unités; nous observerons que dix centaines, valant un mille, les dix-sept centaines, valent un mille et sept centaines; le nombre proposé, vaut donc un mille et sept cent quarante-huit unités; il doit donc s'écrire, 1 748. Des décompositions analogues feront voir que les énoncés, treize cent vingt-sept millions, et dix-neuf cent quatre-vingt-mille sept, appartiennent aux nombres 13 27 000 000, et 980 007.

21. *Si l'on a bien compris ce qui précède, on pourra toujours mettre en chiffres un nombre dicté ou énoncé en toutes lettres* (n° 19), *et réciproquement énoncer en toutes lettres, ou dicter un nombre écrit en chiffres* (n° 17). J'engage les commençans à s'exercer sur un grand nombre d'exemples, afin de graver dans leur mémoire, les noms des tranches, ainsi que l'ordre dans lequel elles se succèdent; en voici le tableau, prolongé au-delà des usages ordinaires.

Unités.	Mille.	Millions.	Billions.	Trillions.	Quatrillions.
1ère tranche.	2ème.	3ème.	4ème.	5ème	6ème.

Ces noms sont ceux des tranches comptées de droite à gauche; mais comme l'énoncé suit l'ordre inverse, et commence par le nom des plus hautes unités, on doit s'accoutumer à descendre de ce nom à celui des unités simples.

La comparaison de l'écriture d'un même nombre, en lettres et en chiffres, doit convaincre de la beauté de notre système de numération, et des grands avantages qui doivent résulter de l'invention des chiffres.

22. Notre numération a reçu le nom de *numération décuple*; et notre système, celui de *système décimal*, par la raison que nous employons dix chiffres, et que les mots et les chiffres ex-

priment des nombres de dix en dix fois plus grands ; dix unités valent une dixaine, dix dixaines valent une centaine, dix centaines valent un mille, et en général, *lorsqu'on va de la droite d'un nombre vers la gauche, dix unités d'un certain ordre en valent une de l'ordre suivant, et les chiffres expriment successivement des unités de dix en dix fois plus grandes.* On eût sans doute pu choisir tout autre nombre que dix (*) ; mais il paraît que la préférence qu'on lui a donnée vient du nombre de nos doigts ; le nombre dix, s'appelle la *base* de notre système de numération.

Lorsqu'on n'a pour but que d'énoncer un nombre, on le partage en tranches de trois chiffres (n° 17) ; mais comme il est quelquefois utile de le partager autrement, nous allons faire connaître la manière d'effectuer ces décompositions. Voici la règle générale, analogue à celle du n° 17.

23. *Pour énoncer un nombre écrit partagé en tranches quelconques, il suffit, en partant de la première tranche à gauche, d'énoncer chaque tranche significative, comme si elle était seule, et de lui donner le nom de l'espèce d'unités de son dernier chiffre à droite ; parvenu à la dernière tranche significative, le nombre écrit sera énoncé. Observez bien que le nom de l'espèce d'unités du dernier chiffre à droite de chaque tranche s'obtient en commençant par la droite, et prononçant sur les chiffres du nombre donné, les noms, unités, dixaines, centaines, mille, etc., jusqu'au premier chiffre à droite de la dernière tranche.* D'après cette règle, le nombre 12345 peut se décomposer, en une dixaine de mille et 2345 unités, en 12 mille et 345 unités, en 123 centaines et 45 unités, enfin en 1234 dixaines et 5 unités. Si le nombre 23 49 00 56 000 797 800 était partagé, comme on le voit ici : . . . .

2349 | 00 | 56 | 000 | 7978 | 00

on prononcerait sur ses chiffres, en commençant par la droite,

---

(*) On verra par la suite, que le *système duodécimal*, composé de douze chiffres, eût présenté beaucoup plus d'avantages ; un peuple *sexdigitaire* l'eût sans doute inventé.

les mots, unités, dixaines, centaines, etc. jusqu'au premier chiffre 9 de la dernière tranche 2349, sur lequel on prononcerait le mot, *dixaines de trillions;* et comme on aurait prononcé sur les premiers chiffres, 6 et 8 des deux autres tranches significatives 56 et 7978, les mots *billions* et *centaines*, on en conclurait que le nombre donné, ainsi décomposé, a pour énoncé

2349 *dixaines de trillions* 56 *billions* 7978 *centaines.*

24. Lorsqu'on considère un nombre, en faisant *abstraction* de la nature de ses unités, on dit pour cette raison, qu'il est *abstrait;* ainsi, trois, cinq, cent, deux cent vingt-neuf, trois fois, cinq fois, dix-neuf fois, sont des *nombres abstraits;* lorsqu'au contraire, on désigne l'espèce des unités dont un nombre est composé, on dit qu'il est *concrèt;* ainsi, dix-sept hommes, cinq ans, sept toises, douze arbres, sont des *nombres concrèts*, parce qu'on désigne l'espèce de leurs unités. On dit en conséquence, que les nombres 12, 27, etc. sont abstraits et composés d'unités abstraites; mais 12 toises est un nombre concrèt dont l'unité concrète est la toise; 17 heures est un nombre concrèt dont l'unité concrète est l'heure.

25. Actuellement que nous avons fait connaître notre système de numération, il nous reste à exposer les diverses opérations que l'on peut faire sur les nombres, ce qui constitue leur CALCUL. Nous traiterons d'abord des nombres abstraits; nous en déduirons ensuite, comment on doit opérer sur les nombres concrèts; on verra que *toutes les opérations de l'arithmétique sur les nombres ne dépendent que de celles sur les nombres abstraits d'un seul chiffre.*

Je dois prévenir qu'un chiffre qui *signifie* quelque chose par lui même, s'appelle *chiffre significatif;* ainsi, de nos dix chiffres, le zéro, ou o, est le seul qui ne soit pas significatif; parconséquent *nos chiffres significatifs sont*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ADDITION.

26. L'ASSEMBLAGE de plusieurs unités, de même grandeur et de même nature, a formé le nombre; la réunion de plusieurs nombres composés d'unités de même nature, engendre une opération nommée *addition*. D'après cela, *le but de l'*ADDITION *est d'obtenir un nombre qui contienne à lui seul toutes les unités de plusieurs autres nombres; ce nombre se nomme leur somme ou leur total.*

Voici ce qui résulte de cette définition. 1°. *Les nombres qu'on ajoute doivent être composés d'unités de même espèce;* car il serait absurde d'ajouter 5 heures à 5 toises, ou 7 hommes à 4 années. 2°. *La nature des unités de la somme est la même que celle des unités des nombres ajoutés;* ainsi, des toises ajoutées à des toises donnent des toises, des heures ajoutées à des heures donnent des heures, etc.

27. *L'addition de deux nombres d'un seul chiffre* n'offre aucune difficulté. Par exemple, pour ajouter 4 avec 3, on observera que la somme doit se composer de toutes les unités de ces deux nombres; elle s'obtiendra donc également, soit en ajoutant quatre fois l'unité à 3, de cette manière, 3 et 1 font 4, 4 et 1 font 5, 5 et 1 font 6, 6 et 1 font 7; soit en ajoutant trois fois l'unité à 4, de cette manière, 4 et 1 font 5, 5 et 1 font 6, 6 et 1 font 7. Ainsi, dans tel ordre qu'on effectue l'addition des nombres 3 et 4, on trouve 7 pour leur somme: on verra de même; que 7 plus 9, ou 9 plus 7, donnent également 16; que 7 plus 5, ou 5 plus 7, donnent également 12, et ainsi de suite.

28. Cette propriété est générale. *L'ordre dans lequel on additionne plusieurs nombres est indifférent*, parce que le résultat contient, dans tous les cas, la réunion des unités des mêmes nombres.

29. *L'addition d'un nombre d'un seul chiffre avec un nombre de plusieurs chiffres*, pourrait s'effectuer de la même manière,

dans un ordre quelconque, en ajoutant successivement toutes les unités de l'un des nombres à celles de l'autre ; mais il est plus court d'ajouter au plus grand nombre, toutes les unités du plus petit ; ainsi, pour former la somme des nombres 4 et 17, il est plus simple d'ajouter 4 fois l'unité à 17, que d'ajouter 17 fois l'unité à 4 ; on trouve dans les deux cas, 21 pour somme. Ces sortes d'additions ne peuvent jamais offrir de difficultés ; car il suffit, pour les effectuer, de connaître la série des nombres entiers. Ainsi 21 plus 7, donnent 28 pour somme, 15 plus 9, donnent 24, etc.

30. *L'addition de plusieurs nombres d'un seul chiffre, se déduit immédiatement de ce qui précède ; il suffit d'ajouter le 3ème nombre à la somme des deux premiers, puis le 4ème nombre à cette dernière somme, et ainsi de suite jusqu'au dernier ; la dernière somme sera celle des nombres donnés.* Par exemple, pour trouver la somme des quatre nombres 2, 4, 5, 7 ; on ajoutera d'abord, 4 à 2, ce qui donnera 6 ; à ce dernier nombre, on ajoutera 5, ce qui donnera 11 ; enfin, 11 augmenté de 7, donnera 18, pour la somme des quatre nombres, 2, 4, 5, 7 ; on aperçoit aisément, que 18 se compose en effet de toutes les unités des nombres 2, 4, 5, 7 ; car à 6, qui contenait toutes les unités des deux premiers nombres 2 et 4, on a ajouté les cinq unités du 3ème nombre 5 ; le résultat 11 renfermait donc toutes les unités des trois premiers nombres 2, 4, 5 ; conséquemment, en lui ajoutant les sept unités du 4ème nombre 7, le nombre 18, qui en résulte, se compose de toutes les unités des quatre nombres 2, 4, 5, 7 ; il est donc leur somme. Dans tel ordre qu'on effectue l'addition des mêmes nombres 2, 4, 5, 7, on trouvera la même somme 18. S'il s'agit d'obtenir la somme des nombres 8, 3, 5, 7, 6, 4, on dira ; 8 et 3 valent 11, 11 et 5 font 16, 16 et 7 font 23, 23 et 6 font 29, 29 et 4 font 33 ; ce dernier nombre est la somme cherchée.

Pour abréger le discours, on ne répète pas deux fois la somme des nombres déjà ajoutés ; ainsi, dans l'exemple précédent, on dit seulement, 8 et 3 font 11 et 5 font 16 et 7 font 23 et 6 font 29 et 4 font 33. On trouvera de la même manière, que la somme

des nombres, 5, 7, 8, 9, 4, 3, 2, est 38, que celle des nombres 9, 8, 8, 7, 7, 6, 4, 1, est 50, et ainsi de suite.

31. *L'addition de deux nombres composés de plusieurs chiffres*, pourrait s'effectuer de la même manière ; ainsi, par exemple, la somme 79, des nombres 42 et 37, s'obtiendrait également, en ajoutant 37 fois l'unité à 42, ou 42 fois l'unité à 37 ; mais on aperçoit aisément, que si les deux nombres donnés étaient très-grands, l'opération deviendrait excessivement longue, dans quelqu'ordre qu'on l'effectuât ; car elle exigerait au moins autant d'additions partielles qu'il y a d'unités dans le plus petit nombre ; on a dû chercher à la simplifier, en la faisant dépendre d'additions partielles de nombres d'un seul chiffre, on y est parvenu de la manière suivante. Comme la somme des nombres 42 et 37 doit renfermer toutes leurs parties, elle se composera nécessairement, des 40 unités et 2 unités contenues dans 42, plus des 30 unités et 7 unités contenues dans 37, ou, ce qui revient au même, de 4 dixaines plus 2 unités, et de 3 dixaines plus 7 unités ; mais l'ordre dans lequel on additionne plusieurs nombres, est indifférent ; on peut donc mettre les dixaines à côté des dixaines, et les unités à côté des unités ; alors la somme cherchée, composée de 4 dixaines plus 3 dixaines, ou 7 dixaines, et de 2 unités plus 7 unités, ou 9 unités, sera 7 dixaines et 9 unités, ou 79 : on voit qu'elle peut s'obtenir, en ajoutant successivement les unités avec les unités, et les dixaines avec les dixaines, ce qui abrège beaucoup l'opération. On démontrerait de la même manière, que, pour former la somme des nombres 324 et 252, il suffit, après avoir décomposé ces nombres en leurs unités dixaines et centaines, d'ajouter séparément leurs unités de même espèce, ce qui s'effectuerait en disant : 3 centaines et 2 centaines font 5 centaines, 2 dixaines et 5 dixaines font 7 dixaines, 4 unités et 2 unités font 6 unités ; la somme cherchée, composée de 5 centaines de 7 dixaines et de 6 unités, est par conséquent 576.

32. Cette manière d'opérer s'étend à tous les nombres ; en effet, la somme de plusieurs nombres doit évidemment contenir toutes leurs parties, et conséquemment toutes leurs unités, toutes leurs dixaines, toutes leurs centaines, etc. ; mais l'ordre dans le-

quel on additionne est indifférent : on peut donc ajouter séparément les unités du même ordre, c'est-à-dire, les unités avec les unités, les dixaines avec les dixaines, les centaines avec les centaines, etc. ; l'addition totale se trouve ainsi décomposée en additions partielles de nombres d'un seul chiffre, et la réunion de ces sommes partielles compose la somme totale. Par exemple, s'il s'agit d'obtenir la somme des trois nombres 598, 979, 757; comme on doit ajouter séparément les unités du même ordre, il est naturel, pour effectuer le calcul avec plus de facilité, de disposer les nombres les uns sous les autres, de manière que leurs unités dixaines et centaines, se trouvent respectivement dans les mêmes colonnes ; la somme se place sous les nombres ; on l'en sépare par un trait, comme on le voit ici :

Nombres à ajouter.....	598
	979
	757
Somme........	2 334

Commençant l'addition par la colonne des unités (*), on dira : 8 unités et 9 unités font 17 unités ; 17 unités et 7 unités font 24 unités, ou 2 dixaines plus 4 unités : posant donc les 4 unités sous la colonne des unités, on retiendra les 2 dixaines de surplus pour les joindre à la colonne des dixaines, et l'on dira : 2 dixaines retenues et 9 dixaines font 11 dixaines, 11 dixaines et 7 dixaines font 18 dixaines, 18 dixaines et 5 dixaines font 23 dixaines, ou 2 centaines plus 3 dixaines. Je pose donc

(*) Pour effectuer l'addition, il est plus commode de commencer par la droite, c'est-à-dire, par la colonne des unités ; la raison en est qu'en allant de droite à gauche, dix unités d'un certain ordre en formant toujours une de l'ordre suivant (*voyez* pag. 25, n° 22), quand la somme des unités d'une colonne surpasse 9, c'est-à-dire, lorsqu'elle contient des unités et des dixaines, on pose les unités au résultat, et l'on retient les dixaines pour les joindre à la colonne suivante. De cette manière, l'addition de chaque colonne donne un chiffre du résultat, ce qui n'aurait pas toujours lieu en commençant par la gauche ; car alors, si dans le cours de l'opération, une colonne renfermait plus de 9 unités de son ordre, comme on ne peut jamais poser un chiffre plus

3 au rang des dixaines du résultat, et je retiens 2 centaines pour les joindre à la colonne des centaines; je dis alors, 2 centaines retenues et 5 centaines font 7 centaines, 7 centaines et 9 centaines font 16 centaines, 16 centaines et 7 centaines font 23 centaines, ou 2 mille et 3 centaines, j'écris donc 3 sous les centaines; comme l'addition est finie, je pose les 2 mille au rang des mille du résultat, et j'ai 2334 pour la somme demandée. Les raisonnemens précédens pouvant s'appliquer à tous les exemples, nous en déduirons cette règle générale : ....

33. *Pour additionner plusieurs nombres, il faut les placer les uns sous les autres, en ayant soin que toutes leurs unités de même ordre se trouvent dans une même colonne verticale; les unités sont alors sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, etc.; on place ensuite un trait sous ces nombres, pour les séparer du résultat, qu'on posera dessous. L'opération ainsi disposée, pour l'exécuter; on fait une somme des nombres contenus dans la colonne des unités; si cette somme n'excède pas 9, on l'écrit au résultat sous la colonne des unités; si elle surpasse 9, on n'écrit que les unités, et on retient les dixaines pour les joindre à la colonne des dixaines, sur laquelle on opère de la même manière, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la dernière colonne à gauche, dont on pose la somme telle qu'on la trouve, ce qui termine l'addition. Lorsqu'une somme partielle ne contient que des dixaines sans unités, on a soin de mettre un zéro sous la colonne qui l'a*

---

grand que 9, il faudrait écrire seulement les unités, et ajouter les dixaines de surplus au chiffre déjà placé sous la colonne précédente, ce qui ne pourrait se faire qu'en changeant ce chiffre; et si le nouveau nombre était lui-même plus grand que 9, il faudrait encore changer le chiffre précédent, et ainsi de suite. Par exemple, si pour ajouter les nombres 598, 979, 757, on commençait par la gauche, c'est-à-dire, par les centaines, on trouverait 21 centaines, 21 dixaines et 24 unités; mais 21 centaines valent 2 mille et 1 centaine, 21 dixaines valent 2 centaines et 1 dixaine, enfin 24 unités valent 2 dixaines et 4 unités; réunissant les unités de même grandeur, on verrait que le nombre proposé contient 2 mille, 3 centaines, 3 dixaines et 4 unités; il est donc 2334. Ce procédé conduit au même résultat, mais comme il est beaucoup plus compliqué, *on doit toujours commencer l'addition par la droite.*

fournie, pour tenir la place des unités de cette colonne, et conserver aux chiffres du résultat, le rang qui convient à la nature de leurs unités. On doit bien observer que la somme totale se compose de la réunion des sommes partielles des unités des différens ordres, contenues dans les nombres donnés. Appliquons cette règle à l'addition des cinq nombres, 7675, 439, 78, 4578, 9845, nous disposerons le calcul comme on le voit ici :

Nombres à ajouter.....	7 675
	439
	78
	4 578
	9 845
Somme.......	22 615

Et commençant par la colonne des unités, nous dirons, en allant de haut en bas; 5 unités et 9 unités font 14 unités, 14 unités et 8 unités font 22 unités, 22 unités et 8 unités font 30 unités, 30 unités et 5 unités font 35 unités, ou 3 dixaines plus 5 unités; j'écris les 5 unités au résultat, et je retiens les trois dixaines pour les joindre à la colonne des dixaines ; passant à cette colonne, je dis, 3 dixaines retenues et 7 dixaines font 10 dixaines, 10 dixaines et 3 dixaines font 13 dixaines, 13 dixaines et 7 dixaines font 20 dixaines, 20 dixaines et 7 dixaines donnent 27 dixaines, enfin 27 dixaines et 4 dixaines font 31 dixaines, c'est-à-dire, 3 centaines plus une dixaine ; j'écris donc 1 sous la colonne des dixaines, et je retiens les 3 centaines pour les joindre à la colonne des centaines; je dis ensuite, 3 centaines retenues et 6 centaines font 9 centaines, 9 centaines et 4 centaines font 13 centaines, 13 centaines et 5 centaines font 18 centaines, 18 centaines et 8 centaines font 26 centaines, ou 2 mille plus 6 centaines; j'écris donc 6 au rang des centaines du résultat, et je retiens les 2 mille pour les joindre à la colonne des mille ; je dis alors, 2 mille retenus et 7 mille font 9 mille, 9 mille et 4 mille font 13 mille, 13 mille et 9 mille font 22 mille, ou 2 dixaines de mille plus 2 mille ; je pose donc 2 au rang des mille

mille du résultat, et comme l'addition est terminée, j'avance les 2 dixaines de mille, ce qui me donne 22 615 pour la somme des nombres proposés.

34. Je dois observer que, *dans la pratique, on se dispense de répéter continuellement le nom de l'espèce des unités sur lesquelles on opère*, ce qui revient à additionner chaque colonne comme si elle exprimait des unités simples, et dans cette addition on profite de l'abréviation indiquée dans le n° 30, (page 28), en ne répetant pas deux fois la somme des chiffres déjà ajoutés; de sorte que l'addition précédente s'effectue en disant; 5 et 9 font 14 et 8 font 22 et 8 font 30 et 5 font 35, je pose 5 et je retiens 3; 3 de retenue et 7 font 10 et 3 font 13 et 7 font 20 et 7 font 27 et 4 font 31, je pose 1 et je retiens 3; 3 et 6 font 9 et 4 font 13 et 5 font 18 et 8 font 26, je pose 6 et je retiens 2; 2 et 7 font 9 et 4 font 13 et 9 font 22, je pose 2 et j'avance 2; l'addition est terminée, et j'ai 22 615 pour la somme demandée.

35. Je terminerai l'addition en observant que *si l'on a beaucoup de nombres à ajouter, on peut faciliter le calcul par la décomposition de l'addition totale en additions partielles; la réunion des sommes partielles composera la somme demandée*. L'exemple suivant, quoique simple, suffira pour faire connaître la marche à suivre quand il y a plus de nombres; soit proposé d'ajouter les cinq nombres 27, 34, 23, 124, 724; si l'on fait la somme des trois premiers nombres et celle des deux derniers, on trouvera 84 pour la première, et 848 pour la seconde; la réunion de ces deux sommes partielles donnera 932 pour la somme des nombres proposés; cela est évident. On parviendrait au même résultat, en additionnant directement les cinq nombres proposés dans un ordre quelconque.

36. *L'addition donne le moyen de mettre en chiffres un nombre écrit en toutes lettres, dont l'énoncé contient des noms différens de ceux des ordres ternaires, unité, mille, million, etc. On convertit à cet effet les unités de chaque espèce en unités simples; la somme de ces unités est l'écriture en chiffres du nombre énoncé.* (Cette règle est l'inverse de celle du n° 23). S'il s'agit, par

exemple, du nombre, cent vingt-trois centaines quarante-cinq unités, on convertira ces 123 centaines en 12 300 unités; ces 12 300 unités, ajoutées aux 45 unités énoncées, donneront 12 345 pour l'écriture en chiffres du nombre énoncé; on trouverait avec la même facilité que les deux énoncés, une dixaine de mille plus deux mille trois cent quarante-cinq unités, et douze cent trente-quatre dixaines plus cinq unités, appartiennent au même nombre 12 345. Ces exemples vérifient l'exactitude des résultats obtenus dans le n° 23; *on doit remarquer qu'un même nombre peut avoir des énoncés différens, mais qu'il ne peut s'écrire que d'une seule manière en chiffres.*

La règle précédente donne aussi le moyen d'écrire en chiffres des nombres dont les énoncés absolument vicieux pourraient induire en erreur. On convertit à cet effet les unités de chaque espèce en unités simples; la somme de ces unités est l'écriture en chiffres du nombre donné. Prenons pour exemple le nombre...

douze mille douze cent douze.

Sous cette forme, il serait assez difficile de le traduire en chiffres. Pour découvrir sa vraie valeur, on convertira ses trois parties, 12 mille, 12 cents, 12, en unités simples, ce qui donnera 12 000 unités, 1 200 unités, 12 unités; la somme de ces trois nombres donnera 13 212 pour l'écriture en chiffres du nombre proposé, dont le véritable énoncé est conséquemment

treize mille deux cent douze.

On trouverait de la même manière que *onze cent onze millions onze cent onze mille onze cent onze*, est un énoncé vicieux qui ne sert qu'à déguiser le nombre 1 112 112 111 dont le véritable énoncé est : *un billion cent douze millions cent douze mille cent onze* (*).

(*) Les objets que nous avons traités dans cet article, appartiennent incontestablement à la numération; mais comme ils dépendent de l'addition, nous avons dû les renvoyer à la fin de cette règle.

SOUSTRACTION.

37. *Le but de la* SOUSTRACTION *est d'ôter d'un nombre toutes les unités d'un autre nombre; le résultat se nomme* RESTE, DIFFÉRENCE *ou* EXCÈS; *il exprime combien le plus grand des deux nombres contient d'unités de plus que le plus petit, et marque par conséquent l'excès du plus grand nombre sur le plus petit. On en déduit que la différence entre deux nombres ajoutée au plus petit, doit reproduire le plus grand; les unites du plus grand nombre, du plus petit, et de la différence, sont donc nécessairement de même nature* (n° 26, page 27).

38. La soustraction des nombres d'un seul chiffre n'offre aucune difficulté; on l'effectue en ôtant du plus grand nombre toutes les unités du plus petit. Par exemple, pour soustraire 3 de 9, il suffit d'ôter trois fois l'unité de 9, ce qui s'exécute en disant; de 9 ôtez 1 reste 8, de 8 ôtez 1 reste 7, et de 7 ôtez 1 reste 6; le reste 6 ajouté au plus petit nombre 3 donne 9, qui est effectivement le plus grand nombre. On trouverait, en opérant de la même manière, que 5 ôté de 9 donne 4 pour reste, que 3 ôté de 8 donne 5 pour reste, etc. Il est de la plus grande importance de graver dans sa mémoire toutes les différences entre les nombres d'un seul chiffre, car les soustractions les plus composées en dépendent.

39. La soustraction des nombres composés de plusieurs chiffres, pourrait s'effectuer comme celle des nombres d'un seul chiffre, en ôtant successivement du plus grand nombre toutes les unités du plus petit; ainsi, pour retrancher 27 de 59, on pourrait ôter 27 fois l'unité de 59, ce qui donnerait 32 pour reste; mais on remarquera, comme on l'a fait pour l'addition (n° 31), que si le nombre à soustraire était très-grand, l'opération ainsi effectuée, deviendrait excessivement longue, car elle exigerait autant de soustractions partielles qu'il y a d'unités dans le plus petit nombre; on a dû chercher à la simplifier; on y est parvenu

en la faisant dépendre de soustractions partielles de nombres d'un seul chiffre. Ainsi, dans notre exemple, où il s'agissait de soustraire 27 de 59, on a dit; ôter 27 unités de 59 unités, revient à ôter les 2 dixaines et les 7 unités qui composent 27, des 5 dixaines et des 9 unités, qui composent 59; retranchant donc 2 dixaines de 5 dixaines, et 7 unités de 9 unités, le reste, composé de 3 dixaines et de 2 unités, sera 32. On verrait de la même manière, qu'ôter 245 de 458, c'est ôter, les 2 centaines les 4 dixaines et les 5 unités, qui composent 245, des 4 centaines 5 dixaines et 8 unités, qui composent 458; retranchant donc les unités du même ordre, on dira; de 4 centaines ôtez 2 centaines, reste 2 centaines, de 5 dixaines ôtez 4 dixaines, reste 1 dixaine, de 8 unités ôtez 5 unités, reste 3 unités; la réunion des restes partiels, 2 centaines 1 dixaine 3 unités, compose le reste total 213; ce reste ajouté au plus petit nombre 245, donne 458, qui est effectivement le plus grand nombre.

40. Les mêmes raisonnemens et les mêmes décompositions pouvant s'adapter à tous les nombres, nous en conclurons qu'en général, *pour retrancher un nombre d'un autre, il suffit d'opérer les soustractions partielles sur les unités du même ordre, ce qui s'exécute en ôtant, les unités des unités, les dixaines des dixaines, les centaines des centaines*, etc. *La soustraction totale se trouve ainsi décomposée en soustractions partielles de nombres d'un seul chiffre, et la réunion des restes partiels compose le reste total.* Afin d'appliquer cette règle, proposons-nous d'obtenir la différence entre 8 679 et 6 325, ce qui revient à soustraire 6 325 de 8 679; on doit retrancher les unités du même ordre: il est donc naturel de placer le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se trouvent dans une même colonne verticale, c'est-à-dire, les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, et les mille sous les mille; le reste se place sous les deux nombres, et en est séparé par un trait, comme on le voit ici,

De.....	8 679	nombre dont on soustrait,
ôtez..	6 325	nombre à soustraire
Reste...	2 354	différence ou excès.

Nous ferons voir (page 46, n° 48) que dans certains cas il est impossible de commencer la soustraction par la gauche; commençant donc par la droite, on retranchera 5 unités de 9 unités, le reste sera 4 unités que l'on écrira au résultat sous la colonne des unités; passant à la colonne suivante on ôtera 2 dixaines de 7 dixaines, le reste sera 5 dixaines; ainsi on écrira 5 au rang des dixaines du résultat; passant aux centaines, on ôtera 3 centaines de 6 centaines, ce qui donnera 3 centaines pour reste; on posera donc 3 au rang des centaines du reste; enfin passant à la dernière colonne, celle des mille, on retranchera 6 mille de 8 mille, ce qui donnera 2 mille; on écrira donc 2 au rang des mille. L'opération sera alors terminée, et la réunion des restes partiels, 4 unités 5 dixaines 3 centaines 2 mille, composera le reste total 2 354. Si l'on veut ôter 592 de 8 796, après avoir disposé le calcul comme dans l'exemple précédent....

De...	8 796
ôtez.	592,
Reste.	8 204.

on dira; de 6 unités ôtez 2 unités, reste 4 unités; j'écris donc 4 au rang des unités du résultat; passant à la colonne des dixaines, on ôtera 9 dixaines de 9 dixaines, il ne restera rien, on mettra donc un zéro au rang des dixaines du reste, afin de conserver aux chiffres suivans le rang qu'ils doivent occuper; on ôtera ensuite 5 centaines de 7 centaines, il restera 2 centaines : on écrira donc 2 au rang des centaines du résultat; enfin, comme le nombre à soustraire ne renferme pas de mille, il est clair qu'on ne peut rien ôter des 8 mille contenus dans le nombre dont on soustrait; on doit donc écrire 8 au rang des mille du résultat; l'opération est terminée, et l'on a 8 204 pour reste; ce reste est effectivement la différence entre 8 796 et 592; car, ajouté au plus petit nombre, il donne le plus grand.

41. On devra opérer de cette manière toutes les fois que les chiffres du nombre à soustraire ne surpasseront pas ceux du même rang dans le nombre dont on soustrait, c'est-à-dire, lorsque les

unités, les dixaines, les centaines, etc. du nombre à soustraire ; ne surpasseront pas les unités, les dixaines, les centaines, etc. du nombre dont on soustrait ; parceque les soustractions partielles des nombres d'un seul chiffre pouvant s'exécuter, la soustraction totale s'effectuera sans aucune difficulté ; mais il peut arriver qu'un ou plusieurs chiffres du nombre à soustraire soient plus grands que ceux du même rang dans le nombre dont on soustrait ; si l'on demande, par exemple, de retrancher 29 de 67 ; on est d'abord conduit à ôter 9 unités de 7 unités, ce qui est inexécutable ; la soustraction totale est cependant possible, car en ôtant 29 fois l'unité de 67, on trouve 38 pour reste. Afin donc de rendre possibles les soustractions partielles, on observe que le nombre 67 dont on soustrait, peut être décomposé en 50 unités plus 17 unités, ou en 5 dixaines plus 17 unités ; la question est alors réduite à retrancher les 2 dixaines et les 9 unités qui composent 29, des 5 dixaines et des 17 unités du nombre 67 ; ce qui est très-facile, puisque les unités et les dixaines du nombre à soustraire sont rendues plus petites que les unités et les dixaines du nombre dont on soustrait ; l'opération prend alors la forme suivante......

Des.....	5 dixaines plus 17 unités,	qui composent 67,
ôtez les....	2 dixaines plus 9 unités,	qui composent 29,
Restera les..	3 dixaines plus 8 unités,	qui composent 38.

Pour l'exécuter ; on retranche, 9 unités de 17 unités, ce qui donne 8 unités, et 2 dixaines de 5 dixaines, ce qui donne 3 dixaines : le reste, composé de 3 dixaines et de 8 unités, est donc 38 ; et en effet, ajouté au plus petit nombre, 29, il reproduit le plus grand, 67.

42. Lorsqu'un chiffre du nombre à soustraire surpasse celui du même rang dans le nombre dont on soustrait, on rend toujours la soustraction possible au moyen de décompositions analogues à celle de l'exemple précédent ; mais comme l'écriture de ces décompositions deviendrait excessivement longue pour de grands nombres, on les effectue seulement par la pensée ; ainsi

le calcul relatif à la soustraction précédente, se dispose et s'exécute de cette manière ; après avoir placé le plus petit nombre 29 sous le plus grand 67, on met un trait sous ces deux nombres pour les séparer du résultat 38. Pour obtenir ce résultat, on commence la soustraction par la droite, et l'on dit; 9 unités ne pouvant être ôtées de 7 unités, je rends la soustraction possible en empruntant par la pensée une des 6 dixaines du nombre 67; cette dixaine d'emprunt, qui vaut 10 unités, jointe aux 7 unités du même nombre 67, donne 17 unités, dont je puis ôter 9 unités, ce qui me donne 8 unités pour reste; j'écris donc 8 au rang des unités du résultat; passant à la colonne suivante, je dis, j'ai emprunté une dixaine sur les 6, il n'en reste donc plus que 5, desquelles ôtant les 2 dixaines du nombre à soustraire, j'ai 3 dixaines pour reste; je pose donc 3 au rang des dixaines du résultat; j'ai alors 38 pour le reste total. On voit combien cette manière d'opérer abrège le calcul. Afin de familiariser avec les raisonnemens que nous venons d'employer, nous les appliquerons à l'exemple suivant......

De...	67 859
ôtez	29 467
Reste..	38 392.

On retranchera d'abord 7 unités de 9 unités, le reste sera 2 unités, on écrira donc 2 au rang des unités du résultat; passant à la colonne suivante, celle des dixaines, on dira, comme 6 dixaines ne peuvent être ôtées de 5 dixaines, j'emprunte par la pensée une centaine sur les 8; cette centaine d'emprunt, qui vaut 10 dixaines, jointe aux 5 dixaines, donne 15 dixaines, dont ôtant 6 dixaines, il reste 9 dixaines; j'écris donc 9 au rang des dixaines du résultat; passant à la colonne des centaines, et se rappelant qu'ayant emprunté une des 8 centaines, il n'en reste plus que 7, on retranchera 4 centaines de 7 centaines, le reste 3 centaines exprimera les centaines du résultat; parvenu à la colonne des mille, où le chiffre inférieur 9 est plus grand que le supérieur 7, on rendra la soustraction possible par l'emprunt

d'une des 6 dixaines de mille du nombre 67 859; cette dixaine de mille, qui vaut 10 mille, jointe aux 7 unités de mille, donne 17 mille, dont on peut alors retrancher les 9 mille, le reste 8 mille exprime les mille du résultat; passant enfin à la dernière colonne, celle des dixaines de mille, et se rappelant qu'ayant emprunté une des 6 dixaines de mille, dans l'opération précédente, il n'en reste plus que 5, on ôtera 2 dixaines de mille de 5 dixaines de mille; le reste, 3 dixaines de mille, exprimera les dixaines de mille du résultat; l'opération sera alors terminée, et la réunion des restes partiels, 3 dixaines de mille 8 mille 3 centaines 9 dixaines 2 unités, donnera le reste total 38 392.

On pourra s'exercer sur les exemples suivans :

De....	9 785 247	De...	112 233 445 566 778 899
ôtez..	5 872 652	ôtez..	3 344 556 677 889 992.
Reste...	3 912 595.	Reste	108 888 888 888 888 907.

43. Il est un cas qui pourrait encore embarrasser, c'est celui où le chiffre sur lequel on devrait emprunter serait un zéro; cela arriverait, si l'on voulait retrancher 2759 de 6007; car, comme on ne peut ôter 9 unités de 7 unités, la soustraction ne deviendrait possible qu'à l'aide d'un emprunt : or cet emprunt ne peut se faire que sur le premier chiffre significatif, 6, qui exprime des mille, car les zéros qui le précèdent, n'ont par eux-mêmes aucune valeur; j'emprunte donc un mille sur les 6, et comme je n'ai besoin que d'un emprunt de dix unités, je décompose le mille emprunté, en 990 plus 10, c'est-à-dire, en 9 centaines 9 dixaines et 10 unités. Au moyen de cet *artifice*, le nombre 6007 se trouve transformé en 5 mille plus 9 centaines plus 9 dixaines plus 17 unités; si l'on décompose alors le nombre 2759 en ses unités des différens ordres, l'opération prendra la forme suivante :

Des....	5 mille,	9 centaines,	9 dixaines,	17 unités, du nombre...	6007,
ôtez les...	2 mille,	7 centaines,	5 dixaines,	9 unités, du nombre...	2759.
Restera les	3 mille,	2 centaines,	4 dixaines,	8 unités, du nombre...	3248.

Les *nombres supérieurs* (*) étant ainsi rendus plus grands que les chiffres inférieurs correspondans, on effectuera sans difficulté les soustractions partielles des unités des différens ordres; l'assemblage des différences partielles, 3 mille 2 centaines 4 dixaines 8 unités, composera le reste total 3248. Ce reste ajouté au plus petit des deux nombres donne le plus grand. Une observation analogue à celle du nº 42, conduit à chercher s'il ne serait pas possible d'abréger le calcul, en opérant directement sur les nombres donnés. La comparaison du nombre 6007 avec ses parties, 5 mille, 9 centaines, 9 dixaines, 17 unités, en donne le moyen; car on voit que tout se réduit, à diminuer d'un le chiffre 6 sur lequel on emprunte, à ajouter 10 au chiffre 7 sur lequel on opère, et à compter les deux zéros intermédiaires pour des neuf.

44. La remarque précédente s'appliquerait à tout autre exemple. Ainsi, en général, *quand le chiffre supérieur est moindre que le chiffre inférieur correspondant, il faut, emprunter une unité sur le premier chiffre significatif à gauche, qui devra par conséquent être diminué d'un, ajouter dix au chiffre supérieur sur lequel on opère, et s'il y a des zeros intermédiaires, les compter pour des neuf. J'observe que l'emprunt d'une unité sur le premier chiffre significatif à gauche, donne toujours le moyen d'effectuer les soustractions précédentes sans nouvel emprunt.* En effet, par cet emprunt; 1°. le chiffre sur lequel on opère doit être augmenté de dix; on pourra donc en ôter le chiffre inférieur, toujours moindre que dix; 2°. les zéros compris entre le chiffre sur lequel on opère, et celui sur lequel on a emprunté, deviennent des 9 : on pourra donc en ôter les chiffres inférieurs, car chacun d'eux ne saurait surpasser 9. Pour diriger dans l'application de cette règle, et convaincre de plus en plus de son exactitude, nous proposerons de soustraire 45396 de 80073. Après avoir disposé le calcul comme on le voit ici :

(*) On ne doit pas dire les *chiffres supérieurs*, car 17 n'est pas un chiffre. J'ai donc cru devoir dire les *nombres supérieurs*; cette expression est exacte, car 5, 9, 9, 9 et 17 sont des nombres.

De..... 80079

ôtez... 45396

Reste.. 34683.

On dira : de 9 unités ôtant 6 unités, reste 3 unités ; j'écris donc 3 au rang des unités ; de 7 dixaines, je ne puis ôter 9 dixaines ; j'ai donc recours au premier chiffre significatif 8, sur lequel j'emprunte une dixaine de mille, que je décompose en 9 mille, 9 centaines, 10 dixaines ; pour distribuer cet emprunt, je laisse les 9 mille et les 9 centaines sur les deux zéros qui, dans le nombre supérieur 80075, occupent le rang des mille et des centaines, et je joins les 10 dixaines aux 7 que j'avais déjà, ce qui me donne 17 dixaines. Cela vérifie la règle précédente ; car on voit qu'après l'emprunt, le chiffre significatif 8 sur lequel on a emprunté une de ses unités, ne doit plus compter que pour 7 ; les deux zéros qui le suivent doivent compter pour des 9 ; et enfin le chiffre 7 sur lequel on opère, doit etre augmenté de dix. Otant donc 9 dixaines de 17 dixaines il restera 8 dixaines que l'on écrira à leur rang. Les deux zéros comptant chacun pour 9, à cause de la distribution de la dixaine de mille empruntée, j'ôte successivement, 3 centaines de 9 centaines, 5 mille de 9 mille, et j'écris les restes partiels, 6 centaines, 4 mille, à leur rang. Enfin, parvenu aux dixaines de mille, je me rappelle que j'ai emprunté une des 8 dixaines de mille du nombre supérieur, et que par conséquent je dois ôter 4 dixaines de mille de 7 dixaines de mille ; comme il en reste 3, j'écris 3 au rang des dixaines de mille du résultat. L'opération est terminée, et j'ai 34683 pour le reste demandé. Ce reste est exact ; car, ajouté au plus petit nombre, il donne le plus grand.

45. La réunion de tout ce qu'on a dit sur les différens cas que comporte la soustraction, fournit cette règle générale : *Pour retrancher un nombre d'un autre, placez le plus petit sous le plus grand, de façon que les unités de même ordre se correspondent verticalement ; les unités seront alors sous les unités, les dixaines sous les dixaines, et ainsi de suite. Mettez un trait sous les deux*

nombres, pour les séparer du résultat, que vous placerez dessous. L'opération ainsi disposée, pour l'effectuer; retranchez chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant, en commençant par la droite, et écrivant chaque reste partiel sous la colonne qui l'a produit. Quand le chiffre inférieur sera moindre que le chiffre supérieur correspondant, posez leur différence au-dessous; quand le chiffre inferieur manquera ou sera zéro, posez au résultat le chiffre supérieur correspondant, en ayant soin de le diminuer d'un, si l'on a emprunté sur lui pour effectuer les soustractions précédentes; quand ces deux chiffres seront égaux, posez zéro; enfin, quand le chiffre inférieur sera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, empruntez une des unités du premier chiffre significatif à gauche, qui devra par conséquent être diminué d'un; augmentez de dix le chiffre supérieur sur lequel vous opérez, et s'il y a des zéros compris entre ce chiffre et celui sur lequel vous avez fait l'emprunt, comptez ces zéros pour des neuf. (Il est bien évident que les chiffres supérieurs sur lesquels on a emprunté, doivent être diminués d'un, avant d'en ôter les chiffres inferieurs correspondans). Lorsque vous serez parvenu à la dernière colonne à gauche, vous poserez dessous le reste qu'elle fournira, ce qui terminera l'opération. Observez bien que le reste total se compose de la réunion des différences partielles entre les unités des differens ordres des nombres proposés. La longueur de cette règle m'impose la loi de choisir un exemple qui exige l'application de ses diverses parties; le suivant remplit cette condition :

De.....	930 500 948
ôtez.......	9 524 905
Reste....	920 976 043.

Après avoir écrit le plus petit nombre sous le plus grand, de façon que les unités de même ordre soient l'une sous l'autre; j'ai mis un trait sous les deux nombres pour les séparer du reste 920 976 043, que j'ai posé dessous. Pour effectuer la soustraction d'après la règle, je dis : de 8 unités ôtez 5 unités, reste

3 unités; j'écris donc 3 sous les unités. Arrivé aux dixaines, j'observe que le chiffre inférieur est un zéro, et que par conséquent je dois écrire au résultat 4, qui est le chiffre supérieur correspondant. Les deux chiffres de la colonne des centaines étant égaux, leur différence est nulle; j'écris donc zéro pour occuper la place des centaines du reste. Dans la colonne des mille, le chiffre inférieur 4 surpasse le chiffre supérieur correspondant, j'emprunte donc une des 5 unités du premier chiffre significatif à gauche, qui devra par conséquent être diminué d'un; j'augmente de dix le chiffre o sur lequel j'opère, et j'ai alors 4 mille à soustraire de 10 mille, le reste est 6 mille; j'écris donc 6 au rang des mille du résultat. Passant aux dixaines de mille, et me rappelant qu'à cause de l'emprunt, le chiffre supérieur zéro compte pour 9 dixaines de mille, j'en ôte les 2 dixaines de mille du nombre inférieur, il en reste 7 que j'écris à leur rang. Les chiffres 5 et 5 de la colonne des centaines de mille étant égaux, il semblerait, d'après la règle, que l'on devrait écrire o; mais il faut se rappeler qu'à cause de l'emprunt, le chiffre supérieur, 5, ne doit compter que pour 4; le chiffre inférieur, 5, étant plus grand, on rendra la soustraction possible par l'emprunt d'une des 3 dixaines de millions du premier chiffre significatif à gauche, et alors on sera conduit à ôter successivement 5 centaines de mille de 14 centaines de mille, et 9 millions de 9 millions. On posera les restes, 9 centaines de mille et o millions, sous les colonnes qui les ont fournis. Enfin, comme les chiffres 3 et 9 qui restent encore dans le nombre supérieur, n'ont pas de chiffres inférieurs correspondans, on les abaissera sur la gauche du reste partiel, 0976043, en ayant soin de diminuer le chiffre 3 de l'unité empruntée sur lui dans les soustractions précédentes : on écrira donc 2 au rang des dixaines de millions du reste, et 9 au rang de ses centaines de millions. L'opération sera alors terminée, et l'on aura 920 976 043 pour le reste demandé. Il est exact; car, ajouté au plus petit nombre 9 524 905, il donne pour somme le plus grand nombre.... 930 500 948.

46. Dans l'application de cette règle (45), *on peut, pour*

abréger, se dispenser de répéter continuellement le nom de l'espèce d'unité sur laquelle on opère chaque soustraction partielle. Ainsi, dans le 1er exemple du n° 40, où il s'agissait de retrancher 6325 de 8679, et dans celui du n° 45, où l'on devait soustraire 9524905 de 930 500 948; après avoir disposé le calcul comme à l'ordinaire :

De.......	8 679.	De.......	930 500 948.
ôtez.....	6 325,	ôtez.....	9 524 905,
Reste....	2 354.	Reste.....	920 976 043.

On dira simplement, dans le 1er exemple ; de 9 ôtez 5, reste 4; de 7 otez 2, reste 5; de 6 ôtez 3, reste 3; de 8 ôtez 6, reste 2. De même, dans le 2ème exemple, on dira ; de 8 ôtez 5, reste 3; de 4 ôtez 0, reste 4; de 9 ôtez 9, reste 0; de 0 ôtez 4, céla ne se peut; j'emprunte donc, et je dis : de 10 ôtez 4, reste 6; de 9 ôtez 2, reste 7; de 4 je ne puis ôter 5; j'emprunte, et j'ôte 5 de 14, reste 9; de 9 ôtez 9, reste 0. Enfin, comme il n'y a point de chiffres sous 3 et 9, et que l'emprunt a diminué le premier chiffre d'un, j'écris 2 et 9 au reste ; ce qui me donne le reste total 920 976 043.

47. *Au lieu de diminuer d'un, le chiffre supérieur sur lequel on a emprunté, on peut augmenter d'un le chiffre inférieur correspondant, en laissant l'autre tel qu'il est.* S'il s'agissait, par exemple, de retrancher 29 de 67; après avoir ôté 9 unités de 17, ce qui donne 8 unités de reste, au lieu de diminuer d'un le chiffre 6, sur lequel on a emprunté, pour en ôter le chiffre inférieur 2, ce qui donnerait 3 pour le nombre des dixaines du reste; on pourrait laisser le chiffre supérieur, 6, tel qu'il est, et en retrancher le chiffre inférieur, 2, augmenté d'un ; car cela donnerait également 3 pour le nombre des dixaines du reste. On doit préférer ce dernier procédé comme le plus commode dans la pratique. Pour en apercevoir la légitimité, il suffit d'observer qu'en diminuant d'un le chiffre supérieur sur lequel on a emprunté, on diminue d'un le reste correspondant, et qu'on produit le même effet en augmentant d'un le chiffre inférieur ; car alors ôtant un

de plus, il doit rester un de moins. Ainsi, dans le second exemple du n° 42, où il s'agissait d'ôter 29467 de 67859, on dira : de 9 ôtez 7, reste 2; de 15 ôtez 6, reste 9; puis, à cause de l'emprunt, de 8 ôtez 4 plus 1, ou 5, reste 3; de 17 ôtez 9, reste 8; enfin, à cause de l'emprunt, de 6 ôtez 2 plus 1, ou 3, reste 3. Le résultat 38392 exprime le reste demandé; car, ajouté au plus petit nombre, il donne le plus grand. Pour familiariser avec cette méthode abrégée, nous l'appliquerons à quelques exemples qui réunissent toutes les difficultés que comporte la soustraction.

De........	84 324 005	517 001 032	3 000 400 001	10 000 000
ôtez.........	2 006 786,	8 398 942,	2 999 200 009,	9 990 001,
Reste.......	82 317 219.	508 602 090.	1 199 992.	9 999.

Dans le premier exemple, où il s'agit de retrancher 2 006 786 de 84 324 005, on dira : de 5 ôtez 6, cela ne se peut; j'emprunte, et alors j'ôte 6 de 15, reste 9; de 9 ôtez 8, reste 1; de 9 ôtez 7, reste 2; de 14 ôtez 6 plus 1, ou 7, reste 7; de 2 ôtez 0 plus 1, ou 1, reste 1; de 3 ôtez 0, reste 3; de 4 ôtez 2, reste 2; de 8 ôtez rien, reste 8. *Dans le second exemple, on* dira : de 2 ôtez 2, reste 0; de 13 ôtez 4, reste 9; de 9 ôtez 9 reste 0; de 11 ôtez 8 plus 1, ou 9, reste 2; de 9 ôtez 9, reste 0; de 9 ôtez 3, reste 6; de 17 ôtez 8, reste 9; de 1 ôtez 1, reste 0; de 5 ôtez rien, reste 5. Le calcul relatif aux autres exemples, s'exécute d'une manière analogue. L'application immédiate de la règle du n° 45, conduirait aux mêmes résultats.

48. Lorsque le nombre à soustraire ne surpassera pas le nombre dont on veut le soustraire, c'est-à-dire, toutes les fois que la soustraction sera possible (*), on pourra l'effectuer, d'après la règle du n° 45, en la commençant par la droite. Il n'en serait pas de même, en la commençant par la gauche; car alors si la

(*) Il est bien évident qu'il serait impossible d'ôter le plus grand nombre du plus petit; ainsi, par exemple, on ne peut ôter 5 unités de 3 unités; car, après avoir ôté 3 unités de 3 unités, il reste zéro, dont il est impossible d'ôter les 2 unités qu'on devrait encore soustraire. Nous verrons par la suite, que les *signes algébriques* donnent le moyen de représenter les restes de cette espèce.

soustraction étant possible, quelques chiffres du nombre à soustraire étaient plus grands que les chiffres correspondans du nombre dont on veut le soustraire, comme les chiffres précédens seraient employés par les soustractions précédentes, on ne pourrait plus, quand un chiffre inférieur serait plus grand que le chiffre supérieur correspondant, rendre la soustraction possible par un emprunt sur le chiffre supérieur précédent; car ce chiffre aurait été entièrement employé pour la soustraction précédente. Ainsi, dans le premier exemple du n° 47, où il s'agissait d'ôter 29 de 67, si l'on commençait par la gauche, on dirait : de 6 dixaines ôtez 2 dixaines, reste 4 dixaines, ou 40. On voit déjà que ce reste partiel ne saurait subsister, car il est plus grand que le reste total 38, dont il devrait faire partie. La suite du calcul confirme cette observation; en effet, comme on ne peut ôter 9 unités de 7 unités, le seul moyen de rendre la soustraction possible serait d'emprunter une des 6 dixaines du nombre 67; mais cela n'est pas possible, car ces 6 dixaines ont été entièrement employées dans la soustraction précédente. Cette remarque pouvant s'appliquer à tous les exemples dans lesquels quelques chiffres du nombre à soustraire sont plus grands que les chiffres correspondans du nombre dont on soustrait, nous en conclurons que, *pour n'être jamais arrêté dans les soustractions partielles, il faut les commencer par la droite.* Je crois devoir terminer la soustraction par des exemples sur lesquels les commençans pourront s'exercer.

De.. 47 000 100 807	De.. 1 000 000	De.. 100 875 432	De.. 79 243
ôtez 9 234 560 988,	ôtez 8 756,	ôtez 875 432,	ôtez 44 946,
Reste 37 765 539 819.	Reste 991 [illegible]44.	Reste 100 000 000.	Reste 34 297.

MULTIPLICATION.

49. L'ADDITION de plusieurs unités égales a engendré les nombres; l'addition de plusieurs nombres égaux, engendre une opération abrégée, nommée *multiplication*. Sous cet aspect, *le but de la* MULTIPLICATION *est de prendre un nombre, autant*

de fois qu'il y a d'unités dans un autre. Le nombre qu'on répète a été appelé MULTIPLICANDE, *et le nombre qui indique combien de fois on doit le répéter, a reçu le nom de* MULTIPLICATEUR; *le résultat se nomme* PRODUIT, *et le multiplicande ainsi que le multiplicateur, ayant tous deux concouru à la formation du produit, en sont dits les* FACTEURS.

50. D'après cette définition; 1°. *le multiplicateur est essentiellement abstrait*, car il marque combien de fois on doit prendre le multiplicande (nos 24 et 49); 2°. *la nature des unités du produit est la même que celle des unités du multiplicande*, car le produit est composé du multiplicande pris un certain nombre de fois (nos 26 et 49); 3°. *lorsque le multiplicande étant zéro, le multiplicateur est un nombre, le produit est zéro*, car zéro répété plusieurs fois ne peut donner que zéro.

51. On peut encore conclure de cette définition (49) que, *pour multiplier un nombre par un autre, il suffit d'écrire le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans le second, et de faire la somme; celle-ci sera le produit demandé*, car elle sera composée du multiplicande pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur. Ainsi, par exemple, comme multiplier 5 par 3, se réduit à prendre 3 fois 5, nous écrirons 5 trois fois, et nous ferons l'addition; la somme, 5 plus 5 plus 5, ou 15, que nous obtiendrons, étant composée de 5 pris trois fois, exprimera le produit de 5 par 3. Dans cet exemple, le multiplicande est 5, le multiplicateur est 3, et 15 est le produit; 5 et 3 sont les facteurs de ce produit. Par la même raison; pour multiplier 8 par 7, on écrira 8 sept fois; on fera l'addition, et la somme 56, qui en résultera, sera le produit demandé de 8 par 7, car il sera composé de 7 fois 8; ici 8 est le multiplicande, 7 est le multiplicateur, et 56 le produit des facteurs 7 et 8.

52. On voit, par ce qui précède, que la multiplication des nombres entiers n'est qu'un cas particulier de l'addition, celui où les nombres à ajouter sont égaux; alors, pour rappeler cette circonstance particulière, on donne au nombre qu'on ajoute le nom de multiplicande; le nombre qui marque combien de fois l'on doit prendre le multiplicande, s'appelle multiplicateur, et le

le résultat de l'addition, qui s'appelait somme, prend le nom de produit; ensorte que *la seule différence qui existe entre une somme et un produit, c'est qu'une somme est le résultat de l'addition de nombres différens, tandis qu'un produit est le résultat de l'addition de nombres égaux.*

53. Puisque la multiplication peut s'effectuer par l'addition, il est très-facile de former les produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre; ces produits sont tous réunis dans la table suivante, qu'on attribue à *Pythagore*.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

54. La 1re rangée horizontale est composée des neuf premiers nombres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pris une fois; elle exprime donc les produits de ces nombres par 1. La 2ème rangée horizontale est composée des nombres d'un seul chiffre, ajoutés à eux-mêmes, ou pris deux fois; elle contient donc tous les produits de ces nombres par 2. La 3ème rangée horizontale contient tous les produits des nombres d'un seul chiffre par 3; on la forme en ajoutant chaque nombre deux fois à lui-même, ou plus simplement en ajoutant chaque nombre à son produit par 2. Les autres rangées se forment d'une manière analogue; ensorte que la 4ème rangée, la 5ème, la 6ème, la 7ème, la 8ème, et la 9ème, contiennent les produits de tous les nombres d'un seul chiffre par 4, par 5, par 6, par 7, par 8 et par 9; chaque rangée peut s'obtenir, en ajoutant constamment celle qui la précède à la première.

55. La manière d'employer cette table se déduit aisément de sa formation. Pour trouver par exemple le produit de 8 par 7, on dira : comme tous les produits des nombres d'un seul chiffre par 7, sont contenus dans la 7ème rangée horizontale, le produit cherché doit s'y trouver ; mais la 8ème colonne verticale (*) doit aussi le contenir, car elle renferme le produit de 8 par tous les nombres d'un seul chiffre ; ce produit est donc 56, qui se trouve à-la-fois sur ces deux lignes. On verra de même ; que le produit de 5 par 6 est le nombre 30, qui se trouve à-la-fois sur la 5ème ligne horizontale et sur la 6ème ligne verticale ; que le produit de 8 par 9 est le nombre 72, qui se trouve à la rencontre de la 8ème rangée horizontale avec la 9ème colonne verticale ; et ainsi des autres. Ces exemples nous montrent qu'en général, *le produit de deux nombres d'un seul chiffre se trouve à la rencontre de la ligne horizontale et de la ligne verticale, dont chacune commence par l'un de ces deux nombres.* Le produit 48, de 6 par 8, est à la rencontre des deux lignes, dont l'une commence par 6 et l'autre par 8 ; le produit 35, de 7 par 5, se trouve à la rencontre des deux lignes dont l'une commence par 7 et l'autre par 5, etc. Comme les produits des nombres les plus composés ne dépendent que de multiplications partielles de nombres d'un seul chiffre, il est utile et même indispensable de graver dans sa mémoire tous les produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre.

56. Je dois prévenir que je désignerai par la suite, sous le nom de *multiples* d'un nombre, ses divers produits par 2, 3, 4, 5, etc. ; ainsi : 2 fois 3, ou 6 ; 7 fois 3, ou 21 ; 4 fois 3, ou 12, seront des multiples de 3 ; de même : 3 fois 7, ou 21 ; 4 fois 7, ou 28 ; 5 fois 7, ou 35, seront des multiples de 7 ; et en général, *un nombre répété plusieurs fois donne un produit* MULTIPLE *de ce nombre. Un produit est donc multiple de chacun de ses facteurs.* Ainsi, le produit 28, de 7 par 4, est multiple de chacun de

(*) On peut dire indifféremment ligne horizontale et ligne verticale, parce qu'une ligne est susceptible de prendre toutes sortes de positions ; mais il serait ridicule de dire une colonne horizontale, car une colonne est ordinairement verticale.

ses facteurs 7 et 4 ; le produit 72, de 8 par 9, est multiple de 8 et de 9, etc.

57. On doit remarquer, dans la table de multiplication ; que le produit de 2 par 3 est le même que celui de 3 par 2 ; que le produit de 5 par 7 est le même que celui de 7 par 5, et qu'en général : *le produit de deux nombres d'un seul chiffre reste le même dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.* L'*analogie* porte à croire que la même propriété subsiste pour tous les nombres ; mais comme il est de la plus grande importance d'accoutumer les commençans aux démonstrations rigoureuses, nous allons prouver directement que dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication de deux nombres, leur produit doit rester le même (*).

58. *Une démonstration, pour être générale, doit pouvoir s'appliquer à tous les nombres, ce qui exige qu'elle soit indépendante de la valeur numérique du résultat.* La démonstration suivante remplit cette condition. Soit proposé de multiplier 5 par 3 ; d'après la définition de la multiplication (49), le produit se compose de 5 unités prises 3 fois ; il sera donc égal à la somme des unités contenues dans le tableau suivant, composé de 3 rangées horizontales de 5 unités chacune ;

1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,

mais la somme des unités contenues dans ce tableau peut être

(*) La nécessité de prouver ce principe est mise en évidence, quand on effectue la multiplication par le moyen de l'addition. Prenons pour exemple le produit des deux nombres 3 et 2 ; on peut l'effectuer des deux manières suivantes :

3	2
3	2
Somme.	2
	Somme.

Le résultat de la première addition, sera 2 fois 3, et celui de la seconde 3 fois 2 ; or, à l'inspection de ces deux opérations différentes, il est impossible de prévoir si elles conduiront au même résultat ; il est donc indispensable de s'en assurer par le raisonnement.

considérée comme composée, ou de 3 rangées horizontales de 5 unités chacune, c'est-à-dire, de 5 pris 3 fois, ou de 5 colonnes verticales de 3 unités chacune, c'est-à-dire, de 3 pris 5 fois; 5 pris 3 fois donne donc la même somme d'unités, et parconséquent le même nombre, que 3 pris 5 fois; le produit de 5 par 3 doit donc être le même que celui de 3 par 5; le produit des deux nombres 5 et 3 ne doit donc pas changer dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication. Si l'on réfléchit sur la nature de cette démonstration, on sentira que les raisonnemens sur lesquels elle repose, sont entièrement indépendans des nombres particuliers 3 et 5, que nous n'avons considérés que pour fixer les idées, et que parconséquent la même propriété doit subsister pour tous les nombres; en effet, nous avons prouvé que le produit de 5 par 3 devait être le même que celui de 3 par 5, et cela sans déterminer le nombre des unités contenues dans chacun de ces produits; la démonstration est donc indépendante de la valeur numérique du résultat; elle est donc générale.

59. Ainsi, il est rigoureusement prouvé que *dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication de deux nombres, leur produit doit rester le même; parconséquent, dans toute multiplication abstraite* (*), *on peut, sans changer le produit, prendre le multiplicateur pour multiplicande, et le multiplicande pour multiplicateur.*

60. Après avoir examiné le cas où le multiplicande et le multiplicateur sont des nombres d'un seul chiffre, il est naturel de passer à celui où le multiplicateur ayant un seul chiffre, le multiplicande en a plusieurs. La multiplication suivante est de cette espèce.

(*) Par *multiplication abstraite*, nous entendons celle dans laquelle le multiplicande et le multiplicateur sont tous deux abstraits. Nous verrons comment on effectue la *multiplication concrète* de deux facteurs dont l'un est abstrait, et l'autre concret; nous démontrerons ensuite, qu'*on ne peut composer un produit avec deux facteurs concrets*, et que le produit d'un nombre quelconque de facteurs doit rester le même, dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications. Le calcul confirmera ces principes.

223 }
223 } *Nombres égaux à ajouter.*
223 }

669 *Somme de 3 nombres égaux à 223, ou produit de 223 par 3.*

Le nombre 669, étant composé de 3 fois 223, exprime le produit de 223 par 3; on doit remarquer que, dans l'addition de 3 nombres égaux à 223, on n'a fait que prendre, 3 fois les 3 unités, 3 fois les 2 dixaines, et 3 fois les 2 centaines, du nombre 223; on a donc pris 3 fois chaque partie du multiplicande 223, et parconséquent, on a réellement effectué la multiplication sur les unités des différens ordres du multiplicande. Il est facile de sentir que cette décomposition aurait encore lieu pour tout autre nombre; car, dans toute multiplication, le multiplicande devant être pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, on doit écrire le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faire l'addition; la somme est le produit demandé; *les unités, dixaines, centaines, etc. du multiplicande, seront donc prises autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; il suffit donc enfin d'effectuer la multiplication sur les unités des différens ordres du multiplicande.* On en déduit cette règle générale.

61. *Pour multiplier un nombre quelconque, par un nombre d'un seul chiffre, il suffit de multiplier les unités des différens ordres du multiplicande, par le multiplicateur; la multiplication proposée se trouve alors décomposée en multiplications partielles de nombres d'un seul chiffre, et la réunion des produits partiels forme le produit total.* Appliquons cette règle à quelques exemples, et commençons par celui du n° 60, où il s'agissait de multiplier 223 par 3; mais, cette fois, au lieu d'écrire 3 fois le multiplicande 223, écrivons-le une seule fois, en plaçant au-dessous le multiplicateur 3, et tirons une ligne sous ces deux nombres, pour les séparer du produit que nous placerons dessous:

223	multiplicande.
3	multiplicateur.
669	produit.

L'opération actuelle n'étant qu'une addition abrégée de nombres égaux, les mêmes motifs portent à commencer par la droite, afin de pouvoir joindre les retenues aux colonnes suivantes, et d'obtenir ainsi, à chaque opération, un chiffre du résultat, ce qui n'aurait pas toujours lieu, si l'on commençait par la gauche (voyez la note du n° 32, page 30); on dira donc, 3 fois 3 unités font 9 unités, j'écris 9 au rang des unités du produit; ensuite, 3 fois 2 dixaines font 6 dixaines, je pose donc 6 au rang des dixaines; enfin, comme 3 fois 2 centaines donnent 6 centaines, j'écris 6 au rang des centaines du résultat; la somme des produits partiels, 9 unités 6 dixaines 6 centaines, donne le produit total 669. S'il s'agissait de la multiplication suivante, dans laquelle le multiplicande renferme des zéros,

378 004	multiplicande
9	multiplicateur
3 402 036	produit

On dirait; 9 fois 4 unités donnent 36 unités, ou 3 dixaines et 6 unités; mais le multiplicande manque de dixaines et de centaines, les produits partiels qui leur correspondent sont donc nuls; on doit donc écrire au produit, 6 unités 3 dixaines et 0 centaines; passant aux mille, on multipliera 8 mille par 9, ce qui donnera 72 mille, ou 7 dixaines de mille plus 2 mille; on écrira donc 2 au rang des mille du produit, et l'on retiendra les 7 dixaines de mille pour les joindre aux 63 dixaines de mille, que donne la multiplication des 7 dixaines de mille du multiplicande par le multiplicateur 9, ce qui donnera 70 dixaines de mille, ou 7 centaines de mille; comme il n'y a point de dixaines de mille, on posera un zéro, pour occuper leur place, et l'on retiendra les 7 centaines de mille; enfin, multipliant les 3 centaines de mille du multiplicande par le multiplicateur 9, on obtiendra 27 centaines de mille; ces 27 centaines de mille, augmentées des 7 centaines de mille retenues, donneront 34 centaines de mille, ou 3 millions plus 4 centaines de mille; et comme le multiplicande est entièrement épuisé, on écrira 4 au rang des centaines de mille du produit, et 3 au rang de ses millions, ce qui donnera 3 402 036, pour le produit total.

62. Je ferai ici une remarque analogue à celle du nº 34; *dans la pratique de la multiplication, on se dispense de répéter continuellement le nom de l'espèce d'unité sur laquelle on opère.* Ainsi, dans le dernier exemple du nº 61, où il s'agissait de multiplier 378004 par 9, on dit : 9 fois 4 font 36, je pose 6 et je retiens 3; 9 fois 0 donnent 0, et 3 de retenue font 3 que je pose; 9 fois 0 donnent 0, je pose 0; 9 fois 8 font 72, je pose 2 et je retiens 7; 9 fois 7 font 63 et 7 de retenue donnent 70, je pose 0 et je retiens 7; enfin, 9 fois 3 donnent 27, et 7 de retenue font 34, je pose 4 et j'avance 3. On voit que *tout se réduit à poser successivement les unités de chaque produit partiel, en retenant les dixaines pour les joindre, comme des unités simples, au produit suivant.* La raison en est, qu'en allant de droite à gauche, dix unités d'un certain ordre valent une unité de l'ordre suivant. On peut appliquer ces principes aux exemples suivans, qui réunissent tous les genres de difficultés.

847	847	847	3 000 570 112	1 300 998 877 665 544 332 211
6	5	2	9	8
5082	4235	1694	27 005 131 008	10 407 991 021 324 354 657 688

63. Passons au cas le plus général, celui où le multiplicande et le multiplicateur contiennent plusieurs chiffres; et pour fixer les idées, proposons-nous de multiplier 847 par 256; après avoir disposé le calcul de la manière suivante :

847	multiplicande.
256	multiplicateur.
5 082	1er produit partiel de 847 par 6.
4 235.	2e produit partiel de 847 par 50.
1 694..	3e produit partiel de 847 par 200.
216 832	Somme des produits partiels, ou produit total de 847 par 256.

On remarquera que multiplier 847 par 256, c'est prendre 256 fois 847; on y parviendra donc, en prenant 847, successivement 200 fois, 50 fois et 6 fois (nº 35), ce qui revient à multiplier le multiplicande 847, par les parties 200, 50, et 6, du multiplicateur 256 : la somme de ces trois produits partiels, étant composée de 847 pris un nombre de fois marqué, par 200 plus 50 plus 6, ou par 256, sera le produit

total de 847 par 256. Voyons donc comment on peut former ces trois produits partiels ; l'ordre est indifférent ; mais, pour nous conformer à l'usage, nous commencerons par le produit correspondant aux unités du multiplicateur ; 1°. le produit partiel de 847 par 6, est 5082 ; j'écris donc 5082 sous le multiplicateur, en faisant correspondre les unités de même ordre ; 2°. le produit partiel de 847 par 50 est composé, de 50 fois 847, ou de 847 fois 50 (n° 59), ou de 847 fois 5 *dixaines* ; mais, dans toute multiplication, les unités du produit sont de la nature de celles du multiplicande (n° 50) ; les unités du produit du multiplicande 5 dixaines par le multiplicateur 847, seront donc des unités de dixaines, et leur nombre sera, 847 fois 5, ou 5 fois 847 ; cela nous apprend que pour multiplier 847 par 50, il suffit de multiplier 847 par 5, et de poser le produit 4235 au rang des dixaines, ce qui revient à poser le premier chiffre 5 de ce produit, sous le second chiffre 5, du multiplicateur, qui a donné ce produit partiel ; 3°. on suivra une marche analogue, pour former le produit partiel de 847 par 200. Un premier changement d'ordre dans les facteurs, démontrera que les unités du produit sont des centaines ; un nouveau changement démontrera que leur nombre est 2 fois 847 ; en effet, le produit de 847 par 200 se compose, de 200 fois 847, ou de 847 fois 200, ou enfin de 847 fois 2 *centaines* ; les unités de ce dernier produit seront donc des centaines (n° 50, 2°.), et leur nombre sera 847 fois 2, ou 2 fois 847 ; la multiplication partielle de 847 par 200, se réduit donc à multiplier 847 par 2, et à placer le produit 1694 au rang des centaines, ce qui revient à placer le 1er chiffre 4 de ce produit sous le multiplicateur 2 qui l'a fourni ; 4°. la somme 216832, des trois produits partiels ainsi obtenus, compose le produit total. On voit donc que pour multiplier 847 par 256, il suffit de multiplier le multiplicande 847, par chacun des chiffres 2, 5, 6, du multiplicateur, et de placer chaque produit partiel sous le chiffre qui a servi de multiplicateur : la somme des produits partiels ainsi disposés, donne le produit total (*).

(*) Voici un raisonnement qui conduit aux mêmes résultats ; le produit du

64. Si quelques chiffres du multiplicateur étaient zéros, on devrait omettre les produits partiels correspondans ; on peut s'en convaincre par l'exemple suivant :

5 782	multiplicande.
304	multiplicateur.
23 128	produit partiel de 5782 par 4.
1 7346..	produit partiel de 5782 par 3.
1 757 728	somme des produits partiels, ou produit total.

Le produit de 5782 par 304, se compose de 5782, pris 300 fois plus 4 fois ; le produit partiel de 5782 par 4, est 23128; le produit partiel de 5782 par 300, est équivalent à 5782 fois 300, ou à 5782 fois 3 *centaines* ; il exprime donc des centaines, et leur nombre est 5782 fois 3, ou 3 fois 5782 ; ainsi la multiplication partielle de 5782 par 300, se réduit à multiplier 5782 par 3, et à placer le produit 17 346 au rang des centaines, ce qui revient à mettre le premier chiffre 6 de ce produit, sous le chiffre 3, du multiplicateur, qui l'a fourni. La somme des deux produits partiels ainsi disposés, donnera 1 757 728 pour le produit total. On voit que le chiffre 0, du multiplicateur total 304, n'a pas été employé comme multiplicateur partiel ; on a seulement multiplié 5782 par les chiffres significatifs 4 et 3 du multiplicateur, et l'on a mis les premiers chiffres 8 et 6 des deux produits partiels 23128, et 17 346, sous les chiffres 4 et 3, qui ont servi de multiplicateurs partiels.

---

multiplicande 847 par le multiplicateur 256, est le même que celui du multiplicande 256 par le multiplicateur 847 (n° 59). Pour effectuer cette dernière multiplication, il suffit de prendre 847 fois chacune des parties, 2 centaines 5 dixaines 6 unités, du multiplicande ; or 847 fois 6 unités donnent des unités, leur nombre est 847 fois 6, ou 6 fois 847 ; 847 fois 5 dixaines donnent des dixaines, dont le nombre est 847 fois 5, ou 5 fois 847 ; enfin 847 fois 2 centaines donnent un nombre de centaines exprimé, par 847 fois 2, ou par 2 fois 847. Conséquemment le produit de 847 par 256, est composé de 6 fois 847 unités, de 5 fois 847 dixaines, et de 2 fois 847 centaines ; il suffit donc de multiplier le multiplicande 847 par chacun des chiffres 6, 5, 2 du multiplicateur, chaque produit partiel sera composé d'unités de l'espèce du chiffre du multiplicateur qui l'aura fourni ; ensorte qu'il suffit de placer le premier chiffre de chaque produit partiel sous le chiffre qui a servi de multiplicateur. La somme des produits partiels ainsi disposés, donne le produit total.

65. Comme les raisonnemens que nous venons d'employer, pourraient s'appliquer à tous les nombres, nous en déduirons cette règle générale. *Pour multiplier un nombre par un autre; écrivez le multiplicateur sous le multiplicande, et mettez un trait sous ces deux nombres pour les séparer des produits partiels; l'opération ainsi disposée, pour l'effectuer, multipliez le multiplicande successivement par chaque chiffre significatif du multiplicateur, en plaçant le premier chiffre de chaque produit partiel sous le chiffre qui a servi de multiplicateur; mettez un trait sous les produits partiels ainsi disposés; leur somme, que vous écrirez dessous, composera le produit total. Dans la formation des produits partiels du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, on fait usage de l'abréviation indiquée dans le n° 34, qui consiste à ne pas répéter continuellement le nom des unités sur lesquelles on opère.* Si l'on applique cette règle à la formation du produit de 920 784 par 30 064, on trouvera qu'il est égal à 27 682 450 176; voici le détail du calcul,

920 784	multiplicande.
30 064	multiplicateur.
3 683 136	produits partiels.
55 247 04.	
27 623 52. . . .	
27 682 450 176	somme des produits partiels, ou produit total.

Après avoir écrit le multiplicateur sous le multiplicande, et avoir mis un trait sous ces deux nombres, pour les séparer des produits partiels, on a multiplié le multiplicande successivement par chacun des chiffres significatifs 4, 6, 3, du multiplicateur, et l'on a placé les premiers chiffres, 6, 4, 2, de chaque produit partiel, sous les chiffres 4, 6, 3, qui ont servi de multiplicateurs; la somme des produits partiels ainsi disposés, a donné le produit total 27 682 450 176. Voici comment on a formé les produits partiels; pour multiplier le multiplicande par le 1[er] chiffre 4 du multiplicateur, on a dit, d'après l'abréviation indiquée dans le n° 62; 4 fois 4 donnent 16, je pose 6 sous le premier chiffre du multiplicateur, et je retiens 1; 4 fois 8 font 32 et 1 de retenue font 33, j'écris 3 et je retiens 3; 4 fois 7 donnent 28

et 3 de retenue font 31, j'écris 1 et je retiens 3; 4 fois o font o et 3 de retenue font 3, que j'écris; 4 fois 2 font 8, je pose 8; 4 fois 9 font 36, je pose 6 et j'avance 3; pour former le produit partiel du multiplicande, par le second chiffre significatif 6 du multiplicateur, on a dit : 6 fois 4 font 24, je pose les 4 unités de ce produit sous le 2ème chiffre du multiplicateur, et je retiens les 2 dixaines; je dis ensuite, 6 fois 8 font 48 et 2 de retenue donnent 50, je pose o et je retiens 5; 6 fois 7 font 42 et 5 de retenue font 47, je pose 7 et je retiens 4; 6 fois o font o et 4 de retenue donnent 4, que j'écris; 6 fois 2 font 12, je pose 2 et je retiens 1; 6 fois 9 font 54, et 1 de retenue font 55, je pose 5 et j'avance 5. Enfin, pour former le 3ème produit partiel du multiplicande par 3, qui est le 3ème chiffre significatif du multiplicateur, on a dit : 3 fois 4 font 12, je pose les deux unités de ce produit sous le chiffre 3 qui a servi de multiplicateur, et je retiens la dixaine; je dis ensuite, 3 fois 8 font 24 et 1 de retenue font 25, je pose 5 et je retiens 2; 3 fois 7 font 21, et 2 de retenue font 23; je pose 3 et je retiens 2; 3 fois o font o, et 2 de retenue font 2, que j'écris; 3 fois 2 font 6, que je pose; 3 fois 9 font 27, je pose 7 et j'avance 2. Après avoir mis un trait sous les produits partiels, ainsi disposés, on a effectué leur addition d'après la règle du n° 33, et l'on a dit : la colonne des unités n'en contient que 6, j'écris donc 6; passant aux colonnes suivantes, on a dit : 4 et 3 font 7, je pose 7; 1 et o donnent 1, que j'écris; 7 et 3 font 10, je pose o et je retiens 1; 1 de retenue et 8 font 9 et 4 font 13 et 2 font 15, je pose 5 et je retiens 1; 1 de retenue et 6 font 7 et 2 font 9 et 5 font 14, je pose 4 et je retiens 1; 1 de retenue et 3 font 4 et 5 font 9 et 3 font 12, je pose 2 et je retiens 1; 1 et 5 font 6 et 2 font 8, que je pose; enfin, comme les colonnes suivantes ne contiennent chacune qu'un seul chiffre, je pose ces chiffres, qui sont 6, 7 et 2; j'ai alors 27 682 450 176, pour la somme des produits partiels; cette somme est le produit total demandé.

66. *Lorsque le premier chiffre à droite d'un produit partiel dépasse le dernier chiffre du produit partiel précédent; pour mieux mettre en évidence l'ordre de ses unités, on met sur sa*

droite autant de zéros qu'il y a de chiffres sur la droite du chiffre qui sert de multiplicateur partiel; ce procédé sert à déterminer exactement la position de chaque produit partiel; en voici un exemple, où l'on a *barré* les zéros mis sur la droite de chaque produit partiel :

	9 274 568	Multiplicande.
	4 000 000 003 007	Multiplicateur.
	64 921 976	produits partiels
	27 823 704 ø ø ø	
	37 098 272 ø ø ø ø ø ø ø ø ø ø ø ø	
	37 098 272 027 888 625 976	

On a d'abord multiplié le multiplicande par 7, premier chiffre à droite du multiplicateur, et l'on a posé le 1er chiffre 6, du produit partiel 64921976, sous le chiffre 7, qui avait servi de multiplicateur; passant au second chiffre significatif du multiplicateur, on a multiplié le multiplicande par 3, ce qui a donné 27823704 pour second produit partiel; et comme le multiplicateur partiel 3, est précédé des trois chiffres 0, 0, 7, on a mis trois zéros sur la droite du premier chiffre 4 du produit partiel; passant au 3ème chiffre significatif du multiplicateur, on a multiplié le multiplicande par 4; ce qui a donné 37098272, et comme le multiplicateur partiel 4, est précédé de 12 chiffres, on a mis 12 zéros sur la droite du produit partiel correspondant; l'addition des trois produits partiels ainsi disposés, a donné le produit total. On voit que les zéros placés sur la droite de chaque produit partiel, ne servent qu'à fixer la position du premier chiffre de chaque produit, sous le chiffre qui a servi de multiplicateur; c'est ainsi que par le moyen des zéros les premiers chiffres 6, 4, 2, des produits partiels, se trouvent respectivement sous les chiffres 7, 3, 4, qui ont servi de multiplicateurs partiels. Les commençans pourront s'exercer sur les exemples suivans, où l'on a fait usage des zéros. Les zéros placés sur la droite de chaque produit partiel sont *barrés*, ce qui les distingue des zéros qui peuvent faire partie des produits partiels.

		2 000 004	
79 004	5 098	7 389	
5 098	79 004	18 000 036	7 389
632 032	20 392	160 000 32ø	2 000 004
7 110 36ø	45 882 øøø	600 001 2øø	29 556
395 020 øøø	356 86ø øøø	14 000 028 øøø	14 778 øøø øøø
402 762 392	402 762 392	14 778 029 556	14 778 029 556

Ces produits vérifient l'exactitude du principe établi dans le n° 59 ; on voit que chacun d'eux n'a pas changé, en prenant le multiplicande pour multiplicateur, et le multiplicateur pour multiplicande ; ensorte que les produits, de 79 004 par 5 098, et de 2 000 004 par 7389, sont toujours les mêmes, en changeant l'ordre des facteurs ; mais comme les produits partiels qui composent ces produits égaux, sont essentiellement différens, on reconnaît qu'il a été très-nécessaire de démontrer *à priori*, que ces produits doivent être égaux. Par ce moyen, le calcul ne guide plus le raisonnement ; on sait d'avance que le changement d'ordre des facteurs doit conduire à des résultats égaux, et conséquemment si cela n'arrivait pas, on serait certain d'avoir commis une *erreur de calcul.* Tels sont les avantages du raisonnement sur le calcul ; le premier ne trompe jamais, le second est sujet à de grandes erreurs.

67. L'ordre dans lequel on effectue le produit de deux facteurs étant indifférent, et chaque chiffre significatif du multiplicateur donnant un produit partiel, *on abrégera toujours les calculs en choisissant pour multiplicateur le nombre qui contient le moins de chiffres significatifs*. S'il s'agissait, par exemple, de former le produit des deux nombres 20 000 000 005 et 658 978, on choisirait pour multiplicateur le nombre 20 000 000 005, qui contient le moins de chiffres significatifs, et les deux produits partiels, du multiplicande 658 978 par les chiffres 5 et 2 du multiplicateur, additionnés suivant l'ordre qui convient à leurs unités, donneraient 13 179 560 063 294 890, pour le produit demandé.

On a profité de ces remarques dans les multiplications suivantes :

Multiplicandes	394	394	394	394
Multiplicateurs	10	100	1 000	10 000
Produits	3940	39 400	394 000	3 940 000

68. La comparaison de ces produits avec leurs facteurs, montre que, *pour multiplier un nombre*, *par* 10, *ou par* 100, *ou par* 1000, *ou par* 10000, *il suffit de mettre sur sa droite un zéro, ou deux zéros, ou trois zéros, ou quatre zéros.* On peut s'en rendre compte à l'aide du raisonnement suivant. Soit le nombre 394; si l'on met un zéro sur sa droite, il deviendra 3940; alors le chiffre 4, qui exprimait des unités dans le premier nombre, exprime des dixaines dans le second; il a donc reçu une valeur dix fois plus grande; de même, le chiffre 9 qui exprimait des dixaines, exprime des centaines, il a donc reçu une valeur dix fois plus grande; enfin, le chiffre 3, qui exprimait des centaines, exprime des mille, il a donc pris une valeur dix fois plus grande; le zéro placé sur la droite du nombre 394, a donc rendu toutes ses parties dix fois plus grandes; mais pour multiplier un nombre par 10, il suffit de multiplier ses parties par 10 (n° 60); l'effet du zéro placé sur la droite de 394, est donc de multiplier ce nombre par 10. On verrait de la même manière, que toutes les parties du nombre 39400 sont 100 fois plus grandes que celles du nombre 394, et que parconséquent, pour multiplier un nombre par 100, il suffit de mettre deux zéros sur sa droite. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à tous les exemples de cette espèce; nous établirons en principe, que, *pour multiplier un nombre par l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, il suffit de mettre ces zéros sur la droite du multiplicande.* Ainsi, pour multiplier 34956 par 100 000, je mets les 5 zéros, qui suivent l'unité, sur la droite du multiplicande, et j'ai le produit demandé 3 495 6øø øøø. La multiplication de 300 par 1 øøø øøø, s'exécutera en mettant les six zéros, qui suivent l'unité, sur la droite du multiplicande 300; le résultat 300 øøø øøø, exprimera le produit demandé. On trouvera de la même manière; que le produit de 100

par 1000 est 100 øøø, que celui de 1001 par 100 est 100 1øø, que celui de 39 045 par 10 000 000 est 390 45ø øøø øøø.

69. Lorsqu'on sait former le produit de deux facteurs, il est très-aisé d'en déduire la formation du produit d'un plus grand nombre de facteurs. Si l'on demandait, par exemple, le produit des trois nombres 4, 2, 6; après avoir eu 8, pour le produit de 4 par 2, ou de 2 par 4; on aurait 48, pour le produit de 8 par 6, ou de 6 par 8; ensorte que 48 est le produit demandé; on trouverait encore 48 dans quelqu'ordre qu'on effectuât le produit des facteurs 4, 2, 6; ainsi, l'on pourrait dire : 6 fois 2 font 12 : 4 fois 12 font 48; ou encore, 4 fois 6 font 24, 2 fois 24 font 48. Pour obtenir le produit 120 des quatre facteurs 3, 2, 4, 5, on dira; 2 fois 3 font 6, 4 fois 6 font 24, 5 fois 24 font 120; on parviendrait au même résultat dans quelqu'ordre qu'on effectuât les multiplications; en général, *pour former le produit de plusieurs nombres, il suffit de multiplier le premier nombre par le second; on multiplie ensuite le produit des deux premiers nombres par le troisième, puis ce dernier produit par le quatrième nombre, et ainsi de suite, jusqu'à l'entier épuisement des facteurs; le dernier de ces produits est celui demandé.* On peut reconnaître sur des exemples, que *dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications, le produit ne change pas*; le produit des trois nombres 348, 27, 501, effectué dans un ordre quelconque, est toujours 4 707 396; celui des nombres 37, 4, 78, 345, est toujours 3 982 680; celui des nombres 12, 24, 36, 48, 60, est toujours 29 859 840; celui des nombres 111, 222, 333, 444, est toujours 3 643 368 984, etc.

70. Comme nous aurons souvent besoin par la suite de soustraire d'un nombre un produit qui n'est pas formé, mais dont on connaît seulement les facteurs, nous croyons devoir terminer la multiplication par l'exposé d'une méthode abrégée qui sert à retrancher un produit, à mesure qu'on l'effectue; et, pour commencer par un exemple simple, nous nous proposerons d'ôter 3 fois 1221 de 9876. Le procédé le plus naturel serait de retrancher 3 fois de suite, 1221 de 9876, en disant : de 9876 ôtez 1221, reste 8655; de 8655 ôtez 1221, reste 7434; enfin de

7434 ôtez 1221, reste 6213. Ce dernier reste serait évidemment le résultat demandé; mais on l'obtiendra plus promptement, en effectuant d'abord le produit de 1221 par 3, qui est 3663, et le retranchant ensuite de 9876; car on trouverait directement le reste 6213. Voici la simplification dont cette dernière opération est susceptible; du nombre 9876, on doit ôter 3 fois 1221, c'est-à-dire, 3 fois 1 unité, 3 fois 2 dixaines, 3 fois 2 centaines, 3 fois 1 mille : on peut donc effectuer la soustraction totale, en retranchant successivement chaque produit partiel, des unités de même ordre du nombre 9876; par ce moyen, chaque reste partiel donnera un chiffre du reste total. Ainsi, après avoir disposé le calcul, comme on le voit ici

de	9876
ôtez 3 fois	1221
reste	6213.

On dira : 3 fois 1 donne 3; 3 ôté de 6, donne 3 pour reste; je pose 3 au rang des unités du résultat. Passant aux dixaines, on dira : 3 fois 2 dixaines donnent 6 dixaines que j'ôte de 7 dixaines, reste 1 dixaine : j'écris donc 1 au rang des dixaines du résultat; 3 fois 2 centaines, ôtées de 8 centaines, donnent le reste 2 centaines : j'écris 2 au rang des centaines. Enfin, 3 fois 1 mille, ôtés de 9 mille, donnent 6 mille : je pose 6 au rang des mille; j'ai alors 6213 pour le reste demandé.

Dans la pratique, on se dispense de répéter continuellement le nom de chaque ordre d'unité. Ainsi, dans notre exemple, on dira seulement : de 6 ôtez 3 fois 1, reste 3; de 7 ôtez 3 fois 2, ou 6, reste 1; de 8 ôtez 3 fois 2, ou 6, reste 2; enfin de 9, ôtez 3 fois 1, reste 6. Dans cet exemple; la soustraction de chaque produit partiel n'a exigé aucun emprunt. Voyons comment on doit opérer, lorsque ces soustractions exigent des emprunts. Soit proposé, par exemple, d'ôter le produit 5 fois 1469, du nombre 8979; on pourrait obtenir le résultat, en ôtant 5 fois de suite 1469 de 8979, ou en effectuant d'abord le produit de 1469 par 5, et le retranchant ensuite de 8979; ce qui donnerait, dans les deux cas, 1634 pour reste; mais, d'après

la méthode

la méthode abrégée que nous venons d'exposer, on dira : du nombre 8979, on doit retrancher 5 fois 1469, c'est-à-dire, 5 fois 9 unités, 5 fois 6 dixaines, 5 fois 4 centaines et 5 fois 1 mille : on peut donc effectuer la soustraction du produit total, en effectuant successivement les soustractions des produits partiels ; et comme ces soustractions exigent des emprunts, on suivra une marche analogue à celle indiquée dans le n° 47, *au lieu de diminuer le chiffre supérieur sur lequel on aura emprunté, on augmentera le nombre à soustraire de l'emprunt*, ce qui produit le même effet ; ainsi, après avoir disposé le calcul de la manière suivante :

de	8979
ôtez 5 fois	1469
reste	1634

Je dirai : 5 fois 9 font 45 ; j'en rends la soustraction possible en empruntant 4 dixaines sur les 7. Cet emprunt joint aux 9 unités donne 49; j'en ôte 45, reste 4, que je pose; passant aux dixaines, je dis : 5 fois 6 dixaines font 30 dixaines ; pour rendre la soustraction possible, j'emprunte 3 centaines, ou 30 dixaines, sur les 9 ; ces 30 dixaines jointes aux 7 dixaines qu'il y avait déjà, donnent 37 dixaines ; au lieu de les diminuer des 4 dixaines empruntées dans la soustraction précédente, pour en ôter le produit partiel 30 dixaines, ce qui donnerait 3 dixaines de reste, j'augmenterai les 30 dixaines à soustraire de l'emprunt 4 dixaines, et j'ôterai 34 dixaines de 37 dixaines, ce qui me donnera également 3 dixaines de reste ; j'écrirai donc 3 au rang des dixaines du résultat. Le produit partiel 5 fois 4 centaines, ou 20 centaines, ne pouvant s'ôter des 9 centaines du nombre supérieur, j'emprunterai 2 mille, ou 20 centaines, sur les 8 ; cet emprunt ajouté aux 9 centaines qu'il y avait déjà, donne 29 centaines ; au lieu de les diminuer des 3 centaines empruntées dans la soustraction précédente, j'ajoute cet emprunt aux 20 centaines à soustraire, et j'ai alors 23 centaines à ôter de 29 centaines ; cela me donne 6 centaines : j'écris donc 6 au rang des centaines du reste ; enfin le produit partiel 5 fois 1 mille, ou 5 mille, augmenté du dernier emprunt 2 mille, donne 7 mille que j'ôte des 8 mille du

nombre supérieur; reste 1 mille; j'écris donc 1 au rang des mille du résultat. L'opération est alors terminée, et j'ai 1634 pour le reste cherché. *Dans la pratique, on omet les noms des différens ordres d'unités*, et l'on dit seulement : 5 fois 9 font 45, de 49 reste 4; 5 fois 6 font 30, et 4 d'emprunt font 34, de 37 reste 3; 5 fois 4 font 20, et 3 d'emprunt font 23 que j'ôte de 29, reste 6; enfin 5 fois 1 font 5, et 2 d'emprunt font 7, de 8 reste 1; les restes partiels 4, 3, 6, 1, écrits les uns à côté des autres, et par ordre, donnent le reste total 1634. Afin de familiariser avec cette dernière méthode, nous l'appliquerons aux exemples suivans :

1[er] *Exemple.*		2[ème].		3[ème].	
De....	372 457	De....	90 045 670 001	De....	30 000 000 001
ôtez 3 fois	21 341	ôtez 9 fois	38 000 989	ôtez 9 fois	999 999
Reste..	308 434	Reste..	89 703 661 100	Reste..	29 991 000 010

Dans le 1[er] exemple, où il s'agissait de retrancher le produit 3 fois 21 341 du nombre 372 457, on a soustrait successivement et par ordre les produits partiels, 3 fois 1 unité, 3 fois 4 dixaines, 3 fois 3 centaines, 3 fois 1 mille, 3 fois 2 dixaines de mille, qui composent le produit total 3 fois 21 341, et l'on a dit : 3 fois 1 ôté de 7 donne le reste 4; 3 fois 4, ou 12, ôté de 15 donne 3 de reste; 3 fois 3 font 9, et 1 d'emprunt font 10, qui, ôtés de 14, donnent 4 pour reste; 3 fois 1 font 3, et 1 d'emprunt font 4; 4 ôtés de 12 reste 8; 3 fois 2 font 6 et 1 d'emprunt font 7, qui, ôtés de 7, donnent le reste 0; enfin, comme tous les produits partiels sont ôtés du nombre 372 457, qui contient encore 3 centaines de mille, non employées dans les soustractions précédentes, on a 3 centaines de mille pour dernier reste; réunissant alors les restes partiels 4, 3, 4, 8, 0, 3, et observant qu'ils expriment respectivement des unités, des dixaines, des centaines, des mille, des dixaines de mille, des centaines de mille; on aura le reste total 308 434. On fût parvenu au même résultat en commençant par effectuer le produit 3 fois 21 341; on eût trouvé 64 023; ce produit ôté de 372 457, eût donné le même reste 308 434; il est bien évident que ces deux méthodes doivent toujours donner le même résultat, car, au moyen de l'une, on ôte le produit total après l'avoir effectué, et au moyen de

l'autre on ôte successivement les produits partiels qui composent ce même produit total. Les calculs relatifs aux deux autres exemples ont été exécutés d'une manière analogue. On sentira l'utilité de la méthode abrégée que nous venons d'indiquer à l'article de la *division* (n° 88, page 87). Si les deux facteurs du produit à soustraire excédaient 9, il serait alors plus simple d'effectuer le produit avant de le soustraire; ainsi, pour soustraire 87 fois 78 de 39 897, il sera plus simple de former d'abord le produit de 87 par 78 qui est 6786; ce produit retranché de 39 897 donnera 33 111, pour le reste cherché.

DIVISION.

71. LA multiplication nous a servi à composer un produit quand nous connaissions ses deux facteurs; la division enseigne à résoudre le problême inverse, c'est-à-dire, à décomposer un produit quand on connaît un de ses facteurs; alors le produit des deux facteurs prend le nom de *dividende*, le facteur connu s'appelle *diviseur*, et le facteur qu'il s'agit de découvrir se nomme *quotient*. On peut donc dire, que *le but de la division est, connaissant un produit, nommé* DIVIDENDE, *et l'un de ses facteurs, nommé* DIVISEUR, *de trouver l'autre facteur nommé* QUOTIENT. Par exemple, si nous nous proposions, connaissant le produit 6, des facteurs 2 et 3, et le facteur 3, de découvrir l'autre facteur 2; le produit 6 prendrait le nom de *dividende*, le facteur connu 3 s'appellerait *diviseur*, le facteur 2 qu'il s'agit de découvrir se nommerait *quotient*, et l'opération qui donnerait ce quotient se nommerait *division*. De même, si l'on connaissait le produit 21 de deux facteurs, et 7 qui est l'un de ces facteurs, l'opération qui servirait à découvrir l'autre facteur 3, serait une division dans laquelle, 21 serait le dividende, 7 le diviseur et 3 le quotient.

D'après la définition de la division; 1°. *Lorsque le diviseur est abstrait, le quotient est de la nature du dividende*, car ce quotient multiplié par le diviseur, doit reproduire le dividende;

par exemple; si, connaissant le produit 18 dixaines, des facteurs 9 dixaines et 2, et le facteur 2, on proposait de découvrir l'autre facteur 9 dixaines; le produit 18 dixaines prendrait le nom de dividende, le facteur connu 2, s'appellerait diviseur, et le facteur 9 dixaines, qu'il s'agit de découvrir, serait le quotient; on voit que le quotient 9 dixaines est de la nature du dividende 18 dixaines. On verrait de même que la division, de centaines, de mille, de dixaines de mille, par un diviseur abstrait, doit donner, des centaines, des mille, des dixaines de mille, pour quotiens correspondans; 2°. *Lorsque le dividende étant zéro, le diviseur est un nombre, le quotient est zéro*, car le quotient zéro multiplié par le diviseur, qui est un nombre, donnera un produit zéro (page 48, n° 50, 3°) égal au dividende zéro; il en résulte que, *zéro est exactement divisible par tous les nombres et donne zéro pour quotient.* Ces propriétés seront utiles dans la suite.

72. Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient (71), on est certain que le diviseur pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient donne le dividende, ensorte que *le quotient marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende* (*). Ainsi, quand le dividende étant 6, le diviseur est 3, le quotient 2 exprime que le dividende 6 contient 2 fois le diviseur 3; de même le quotient 3, de 21 par 7, indique que le diviseur 7 est contenu 3 fois dans le dividende 21. D'après cette remarque, *le quotient peut toujours s'obtenir par des soustractions répétées*, car, en retranchant successivement le diviseur du dividende, le nombre de soustractions faites pour arriver à un reste zéro, marquera combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, (il est bien évident qu'un nombre peut être retranché d'un autre autant de fois qu'il y est contenu).

(*) Le mot *quotient* vient du mot latin *quotiès*, qui signifie *combien de fois*. Cette dénomination est exacte, lorsqu'on considère des nombres abstraits, ou des nombres de même nature; parceque dans ces deux cas, le quotient est un nombre abstrait qui marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende; nous verrons, dans la théorie des nombres concrèts, comment on doit interpréter un quotient concrèt.

Ainsi, pour diviser 6 par 3, ou ce qui revient au même, pour chercher combien de fois le diviseur 3 est contenu dans le dividende 6, je retrancherai une 1ère fois 3 de 6, ce qui donnera le 1er reste 3; de ce reste, j'ôterai encore 3, ce qui me donnera zéro pour 2ème reste; je dirai alors : puisqu'après avoir retranché 2 fois 3 de 6, il n'est rien resté, 3 était contenu 2 fois dans 6, le quotient de 6 par 3 est donc 2. De même, pour diviser 21 par 7, ou ce qui revient au même, pour chercher combien de fois le dividende 21 contient le diviseur 7; je retrancherai 7 de 21; du reste 14, j'ôterai encore 7, restera 7; de ce dernier reste j'ôterai pour la 3ème fois le diviseur 7; le reste zéro, obtenu après avoir ôté 3 fois 7 de 21, m'apprend que 21 contient 3 fois 7; le quotient cherché de 21 par 7 est donc 3. On pourrait suivre la même méthode pour des nombres plus grands, le calcul serait seulement plus long. Si l'on proposait, par exemple, de diviser 4235 par 847, on retrancherait le diviseur 847 du dividende 4235, ce qui donnerait le 1er reste 3388; on en retrancherait 847, ce qui donnerait 2541 pour 2ème reste; 847 ôté de ce 2ème reste donnerait le 3ème reste 1694; celui-ci diminué de 847 donnerait le 4ème reste 847; enfin ôtant 847 de ce 4ème reste, on aurait zéro pour 5ème reste; on dirait alors; comme après avoir ôté 5 fois 847 de 4235, il n'est rien resté, c'est une preuve que le diviseur 847 était contenu 5 fois dans le dividende 4235; le quotient de 4235 par 847 est donc 5.

73. Sans multiplier davantage les exemples, on aperçoit aisément que *la division pourrait toujours ainsi s'effectuer par des soustractions répétées;* sous ce point de vue, la division ne serait point une nouvelle règle; mais comme, en suivant ce procédé, l'opération devient excessivement longue et pénible quand le dividende contient un grand nombre de fois le diviseur (*),

(*) En considérant, 4235 comme dividende, et 847 comme diviseur, nous avons reconnu, à l'aide de 5 soustractions successives, que le dividende contenait 5 fois le diviseur, et que parconséquent le quotient était 5. Si, changeant l'ordre des facteurs, nous eussions pris 4235 pour dividende, et 5 pour diviseur; comme 4235 contient 847 fois 5, nous n'eussions obtenu le quotient qu'après avoir effectué 847 soustractions, ce qui eût été excessivement long. Cet

on est naturellement conduit à la recherche d'une méthode plus abrégée ; et c'est à cette méthode qu'appartient le nom de division : nous allons parcourir ses différens cas, en suivant l'ordre des difficultés.

74. *Quand le diviseur et le quotient seront des nombres d'un seul chiffre, le dividende, qui est leur produit, sera compris dans la table de Pythagore* (53) ; car elle contient tous les produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre ; *cette table donnera donc le quotient, quand le dividende et le diviseur seront connus* ; *il suffira pour cela de chercher le dividende dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur, le quotient sera en tête de la colonne verticale où l'on aura trouvé le dividende* ; ainsi, par exemple, pour obtenir le quotient de 48 par 8, on dira : comme dans la table de Pythagore, la rangée horizontale qui commence par le diviseur 8, renferme les produits de 8 par tous les nombres d'un seul chiffre, elle doit contenir 48, qui est par hypothèse le produit de 8 par un nombre d'un seul chiffre ; on voit effectivement, en suivant cette rangée, que 48 s'y trouve, et qu'il est le produit de 8 par 6 ; le quotient cherché, de 48 par 8, est donc le nombre 6 qui se trouve en tête de la colonne verticale où s'est trouvé le dividende 48. Si l'on veut diviser 21 par 3, on cherchera le dividende 21 dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur 3 ; le nombre 7, qui est en tête de la colonne verticale où s'est trouvé le dividende 21, est le quotient cherché. On trouvera, de la même manière, que le quotient de 72 par 8 est 9, que celui de 56 par 7 est 8, que 81 divisé par 9 donne 9 pour quotient ; et ainsi de suite.

75. Il est un cas qui pourrait embarrasser, c'est celui où le dividende ne se trouverait pas dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur. Cela peut arriver dans deux circonstances ; 1°. si l'on propose de diviser 48 par 4, on cherchera le di-

---

exemple suffit pour faire apercevoir que cette méthode deviendrait impraticable, si le diviseur était contenu un très-grand nombre de fois dans le dividende ; car il faudrait effectuer autant de soustractions partielles, que le diviseur est contenu de fois dans le dividende.

vidende 48 dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur 4, on ne l'y trouvera pas, on verra seulement qu'il surpasse le produit 36, du diviseur 4 par 9; le quotient demandé surpasse donc 9; le calcul confirme cette observation; après avoir diminué 48, de 12 fois 4, au moyen de 12 soustractions, on obtient zéro pour dernier reste; 48 se compose donc de 12 fois 4; le quotient de 48 par 4 est donc 12. En général, *lorsque le dividende surpasse le dernier nombre de la rangée horizontale qui commence par le diviseur, on est assuré que le quotient demandé surpasse* 9. Nous verrons bientôt comment on peut alors l'obtenir; 2°. si l'on voulait diviser 27 par 6, on chercherait inutilement le dividende 27 dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur 6; on reconnaîtrait seulement que le dividende 27, est plus grand que le produit 24, du diviseur 6 par 4, et qu'il est moindre que le produit 30, du diviseur 6 par 5; le quotient demandé est donc plus grand que 4 et moindre que 5; il n'est donc pas assignable en nombre entier (*). Conséquemment, lorsque le dividende est compris entre deux nombres consécutifs, de la rangée horizontale qui commence par le diviseur, on est certain que le quotient est moindre que 9, et qu'il n'est pas assignable en nombre entier.

76. Si l'on réunit ce qui précède, on verra, que *la table de* PYTHAGORE *jouit des propriétés suivantes;* 1°. *lorsque le dividende sera dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur, le quotient se trouvera en tête de la colonne verticale, où l'on aura trouvé le dividende* (74); 2°. *lorsque le dividende surpassera le plus grand nombre de la rangée horizontale qui commence par le diviseur, on sera certain que le quotient surpasse* 9; 3°. *lorsque le dividende sera compris entre deux nombres consécutifs de la rangée horizontale qui commence par le diviseur,*

(*) Comme le quotient de 27 par 6 tombe entre les deux nombres entiers 4 et 5 qui ne diffèrent que de l'unité, il ne peut être un nombre entier, car on a vu (n°3, pag. 2), que deux nombres entiers qui ne diffèrent que de l'unité, ne peuvent jamais comprendre aucuns nombres entiers. En général; *un quotient compris entre deux nombres entiers, qui ne diffèrent que de l'unité, n'est pas assignable en nombre entier.*

on sera certain que le quotient est moindre que 9, et qu'il n'est pas assignable en nombre entier.

77. *La seule inspection du dividende et du diviseur suffit pour déterminer directement si le quotient est un nombre d'un seul chiffre;* en effet, comme le diviseur multiplié par le quotient doit reproduire le dividende, lorsque le produit du diviseur par 10 surpasse le dividende, on doit en conclure que le quotient est moindre que 10, ce quotient est donc alors un nombre d'un seul chiffre; quand au contraire le produit du diviseur par 10, n'excède pas le dividende, on est certain que le quotient n'est pas moindre que 10, ce quotient a donc alors plus d'un chiffre; mais, pour multiplier le diviseur par 10, il suffit de mettre un zéro sur sa droite (68), conséquemment: *toutes les fois que le diviseur suivi d'un zéro vers la droite surpasse le dividende, on est certain que le quotient est un nombre d'un seul chiffre; et quand au contraire le diviseur suivi d'un zéro vers la droite n'excède pas le dividende, on est certain que le quotient a plus d'un chiffre.* Ces propriétés sont mises en évidence dans les exemples suivans: le quotient de 72 par 9 doit être un nombre d'un seul chiffre; car le diviseur 9 suivi d'un zéro vers la droite, donne le nombre 90, qui surpasse le dividende 72; le quotient est effectivement 8; dans la division de 27 par 3, comme le diviseur 3 suivi d'un zéro donne le nombre 30, qui surpasse le dividende 27, on est assuré que le quotient est un nombre d'un seul chiffre; pour l'obtenir au moyen de la table de multiplication, on cherchera le dividende 27 dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur 3, le premier chiffre 9, de la colonne verticale où se trouve 27, est le quotient demandé; si l'on avait 48 à diviser par 4, on observerait que le diviseur 4 suivi d'un zéro vers la droite, donne le nombre 40, qui n'excède pas le dividende 48, et que parconséquent le quotient a plus d'un chiffre; ce quotient est effectivement 12. Enfin, si l'on voulait diviser 60 par 6, on observerait que le diviseur 6 suivi d'un zéro vers la droite, donne le nombre 60, qui n'excède pas le dividende 60; le quotient doit donc avoir plus d'un chiffre; ce quotient est effectivement 10.

78. La table des produits deux à deux des nombres d'un seul

chiffre nous a fourni le quotient, quand celui-ci et le diviseur étaient des nombres d'un seul chiffre. On verrait, par des raisonnemens absolument semblables, que si l'on continuait cette table jusqu'à ce qu'elle contînt tous les produits deux à deux des nombres de deux chiffres, elle fournirait le quotient, quand celui-ci et le diviseur n'auraient pas plus de deux chiffres, et qu'en général : *si l'on étendait la table de multiplication jusqu'à ce qu'elle contînt les produits deux à deux de tous les nombres, on y trouverait directement le quotient, en cherchant le dividende dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur, et prenant le premier nombre de la colonne verticale où se trouve le dividende; car ce nombre serait le quotient demandé.* Mais il est de toute impossibilité de former cette table ; car la suite des nombres est illimitée (n° 3) ; cherchons donc d'autres procédés.

79. Nous sommes parvenus à décomposer les multiplications les plus compliquées, en multiplications partielles de nombres d'un seul chiffre ; il est donc naturel de chercher si la division ne serait pas susceptible d'abréviations analogues. Pour les apercevoir, il faut remonter à son origine et observer que son but étant de décomposer un produit, ce n'est que dans la formation même de ce produit, qu'on doit chercher à découvrir les circonstances de sa décomposition. Afin de commencer par le cas le plus simple, proposons-nous une multiplication dans laquelle les produits partiels ne donnent pas de retenues ; l'exemple suivant est de cette espèce

232...... *Multiplicande* qui prendra le nom de *quotient.*
3...... *Multiplicateur* qui prendra le nom de *diviseur.*
696...... *Produit* qui prendra le nom de *dividende.*

Connaissant le multiplicande 232 et le multiplicateur 3, nous en avons déduit le produit 696, en multipliant chaque chiffre du multiplicande par le multiplicateur 3 ; et comme ces multiplications partielles n'ont pas donné de retenues, chaque chiffre du produit s'est trouvé *multiple* du multiplicateur 3 ; d'après cette composition, si l'on considère 696, comme dividende et 3 comme diviseur, la simple division des chiffres 6, 9, 6, du divi-

dende, par le diviseur 3, donnera, pour quotiens partiels, les chiffres 2, 3, 2, du quotient total 232.

On voit, par cet exemple, que *toutes les fois que les chiffres du dividende seront des multiples du diviseur, les chiffres correspondans du quotient s'obtiendront en divisant les chiffres du dividende par le diviseur.* Voici quelques exemples de cette nature. Soit le dividende 6484, et le diviseur 2; comme les chiffres 6, 4, 8, 4 du dividende, sont des multiples du diviseur 2, on les divisera par 2; les quotiens partiels, 3, 2, 4, 2, exprimeront les chiffres du quotient total qui sera 3242. Ce quotient est exact; car, multiplié par le diviseur, il reproduit le dividende. Si l'on prenait 408 408 pour dividende, et 4 pour diviseur, alors les chiffres 4, 0, 8, 4, 0, 8 du dividende, divisés par le diviseur 4, donneraient 1, 0, 2, 1, 0, 2 pour les chiffres correspondans du quotient; ce quotient serait donc 102 102; et en effet, le quotient 102 102, multiplié par le diviseur 4, reproduit le dividende 408 408. Si l'on avait 369 069 à diviser par 3, on trouverait 123 023 pour quotient.

80. Actuellement que nous savons effectuer la division, lorsque les chiffres du dividende sont des multiples du diviseur, cherchons comment on doit opérer, lorsque cette condition n'est pas remplie; et pour commencer par un exemple simple, proposons-nous de composer un dividende avec le diviseur 4 et le quotient 367; cela revient à former le produit de 367 par 4: nous pourrions l'effectuer par la méthode ordinaire, ce qui nous donnerait 1468 pour le produit demandé; mais comme notre but est d'examiner la composition de ce produit, nous mettrons en évidence les produits partiels qui le composent; il suffira pour cela d'effectuer le calcul de la manière suivante . . . .

367	*Quotient.*
4.	*Diviseur.*
28	unités; produit des 7 unités du quotient par le diviseur 4.
24.	dixaines; produit des 6 dixaines du quotient par le diviseur 4.
12..	centaines; produit des 3 centaines du quotient par le diviseur 4.
1468 unités;	{ dividende, ou produit total des unités dixaines et centaines du quotient par le diviseur 4.

On a multiplié séparément par le diviseur 4, les 7 unités, les 6 dixaines et les 3 centaines du quotient 367, ce qui a donné les produits partiels 28 unités, 24 dixaines, et 12 centaines; leur somme a donné 1468 pour dividende. Il est actuellement très-facile, connaissant les produits partiels, 28 unités 24 dixaines et 12 centaines, dont se composent le dividende 1468, et le diviseur 4, de découvrir le quotient 367, que nous supposerons inconnu; en effet, puisque 12 centaines est le produit des centaines du quotient par le diviseur 4, si l'on divise 12 centaines par 4, les 3 centaines qu'on obtiendra exprimeront les centaines du quotient; de même, comme 24 dixaines est le produit des dixaînes du quotient par le diviseur 4, en divisant 24 dixaines par 4, le résultat, 6 dixaines, donnera les dixaines du quotient; enfin, comme 28 est le produit des unités du quotient par le diviseur 4, la division de 28 par 4, donnera les 7 unités du quotient; d'après cela, le quotient demandé, qui se compose de 3 centaines, de 6 dixaines et de 7 unités, sera 367. Nous avons obtenu le quotient en commençant par la recherche de ses plus hautes unités; nous l'eussions également découvert en calculant d'abord ses plus basses unités, car nous eussions dit : puisque les produits partiels, 28 unités 24 dixaînes et 12 centaines, expriment respectivement les produits des unités des dixaines et des centaines du quotient par le diviseur 4; en divisant ces produits partiels par le diviseur 4, les quotiens partiels, 7 unités 6 dixaines et 3 centaines, détermineront les unités des différens ordres du quotient demandé, qui est parconséquent 367; on peut remarquer ici que le diviseur est abstrait, et que chaque quotient partiel est de la nature du dividende partiel qui l'a fourni : le quotient de 28 unités par 4, est 7 unités; celui de 24 dixaines par 4, est 6 dixaines; enfin, celui de 12 centaines par 4, est 3 centaines; cela vérifie l'exactitude du principe établi (page 67, n° 71, 1°). Un raisonnement analogue s'appliquerait à tout autre exemple; s'il s'agissait de découvrir le quotient d'une division dans laquelle on connaîtrait le diviseur 9, et les produits partiels, 27 mille 72 centaines 63 dixaines 54 unités, qui composent le dividende 34884; il suffirait de diviser successivement ces pro-

duits partiels par le diviseur 9; la somme des quotiens partiels, 3 mille, 8 centaines, 7 dixaines et 6 unités, donnerait 3876 pour quotient total : il est exact; car, multiplié par le diviseur 9, il reproduit le dividende 34 884. On eût été conduit au même résultat, en effectuant les divisions partielles dans tout autre ordre; en général, *lorsqu'on connait dans le dividende les différens produits partiels des chiffres du quotient par le diviseur, supposé d'un seul chiffre, la division de ces produits partiels par le diviseur, donne les chiffres du quotient* (*), *et l'ordre dans lequel on effectue ces divisions, est indifférent; chaque quotient partiel est de la nature du dividende partiel qui l'a fourni.*

81. On voit, par ce qui précède, que si les produits partiels qui composent le dividende étaient connus, il serait toujours facile d'obtenir le quotient; mais quand on propose une division, on donne seulement le diviseur et le dividende, sans assigner de quels produits partiels se compose le dividende; toute la difficulté est donc réduite à découvrir ces produits partiels; on y est parvenu à l'aide des observations suivantes, fournies par la comparaison des produits partiels avec le produit total. Pour fixer les idées, nous reprendrons le premier exemple du n° 80, où le diviseur étant 4, le dividende 1468 était composé des produits partiels, 12 centaines, 24 dixaines et 28 unités, comme on le voit ici : . . . . . .

367..........	*Quotient*	
4..........	*Diviseur.*	
28 unités,		produits partiels des unités, dixaines et centaines du quotient par le diviseur.
24. dixaines,		
12.. centaines,		
1468..........	*Dividende.*	

On remarque, en commençant par les plus hautes unités du dividende, que le produit partiel, 12 centaines, est le multiple du diviseur 4 qui approche le plus des 14 centaines du dividende

(*) Toutes ces divisions partielles s'effectuent au moyen de la table de *Pythagore*, d'après la règle du n° 74, car chaque produit partiel résulte de la multiplication d'un chiffre du quotient par le diviseur, supposé d'un seul chiffre.

1468 ; retranchant 12 centaines de 1468, le reste 268 ne renfermera plus que les produits partiels, 24 dixaines et 28 unités ; le reste 268 jouit d'une propriété analogue à celle du dividende 1468, le produit partiel 24 dixaines est le multiple du diviseur 4 qui approche le plus des 26 dixaines du reste 268; enfin, si l'on retranche 24 dixaines de 268 unités, le reste 28 est précisément le dernier produit partiel. Comme des remarques analogues pourraient se faire sur d'autres exemples, où le diviseur serait un nombre d'un seul chiffre, l'*analogie* porte à penser qu'elles doivent toujours subsister, ce qui conduit à cette règle générale : *Quand le diviseur est un nombre d'un seul chiffre ; pour découvrir dans le dividende, les produits partiels de chaque chiffre du quotient par le diviseur, et pour en déduire les chiffres du quotient ; il faut commencer par séparer assez de chiffres sur la gauche du dividende, pour que le nombre qui en résulte, considéré comme exprimant des unités simples, contienne le diviseur ; alors le multiple du diviseur, immédiatement au-dessous de ce nombre* (*), *sera le produit partiel du premier chiffre à gauche du quotient par le diviseur ; ce multiple, divisé par le diviseur, donnera donc le premier chiffre à gauche du quotient. Retranchant du dividende le produit du diviseur par la partie du quotient que l'on vient d'obtenir, on aura un reste, sur lequel opérant comme sur le dividende primitif, on obtiendra le second chiffre du quotient ; continuant à opérer de la même manière, on obtiendra successivement tous les chiffres du quotient. Il faut bien observer que l'ordre des unités de chaque chiffre du quotient, est déterminé par celui du dividende partiel qui l'a fourni ; ensorte que chaque quotient partiel est de la nature du dividende partiel qui l'a fourni.*

(*) La table de multiplication donne ce multiple ; si l'on demandait, par exemple, le multiple de 8 immédiatement au-dessous de 60, on chercherait 60 dans la rangée horizontale qui commence par 8, on verrait que 60 tombe entre les deux multiples consécutifs, 56 et 64, le multiple demandé serait donc 56. On trouverait également, que le multiple de 9 immédiatement au-dessous de 34 est 27, car 34 tombe entre 27, ou 3 fois 9, et 36, ou 4 fois 9 ; le multiple de 7 immédiatement au-dessous de 52 est 49 ; etc.

Appliquons cette règle au 2ème exemple du n° 80 (pag. 75), où il s'agissait de diviser 34884 par 9 ; nous séparerons assez de chiffres sur la gauche du dividende pour que le nombre qui en résulte, considéré comme exprimant des unités simples, contienne le diviseur 9 ; le nombre qui remplit ces conditions est 34. Pour trouver le multiple du diviseur 9 immédiatement au-dessous de 34, je prends la table de multiplication et j'y cherche 34 dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur 9 ; je reconnais alors que 34 tombe entre 27, ou 3 fois 9, et 36, ou 4 fois 9 ; le multiple de 9, immédiatement au-dessous de 34, est donc 27, ou 3 fois 9 ; et comme 27 est le produit du diviseur 9 par le premier chiffre à gauche du quotient, ce premier chiffre est 3 ; il exprime des mille, car il a été déduit des 34 unités de mille du dividende 34 884 ; retranchant de ce dividende le produit 27 mille, des 3 mille du quotient par le diviseur 9, on aura 7884 pour reste ; opérant sur ce reste comme sur le dividende primitif, on cherchera le multiple du diviseur 9 immédiatement au-dessous des 78 centaines du reste 7884 ; ce multiple se compose de 72 centaines, qui, divisées par le diviseur 9, donnent 8 centaines, pour les centaines du quotient ; retranchant de 7884, le produit, 72 centaines, des 8 centaines du quotient par le diviseur 9, le reste sera 684 ; le multiple du diviseur 9, immédiatement au-dessous des 68 dixaines du reste 684, est 63 dixaines ; ces 63 dixaines, divisées par 9, donnent les 7 dixaines du quotient ; enfin, si l'on retranche du dernier reste, 684, le produit 63 dixaines, des 7 dixaines du quotient par le diviseur 9, le reste 54, divisé par 9 donnera les 6 unités du quotient ; le quotient total, composé de 3 mille de 8 centaines de 7 dixaines et de 6 unités, est donc 3876 ; il est exact, car multiplié par le diviseur 9 il reproduit le dividende 34 884. On peut observer que les divers multiples, 27 mille 72 centaines 63 dixaines 54 unités, déduits du dividende 34 884, au moyen de la règle précédente, sont effectivement les produits partiels, des 3 mille, des 8 centaines, des 7 dixaines et des 6 unités, du quotient 3 876, par le diviseur 9.

82. On pourrait sans doute étendre cette théorie au cas où le diviseur et le quotient sont composés de plusieurs chiffres ; on

observerait les mêmes propriétés des produits partiels ; mais comme ces propriétés ne reposent que sur des observations particulières, dont il serait difficile de démontrer la généralité, j'ai cru ne pas devoir établir la règle importante de la division sur des fondemens aussi peu solides ; elle n'eût pas pu s'allier avec la rigueur des trois autres règles. D'après ces observations, je considérerai ce qui précède (n°s 79, 80, 81), comme une *méthode d'induction* propre à faire connaître comment on a pu découvrir la règle du n° 81 : je vais en conséquence démontrer la généralité de cette règle, en prouvant qu'elle doit s'appliquer à tous les cas particuliers que comporte la division.

83. La théorie de la division repose sur le principe suivant, qui se déduit immédiatement de la définition même de cette règle. *Le quotient doit être tel, qu'en multipliant ses unités, ses dixaines, ses centaines, etc., par le diviseur, on obtienne au produit total, les unités, les dixaines, les centaines, etc. du dividende ;* cela est évident, car le dividende est un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs. Appliquons ce principe à la recherche du quotient.

84. *Lorsque le diviseur et le quotient sont des nombres d'un seul chiffre, on obtient ce dernier par la méthode indiquée dans le* n° 74, *elle consiste à chercher le dividende dans la rangée horizontale qui commence par le diviseur ; le quotient est en tête de la colonne verticale où s'est trouvé le dividende.* Ainsi, pour trouver le quotient de 48 par 6, je cherche le dividende 48, dans la 6ème rangée horizontale, qui commence par le diviseur 6, le nombre 8, qui est en tête de la 8ème colonne verticale, où l'on a trouvé le dividende 48, est le quotient demandé. On trouvera, de la même manière ; que le quotient de 81 par 9 est 9, que celui de 63 par 7 est 9, que celui de 45 par 9 est 5, etc.

85. Lorsque le diviseur n'ayant qu'un seul chiffre, le quotient en a plusieurs, on suit alors le procédé que nous allons indiquer. Reprenons le 1er exemple du n° 80, où il s'agissait de diviser 1468 par 4 ; le quotient doit être tel, que ses unités, dixaines, centaines, etc. multipliées par le diviseur 4, donnent au produit total, les unités, dixaines, centaines, etc. du dividende

1468 (n° 83) ; ce quotient ne peut donc pas admettre d'unités d'un ordre plus élevé que les plus hautes unités du dividende, qui sont ici des mille ; et en effet, s'il contenait seulement une dixaine de mille, en la multipliant par le diviseur 4, on aurait 4 dixaines de mille au produit ; mais ce produit partiel doit faire partie du dividende 1468, celui-ci contiendrait donc des dixaines de mille, ce qui n'a pas lieu. Le quotient n'aura pas non plus de mille ; car, s'il en contenait un, en le multipliant par le diviseur 4, on aurait le produit partiel 4 mille, qui ne peut faire partie du dividende 1468. Le quotient contient des centaines ; car une centaine multipliée par le diviseur 4, donne 4 centaines, et le dividende 1468, en contient 14. Actuellement que nous avons déterminé la nature des plus hautes unités du quotient (*), cherchons quel est leur nombre. Le produit partiel des centaines du quotient par le diviseur 4, donnant nécessairement des centaines, ne peut se trouver que dans les 14 centaines du dividende, ces 14 centaines sont donc composées du produit des centaines du quotient par le diviseur 4, et de la retenue de centaines qu'a pu fournir la multiplication des dixaines du quotient par le diviseur 4 ; conséquemment, le multiple de 4, immédiatement au dessous de 14, sera le produit partiel du diviseur 4 par le nombre des centaines du quotient ; on obtiendra donc ce nombre de centaines en divisant 12, multiple de 4 immédiatement au dessous de 14, par le diviseur 4, ce qui donne 3 pour le nombre des centaines du quotient. Cela posé ; si du dividende 1468, qui contenait les trois produits partiels des centaines des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 4, nous retranchons 1200, produit des 3 centaines du quotient par le diviseur 4, le reste 268 ne sera plus composé que des produits partiels

---

(*) On demandera sans doute ce qui a conduit à commencer par la recherche des plus hautes unités du quotient ; le voici : dans la formation d'un produit, on commence par la multiplication des plus basses unités du multiplicande, afin de pouvoir joindre la retenue de chaque produit partiel au produit partiel suivant. La division, qui a pour but de décomposer ce produit, doit donc procéder dans un ordre inverse ; il est donc naturel de commencer par la recherche des plus hautes unités du quotient.

des

des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 4; car le produit partiel des centaines du quotient par le diviseur 4, vient d'etre ôté. On peut donc actuellement considérer le reste 268, comme un nouveau dividende partiel composé du produit du diviseur 4, par un quotient partiel dont les unités et les dixaines sont celles du quotient total : tout se reduit donc à diviser le reste 268 par le diviseur 4 Comme cette question est absolument semblable à celle que nous nous étions d'abord proposée, nous n'insisterons pas autant sur les raisonnemens. Nous savons que les plus hautes unites du quotient sont des dixaines ; leur produit par le diviseur ne peut donc se trouver que dans les 26 dixaines du dividende partiel 268; mais ces 26 dixaines sont composées du produit des dixaines du quotient par le diviseur 4, et des retenues de dixaines qu'a pu fournir la multiplication des unités du quotient par le diviseur 4; le multiple de 4, immédiatement au dessous de 26, qui est 24, sera donc le produit du diviseur 4 par le nombre des dixaines du quotient; on obtiendra donc ce nombre de dixaines, en divisant 24 par 4; cela donnera 6 pour le nombre des dixaines du quotient. Si, du dividende partiel 268, composé des produits partiels du diviseur 4, par les dixaines et par les unités du quotient, on retranche le produit 24 dixaines, des 6 dixaines du quotient par le diviseur 4, le reste 28, sera le produit des unités du quotient par le diviseur 4; la division de 28 par 4 donnera les 7 unités du quotient. La réunion des trois quotiens partiels, 3 centaines 6 dixaines et 7 unités, donnera 367 pour le quotient total de 1468 par 4. Le quotient 367 multiplié par le diviseur 4, reproduit effectivement le dividende 1468. Si l'on compare les calculs précédens à ceux du n° 81, on reconnaîtra qu'ils sont les mêmes ; ils ont seulement été dirigés par des raisonnemens plus rigoureux. Pour jeter plus de clarté sur les diverses opérations que nous venons d'effectuer, nous les disposerons de la manière suivante :

Dividende	1468	4 *Diviseur.*
	1200	367 *Quotient.*
	268	
	240	
	28	
	28	
	0	

On voit que le diviseur 4 se place sur la droite du dividende 1468, dont il est séparé par une ligne verticale, et que le quotient 367 se pose sous le diviseur 4, dont il est séparé par une barre horizontale. Commençant l'opération par la gauche du dividende, on divise 12 centaines, multiple du diviseur 4, immédiatement au-dessous des 14 centaines du dividende, par le diviseur 4; cela donne 3 centaines, qu'on écrit au rang des centaines du quotient; multipliant ensuite le quotient partiel 3 centaines, par le diviseur 4, on porte le produit 12 centaines, ou 1200, sous le dividende 1468, en faisant correspondre les unités de même ordre, on retranche 1200 de 1468, et l'on pose le reste 268 sous 1200, en l'en séparant par un trait. Opérant sur ce reste, comme on l'a fait sur le dividende primitif 1468, on divise 24 dixaines, multiple du diviseur 4, immédiatement au-dessous des 26 dixaines du dividende partiel 268, par le diviseur 4; cela donne 6 dixaines; on écrit donc 6 au rang des dixaines du résultat; multipliant ensuite ces 6 dixaines par le diviseur 4, on pose le produit 24 dixaines, ou 240, sous 268, et retranchant 240 de 268, on écrit le reste 28 sous 240, en l'en séparant par un trait. Enfin on divise 28 par 4, ce qui donne 7, que l'on écrit au rang des unités du quotient. Multipliant les 7 unités du quotient par le diviseur 4, on a 28 unités, que l'on écrit sous le reste 28; on retranche 28 de 28, et l'on pose au-dessous le reste zéro. L'opération est alors terminée, et l'on a 367 pour le quotient demandé (*).

(*) Le desir d'abréger le discours a introduit quelques expressions dont le sens est obscur; par exemple, on dit ordinairement que la division de 26 par 6 donne 4 au quotient. On entend par-là que 24, multiple du diviseur 4 immédiatement au-dessous du dividende 26, divisé par le diviseur 4, donne 6 pour

86. Après avoir saisi l'esprit des raisonnemens précédens, on pourra les étendre au cas le plus général de la division, celui où le dividende, le diviseur et le quotient contiennent plusieurs chiffres. Pour mieux apercevoir les circonstances de la décomposition d'un produit quelconque, nous chercherons à décomposer 216832 en ses deux facteurs, 847 et 256. Comme tous les détails relatifs à la composition de ce produit se trouvent dans le n° 63, on serait obligé de s'y reporter à chaque instant, afin d'apercevoir comment on extrait successivement du produit total 216 832, les produits partiels, 1694 centaines 4235 dixaines 5082 unités, qui le composent. Pour ne pas ainsi détourner l'attention de l'élève, nous placerons le produit à côté de la division qui doit servir à le décomposer. La comparaison des deux méthodes sera d'ailleurs plus facile. Proposons-nous donc de découvrir le quotient qui doit résulter de la division de 216832 par 847; et, pour rendre plus évidentes les relations qui existent entre la composition et la décomposition du produit, rapprochons ces deux opérations opposées comme on le voit ici :

Multiplication.	*Division.*	
847 Multiplicande, ou Diviseur.	Dividende 216 832	847 Diviseur.
256 Multiplicateur, ou Quotient.	169 400	256 Quotient.
5 082, ou 847 fois 6 unités.	47 432	
42 35., ou 847 fois 5 dixaines.	42 350	
169 4.., ou 847 fois 3 centaines.	5 082	
216 832, ou 847 fois 256.	5 082	
	Dernier reste . . 0	

quotient exact. Nous adopterons cette expression, et nous dirons, en nous conformant à l'usage, que la division de 26 par 6 donne 4 au quotient. Nous prévenons donc, une fois pour toutes, que, par *quotient*, nous entendrons toujours un quotient exact; ensorte que le diviseur multiplié par le quotient, composera le dividende. Lorsque nous parlerons d'une partie du quotient, nous dirons, *au quotient*, ou encore *les unités du quotient*. Mais nous n'appellerons jamais quotient une portion de quotient, comme l'ont fait plusieurs auteurs. D'après ces conventions, le quotient de 12 par 3 est 4, celui de 28 par 4 est 7; la division de 26 par 4 donne 6 au quotient; nous abrégerons même quelquefois cette dernière expression, en disant que la division de 26 par 4

La disposition du calcul étant la même que celle de l'exemple précédent, nous nous contenterons d'indiquer les raisonnemens. Le quotient demandé doit être tel que ses unités, ses dixaines, ses centaines, etc. multipliées par le diviseur 847, donnent au produit total les unités, les dixaines, les centaines, etc. du dividende 216832 (n° 83); ce quotient ne peut donc pas renfermer d'unités d'un ordre plus élevé que les dixaines, car s'il contenait seulement 1 mille, ce mille multiplié par le diviseur 847, donnerait 847 mille, tandis que le dividende n'en contient que 216. Il renferme des centaines, car une centaine multipliée par le diviseur 847, donne 847 centaines, et le dividende 216832 en contient 2168. Actuellement que nous avons déterminé la nature des plus hautes unités du quotient, cherchons leur nombre. Le produit partiel des centaines du quotient par le diviseur 847, donnant nécessairement des centaines, ne peut se trouver que dans les 2168 centaines du dividende 216832, on doit donc regarder ces 2168 centaines comme renfermant le produit des centaines du quotient par le diviseur 847, et la retenue de centaines qu'a pu fournir la multiplication des dixaines du quotient par le diviseur; conséquemment, le chiffre des centaines du quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur 847, il produise le multiple de 847, immédiatement au-dessous de 2168; le chiffre 2 qui satisfait à cette condition, exprime donc le nombre de centaines du quotient. (*) Passons à la recherche des

donne 6; *au quotient*, est alors sous-entendu. Dans ce sens, la division de 21 par 8 donne 2; celle de 47 par 8 donne 5; celle de 50 par 8 donne 6, etc.; 7 exprimera les unités du quotient de 30 par 4. Nous ne dirons pas que le quotient de 30 par 4 est 7. Les commençans doivent réfléchir sur le sens exact de ces diverses expressions; c'est le seul moyen de comprendre la suite de l'arithmétique.

(*) La table de multiplication ne contenant que les produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre, ne peut donner le multiple du diviseur 847 immédiatement au-dessous de 2168; ce n'est alors que par tâtonnement qu'on découvre ce multiple, on dit : deux fois 847 valent 1694; 3 fois 847 valent 2541; mais 2168 tombe entre ces deux produits; le multiple de 847, immédiatement au-dessous de 2168, est donc le produit 1694, de 847 par 2. On verra d'ailleurs dans le n° 92 (page 94) que le seul moyen d'éviter les tâtonnemens, quand le diviseur a plus d'un chiffre, est de former une table des produits du diviseur par tous les nombres d'un seul chiffre. On pourra faire usage de cette table dans l'exemple actuel, et dans les suivans.

dixaines du quotient; si, du dividende 216 832, qui contenait les trois produits partiels des centaines, des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 847, nous retranchons le produit 1694 centaines, des 2 centaines du quotient par le diviseur 847, le reste 47432 ne sera plus composé que des deux produits partiels des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 847. On peut donc actuellement considérer le reste 47 432 comme un nouveau dividende partiel composé du produit du diviseur 847 par un quotient partiel dont les unités et les dixaines sont les mêmes que celles du quotient total; tout se réduit donc à diviser le reste 47 432 par le diviseur 847. Cette question étant absolument semblable à celle que nous nous étions d'abord proposée, nous suivrons une marche analogue, et dirons : les 4743 dixaines du dividende partiel 47 432, renferment le produit des dixaines du quotient par le diviseur 847, plus la retenue de dixaines qu'a pu fournir la multiplication des unités du quotient par le diviseur 847; conséquemment le chiffre qui exprime les dixaines du quotient doit être tel que multiplié par 847 il donne le multiple de 847 immédiatement au-dessous de 4743; le chiffre 5 qui satisfait à cette condition représente donc le nombre de dixaines du quotient. Enfin, si du dividende partiel 47 432, composé des deux produits partiels des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 847, nous ôtons le produit 4235 dixaines, des 5 dixaines du quotient par le diviseur 847, le reste 5082 sera nécessairement le produit des unités du quotient par le diviseur 847; ensorte que la division de 5082 par 847 donnera les 6 unités du quotient. La réunion des trois quotiens partiels, 2 centaines 5 dixaines 6 unités, donnera 256, pour le quotient total de 216 832 par 847; le diviseur 847 multiplié par le quotient 256, reproduit effectivement le dividende 216 832. La comparaison de la formation du produit 216 832, avec sa décomposition en ses deux facteurs, 847 et 256, doit parfaitement convaincre de l'exactitude des raisonnemens employés dans la division. On voit que du produit total 216 832 nous avons successivement extrait les produits partiels, 1694 centaines, 4235 dixaines, 5082 unités, qui le composent; on

devait donc nécessairement obtenir zéro pour dernier reste.

87. La méthode que nous venons d'exposer peut s'appliquer à tous les exemples ; il est cependant un cas qui pourrait encore embarrasser, c'est celui où quelques chiffres du quotient seraient zéro ; en voici un exemple.......

Dividende	11 344	16	Diviseur.
	11 200	709	Quotient.
	144		
	144		
Dernier reste	0		

Pour diviser 11344 par 16, on raisonnera comme dans les exemples précédens, et l'on dira, le quotient ne saurait contenir des unités supérieures aux centaines, car s'il contenait seulement un mille, ce mille multiplié par le diviseur 16 donnerait 16 mille, tandis que le dividende n'en contient que 11. Le quotient contient des centaines, car une centaine prise 16 fois donne 16 centaines, et le dividende en contient 113. Puisque les plus hautes unités du quotient sont des centaines, leur produit par le diviseur 16 donne des centaines, qui ne peuvent conséquemment se trouver que dans les 113 centaines du dividende ; on peut donc régarder ces 113 centaines comme renfermant le produit des centaines du quotient par le diviseur 16, avec la retenue de centaines qu'a pu fournir la multiplication des dixaines du quotient par le diviseur ; d'après cela, le chiffre qui exprime les centaines du quotient doit être tel que, multiplié par 16, il donne pour produit le multiple de 16 immédiatement au-dessous de 113 ; le chiffre 7 qui remplit cette condition, exprime donc le nombre de centaines du quotient. Si du dividende 11344, composé des trois produits partiels des centaines des dixaines et des unités du quotient par le diviseur ; nous retranchons 113 centaines, produit des 7 centaines du quotient par le diviseur 16, le reste 144 sera composé des deux produits partiels des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 16. Pour déterminer les dixaines du quotient nous dirons : les 14 dixaines, du reste 144, renferment le produit des dixaines du quotient par le diviseur 16, plus la retenue des dixaines qu'a pu fournir le produit des unités du quo-

tient par le diviseur 16 ; mais 14 est moindre que 16, le chiffre des dixaines du quotient est donc zéro, car s'il était seulement 1, multiplié par le diviseur 16, il donnerait 16 dixaines, tandis que le reste 144 n'en contient que 14 ; je pose donc zéro pour tenir la place des dixaines du quotient. Passons à la recherche des unités du quotient ; le reste 144, exprimant le produit des unités du quotient par le diviseur 16, la division de 144 par 16 donnera les 9 unités du quotient. Le quotient de 11344 par 16 est donc 709 ; et en effet, le quotient 709, multiplié par le diviseur 16, reproduit le dividende 11344.

88. Lorsqu'on a bien compris la théorie de la division, on peut dans la pratique se dispenser de répéter continuellement les mêmes raisonnemens, et écrire les opérations d'une manière beaucoup plus abrégée ; la division suivante, exécutée d'abord tout au long, simplifiée ensuite, et faite enfin par la méthode la plus abrégée, donnera une idée suffisante des simplifications que comporte la division.

1[ère] *Méthode.*

1 882 152	24
1 680 000	7 dixaines de mille.
202 152	8 mille.
192 000	4 centaines.
10 152	2 dixaines.
9 600	3 unités.
552	78 423
480	
72	
72	
0	

2[ème] *Méthode.*

1 882 152	24
1 68. ...	78 423
202 ...	
192 ...	
10 1..	
9 6..	
55.	
48.	
72	
72	
0	

3[ème] *Méthode.*

1 882 152	24
202 ...	78 423
10 1..	
55.	
72	
0	

La *première opération* a été exécutée tout au long ; on a mis en évidence les divers quotiens partiels dont se compose le quotient total, et l'on a dit : les plus hautes unités du quotient sont des dixaines de mille, car une centaine de mille, multipliée par le diviseur 24, donnerait 24 centaines de mille, tandis que le dividende 1882152 n'en contient que 18. Le chiffre des dixaines de mille du quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur 24,

il produise le multiple de 24, immédiatement au-dessous des 188 dixaines de mille du dividende; le chiffre 7 qui remplit cette condition, nous apprend que le quotient contient 7 dixaines de mille; si du dividende total 188 2152, qui contenait les produits du diviseur par les dixaines de mille, les mille, les centaines, les dixaines et les unités du quotient, on retranche le premier de ces produits partiels, qui est 24 fois 7 dixaines de mille, ou 168 dixaines de mille, ou 1680000, le reste 202152, ne contiendra plus que le produit du diviseur, par les mille, les centaines, les dixaines et les unités du quotient. Le produit des mille du quotient par le diviseur ne peut se trouver que dans les 202 mille du reste 202 152, ensorte que le chiffre des mille du quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur 24, il produise le multiple de 24 immédiatement au-dessous de 202; 8 satisfait à cette condition, le quotient contient donc 8 mille; si du reste 202 152, qui contenait les quatre produits partiels des 8 mille, des centaines, des dixaines et des unités du quotient, par le diviseur 24, on retranche le premier de ces produits, qui est 24 fois 8 mille, ou 192 mille, ou 192 000, le reste 10 152 ne sera plus composé que des trois autres produits partiels; or, le produit des centaines du quotient par le diviseur 24 ne peut se trouver que dans les 101 centaines du reste 10 152, le chiffre des centaines du quotient doit donc être tel que, multiplié par 24, il produise le multiple de 24 immédiatement au-dessous de 101, ce chiffre est donc 4; si du reste 10 152, composé des trois produits partiels des 4 centaines, des dixaines et des unités du quotient par le diviseur 24, on ôte 24 fois 4 centaines, ou 9 600, le reste 552 sera le produit du diviseur 24 par les dixaines et par les unités du quotient; le premier de ces produits ne peut faire partie que des 55 dixaines du reste 552, et comme le multiple de 24 immédiatement au-dessous de 55 est 48, ou 24 fois 2, on en conclura que le quotient contient 2 dixaines; enfin, si du reste 552, composé de 24 fois les 2 dixaines du quotient et de 24 fois ses unités, on ôte 24 fois 2 dixaines, ou 480, le reste 72, sera le produit de 24 par les unités du quotient; divisant donc 72 par 24, le résultat 3, exprimera les unités du quotient; 72 ôté de 72 donne zéro pour dernier reste; la

réunion des quotiens partiels, 7 dixaines de mille 8 mille 4 centaines 2 dixaines 3 unités, a donné le quotient total 78 423.

La *seconde operation* comporte les simplifications suivantes : 1°. au lieu de poser tout au long les produits partiels 1 680 000, 192 000, 9600, 480, on n'a mis que leurs parties significatives 168, 192, 96, 48, en ayant soin de leur faire occuper le rang déterminé par l'ordre de leurs unités : ainsi, par exemple, comme 168 exprime un nombre de dixaines de mille, on l'a mis sous les 188 dixaines de mille du dividende 1 882 152 ; de même, au lieu d'écrire 9600 sous le reste 10 152, on a posé les 96 centaines du premier nombre, sous les 101 centaines du second nombre ; ensorte que les unités de même ordre ont toujours été mises les unes sous les autres, ce qui remplace l'effet des zéros ; 2°. au lieu d'écrire tous les chiffres des restes 202 152, 10 152, 552, on n'a conservé que les parties de ces restes qui contiennent le produit du diviseur par chaque chiffre du quotient ; ainsi, comme le produit du diviseur par les mille du quotient donne des mille, il ne peut se trouver que dans les 202 mille du premier reste 202 152 ; il suffit donc d'écrire 202, ce qui revient à soustraire 168 de 188, et à abaisser ensuite à côté du reste 20, le chiffre 2 du dividende ; ainsi, au lieu d'écrire les restes 202 152, 10 152, 552, on n'a mis que les parties 202, 101, 55, de ces restes, qui servent à déterminer les chiffres du quotient ; ensorte qu'à côté des restes partiels, 20, 10, 5, 7, on a abaissé successivement les chiffres 2, 1, 5, 2, du dividende. Je préviens que pour abréger le discours, les nombres, 188, 202, 101, 55, 72, dont la division par le diviseur 24, a donné les chiffres 7, 8, 4, 2, 3, du quotient, seront dorénavant désignés sous le nom de *dividendes partiels*. 3°. Comme chaque dividende partiel donne un quotient de son espèce, auquel les chiffres suivans du quotient total assignent le rang qui convient à l'ordre de ses unités, on peut omettre les noms des différentes espèces d'unités des dividendes partiels, ainsi que ceux des quotiens partiels, et mettre les chiffres du quotient total à la suite les uns des autres : ensorte qu'au lieu d'écrire, 7 dixaines de mille 8 mille 4 centaines 2 dixaines 3 unités, on écrit seulement les chiffres 7, 8, 4, 2, 3, à côté les

uns des autres de cette manière 78 423; dans ce dernier nombre, chaque chiffre occupe en effet le rang déterminé par l'ordre de ses unités.

D'après ces diverses simplifications, on a exécuté la seconde opération de la manière suivante; on a d'abord séparé assez de chiffres sur la gauche du dividende, pour que le nombre qui en résulte, considéré comme exprimant des unités simples, contienne le diviseur 24; le nombre 188, qui satisfait à cette condition, divisé par 24, a donné le 1er chiffre 7 du quotient; on a multiplié 24 par 7, on a retranché le produit 168, du 1er dividende partiel 188, et à côté du reste 20, on a abaissé le chiffre 2 du dividende, ce qui a donné 202 pour 2ème dividende partiel; 202 divisé par 24, a donné 8 pour 2ème chiffre du quotient; de 202 on a soustrait 8 fois 24, ou 192, et à côté du reste 10, on a abaissé le chiffre 1 du dividende, ce qui a donné 101 pour 3ème dividende partiel; celui-ci, divisé par 24, a donné le 3ème chiffre 4 du quotient; de 101 on a ôté 4 fois 24, ou 96; à côté du reste 5, on a abaissé le chiffre 5 du dividende total, le nombre 55 qui en est résulté, divisé par 24, a donné 2 pour 4ème chiffre du quotient; le produit 48, de 24 par 2, soustrait de 55, a donné le reste 7, à côté duquel on a abaissé le dernier chiffre 2, du dividende total, ce qui a donné 72 pour dernier dividende partiel; 72 divisé par 24, a donné les trois unités du quotient total 78 423.

La *troisième opération* ne diffère de la seconde, qu'en ce qu'on a effectué les soustractions partielles, des produits du diviseur par les chiffres du quotient, au moyen de la méthode abrégée indiquée dans le n° 70, ce qui a évité de poser les nombres à soustraire, 168, 192, 96, 48, 72 : voici le détail du calcul. Le 1er dividende partiel 188, contenant 7 fois 24, on a posé 7 comme premier chiffre à gauche du quotient; pour ôter 7 fois 24 de 188, on a dit : 7 fois 4 font 28; 28 ôté de 28, reste 0, que l'on a écrit sous le premier chiffre à droite de 188; 7 fois 2 font 14, et 2 d'emprunt font 16 qui, ôtés de 18, donnent le reste 2, que l'on a écrit à la gauche de 0; cela a donné le reste 20, à côté duquel on a abaissé le chiffre 2 du dividende, le résultat 202 a exprimé le second dividende partiel. Comme 202 contient 8

fois 24, on a écrit 8 pour second chiffre du quotient ; afin de soustraire 8 fois 24, de 202, on a dit ; 8 fois 4, ou 32 ôtés de 32, reste 0; ensuite 8 fois 2 font 16, et 3 d'emprunt font 19 ; 19 otés de 20, reste 1, que l'on a écrit à la gauche du 0, ce qui a donné le reste 10, sur la droite duquel abaissant le chiffre 1 du dividende total, on a trouvé le 3ème dividende partiel 101 ; celui-ci, divisé, par 24, a donné le 3ème chiffre 4 du quotient ; pour soustraire 4 fois 24, de 101, on a dit ; 4 fois 4, ou 16, ôtés de 21, reste 5, et 4 fois 2, ou 8, augmenté de l'emprunt 2, donnent 10 qui ôtés de 10, donnent zéro pour reste, et comme le zéro que l'on mettrait à la gauche de 5 est inutile, on l'a omis ; à droite du reste 5, on a abaissé l'avant-dernier chiffre du dividende total, et le nombre 55, divisé par 24, a donné l'avant-dernier chiffre 2 du quotient ; 2 fois 24 ôtés de 55, a donné le reste 7, à la droite duquel abaissant le dernier chiffre 2 du dividende total, on a obtenu le dernier dividende partiel 72 ; celui-ci, divisé par 24, a donné le dernier chiffre 3 du quotient.

89. Lorsqu'après avoir épuisé tous les chiffres du dividende, on obtient zéro pour dernier reste, on doit en conclure que le quotient obtenu est exact. En effet, ayant retranché successivement du dividende les produits partiels des chiffres du quotient par le diviseur, c'est comme si l'on eût retranché du dividende, le produit total du diviseur par le quotient ; mais il n'est rien resté ; le dividende est donc égal au produit du diviseur par le quotient ; ce quotient est donc exact. Les exemples de division que nous avons donnés jusqu'ici, sont de cette espèce.

Quand dans le cours des divisions successives on obtient un reste zéro, alors, 1°. si tous les chiffres du dividende sont épuisés, le quotient obtenu est exact ; 2°. si les chiffres qui restent dans le dividende sont des zéros, il suffit de mettre ces zéros sur la droite de la partie du quotient déjà obtenue, le résultat est le quotient exact ; 3°. si le dividende contient encore des chiffres significatifs, on doit continuer l'opération en les abaissant successivement sur la droite des restes ; cela fournira autant de nouveaux dividendes partiels dont chacun donnera un chiffre du quotient ; zéro est le chiffre du quotient correspondant à un di-

vidende partiel moindre que le diviseur. On trouvera, d'après cette règle, que le quotient de 3 456 par 12 est 288, que celui de 345 600 par 12 est 28 800, que celui de 3 610 800 par 12 est 300 900.

90. Si l'on rassemble tout ce qui a été dit sur les différens cas que comporte la division, on en déduira cette règle générale : *Pour diviser deux nombres quelconques l'un par l'autre, écrivez le diviseur sur la droite du dividende, en l'en séparant par un trait ; placez un autre trait sous le diviseur pour le séparer du quotient que vous écrirez au-dessous. L'opération ainsi disposée, pour l'effectuer, prenez assez de chiffres sur la gauche du dividende, pour que le nombre qui en résulte, considéré comme exprimant des unités simples, contienne le diviseur ; cherchez alors combien de fois ce dividende partiel contient le diviseur, ce nombre de fois sera le premier chiffre à gauche du quotient, il exprimera des unités de l'ordre du dernier chiffre à droite du dividende partiel qui l'aura fourni. Ecrivez le premier chiffre du quotient ainsi obtenu, à son rang sous le diviseur ; multipliez ensuite le diviseur par ce premier chiffre et mettez le produit à son rang sous le premier dividende partiel ; placez un trait sous ces deux nombres, retranchez le plus petit du plus grand, écrivez au-dessous le reste, et abaissez sur sa droite le chiffre suivant du dividende total : vous aurez alors un nouveau dividende partiel, sur lequel opérant comme sur le précédent, vous obtiendrez le second chiffre du quotient, que vous écrirez à la droite du premier : multipliez alors le diviseur par le second chiffre du quotient, et mettez le produit à son rang sous le second dividende partiel, placez un trait sous ces deux nombres, retranchez l'un de l'autre, écrivez au-dessous le reste, et abaissez vers sa droite le chiffre suivant du dividende total ; ce dernier nombre sera le troisième dividende partiel sur lequel, opérant comme sur les précédens, vous aurez le troisième chiffre du quotient, que vous écrirez à la droite du second : vous répéterez les mêmes opérations, jusqu'à ce que les chiffres du dividende total soient entièrement épuisés. Alors, si le dernier reste est zéro, la division sera terminée, et le quotient obtenu sera celui demandé. Si*

le dernier reste moindre que le diviseur n'était pas zéro, cela indiquerait que le quotient demandé n'est pas assignable en nombre entier, le nombre obtenu au quotient exprimerait alors les unités du quotient total; ce second cas sera traité à l'article des fractions. La somme des quotiens partiels ainsi obtenus compose le quotient total. Observez bien, lorsqu'un dividende partiel sera moindre que le diviseur, de placer zéro pour le chiffre correspondant du quotient total; par ce moyen, les chiffres significatifs du quotient conservent le rang qui convient à l'espèce des unités qu'ils représentent, et chacun des chiffres du dividende total qui suivent le premier dividende partiel, donnent un chiffre du quotient total. Dans l'application de cette règle, on doit profiter des remarques faites dans les nos 88, 89, *et de celles qui suivent.*

91. *Dans le cours des divisions partielles, on ne doit jamais mettre plus de* 9 *au quotient;* car si on pouvait seulement mettre 10, ou une dixaine, cela prouverait que le quotient partiel précédemment obtenu serait trop faible d'une unité, puisque cette dixaine n'étant qu'une unité par rapport à lui, lui appartiendrait nécessairement.

Lorsque le diviseur est un nombre d'un seul chiffre, il est très-facile d'obtenir successivement les divers chiffres du quotient sans aucun tâtonnement; car chaque quotient partiel ne pouvant surpasser 9, on est assuré que, dans chaque division partielle, le diviseur et le quotient sont des nombres d'un seul chiffre; la table de *Pythagore* donnera donc le multiple du diviseur immédiatement au-dessous de chaque dividende partiel; et ce multiple aura, pour facteurs, le diviseur et le chiffre du quotient de l'ordre du dividende partiel qui l'aura fourni.

92. Quand le diviseur est composé de plusieurs chiffres, il est quelquefois assez difficile de trouver combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur. Pour éviter toute espèce de tâtonnement, on forme une table des produits du diviseur par les nombres d'un seul chiffre; alors, comme chaque dividende partiel ne peut pas contenir plus de neuf fois le diviseur (91), on trouve, dans cette table, les multiples du diviseur immédia-

tement au-dessous de chaque dividende partiel, et les nombres qui multiplient le diviseur dans ces multiples, sont les chiffres du quotient. Voici un exemple dont la longueur est assez propre à faire sentir l'utilité de cette table de multiples. Proposons-nous de diviser 54 884 239 030 842 654 par 78 423; nous disposerons le calcul comme on le voit ici :

54 884 239 030 842 654 | 78 423 *Diviseur.*
47 053 8. . . . | 699 848 756 498 *Quotient.*
7 830 43. . .
7 058 07. . .
772 369 . .
705 807 . .
66 562 0.
62 738 4.
3 823 63
3 136 92
etc.

Table des multiples du diviseur.

156 846	*produit du diviseur par*	2
235 269	. . . . *par*	3
313 692	. . . . *par*	4
392 115	. . . . *par*	5
470 538	. . . . *par*	6
548 961	. . . . *par*	7
627 384	. . . . *par*	8
705 807	. . . . *par*	9

Pour découvrir le multiple du diviseur immédiatement au-dessous du 1er dividende partiel 548 842, on cherche, dans la table des multiples du diviseur, le nombre immédiatement au-dessous de 548 842; ce nombre est 470 538, produit du diviseur par 6 : on écrit alors 6 au quotient, on pose le multiple 470 538 sous le dividende partiel 548 842, on retranche le premier nombre du second, et à côté du reste 78 304, on abaisse le chiffre 3 du dividende total, ce qui donne 783 043 pour 2ème dividende partiel. Comme le multiple du diviseur qui en approche le plus, est 705 807, produit du diviseur par 9, on écrira 9 au quotient à la suite du premier chiffre 6; du second dividende partiel 783 043, on retranchera le multiple 705 807; à côté du reste 77 236, on abaissera le chiffre 9 du dividende total, ce qui donnera le 3ème dividende partiel 772 369; le multiple qui en approche le plus, est 705 807, produit du diviseur par 9. Ainsi, le 3ème chiffre du quotient est 9. Continuant le calcul d'après le même système, on obtiendra successivement les différens chiffres du quotient. Comme dans la pratique, le procédé que nous venons d'indiquer est en même temps, le plus simple, le plus abrégé et le plus certain, on doit l'appliquer à de nombreux exemples.

93. Lorsqu'on ne forme pas la table de multiples que nous venons d'indiquer, les chiffres du quotient ne s'obtiennent que par des tâtonnemens d'autant plus longs, que le diviseur est grand, et que l'on a moins d'habitude du calcul. Pour prévenir toute erreur, nous allons donner des *caractères auxquels on reconnaît si on a mis, à un quotient partiel quelconque, le chiffre convenable;* 1°. *si le chiffre mis au quotient est celui qui convient, en le multipliant par le diviseur et retranchant le produit du dividende partiel que l'on considère, le reste doit être moindre que le diviseur;* car s'il ne l'était pas, cela indiquerait que le dividende partiel contient au moins une fois de plus le diviseur; 2°. *si le chiffre mis au quotient est trop petit, en le multipliant par le diviseur, et retranchant le produit du dividende partiel correspondant, on obtiendra un reste plus grand que le diviseur: il faudra donc augmenter successivement ce chiffre de* 1, 2, 3, *etc.... unités, jusqu'à ce qu'on trouve un chiffre tel que, multiplié par le diviseur, il donne un produit qui, ôté du dividende partiel, laisse un reste plus petit que le diviseur;* 3°. *si le chiffre mis au quotient est trop grand, en le multipliant par le diviseur, on aura un produit plus grand que le dividende partiel correspondant: il faudra donc diminuer successivement ce chiffre de* 1, 2, 3, *etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un chiffre tel que son produit par le diviseur n'excède plus le dividende partiel, et donne un reste moindre que le diviseur.*

94. Nous avons vu (n° 68) que, pour multiplier un nombre par l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, il suffisait de mettre les zéros du multiplicateur sur la droite du multiplicande. On en déduit que réciproquement, *lorsqu'un nombre est terminé par des zéros vers la droite, pour le diviser par l'unité suivie de plusieurs zéros; il suffit de supprimer, lorsque cela est possible, autant de zéros sur la droite du dividende qu'en contient le diviseur.* En voici une démonstration directe: soit le nombre 3940; si l'on supprime le zéro qui le termine, il deviendra 394; par cette suppression, le chiffre 4 qui exprimait des dixaines, exprimera des unités: il aura donc reçu une valeur dix fois plus petite; le chiffre 9 qui valait 9 centaines, ne vaudra plus que 9

dixaines ; il aura donc reçu une valeur dix fois plus petite ; enfin le chiffre 3, qui occupait le rang des mille, n'occupant plus que celui des centaines, aura de même une valeur dix fois plus petite ; le zéro supprimé vers la droite du nombre 3940, a donc rendu toutes ses parties dix fois plus petites : ce nombre est donc devenu dix fois plus petit. On démontrerait de la même manière, que toutes les parties du nombre 394 sont cent fois plus petites que celles du nombre 39 400, et que parconséquent, pour diviser 39 400 par 100, il suffit de supprimer sur la droite du dividende, 39 400, les deux zéros contenus dans le diviseur 100. On verrait aussi, que le quotient de 3 780 000 par 1000 est 3780 ; que celui de 40 010 000 000 par 100 000, est 400 100, et ainsi de suite.

95. Je terminerai la division, en faisant connaître quelques expressions inutiles en elles-mêmes, mais devenues utiles depuis qu'elles sont consacrées par l'usage. Lorsqu'on multiplie un nombre par 2, par 3, ou par 4, on dit qu'on le *double*, qu'on le *triple* ou qu'on le *quadruple*. De même, lorsqu'on divise un nombre par 2, par 3, ou par 4, on dit qu'on en prend, la *moitié*, le *tiers*, ou le *quart*. Ainsi, le double de 6 est 2 fois 6, ou 12 ; la moitié de 6 est 6 divisé par 2, ou 3 ; le triple de 9 est 3 fois 9, ou 27 ; le tiers de 27 est 27 divisé par 3, ou 9 ; le quadruple de 7 est 4 fois 7, ou 28 ; le quart de 12 est 12 divisé par 3, ou 4. On dit aussi quelquefois, *quintupler*, *sextupler*, *décupler*, *centupler*, au lieu de multiplier, par 5, par 6, par 10 et par 100 ; mais ces expressions sont peu usitées. Lorsque le diviseur est plus grand que quatre, on joint constamment à son nom la terminaison *ième* ; ainsi, diviser un nombre par 5, c'est en prendre le *cinquième* ; le diviser par 7, c'est en prendre le *septième*. De même, quand on divise un nombre par 10, par 100, par 12, par 8, par 127, on dit qu'on en prend le *dixième*, le *centième*, le *douzième*, le *huitième*, le *cent vingt-septième*. Afin d'abréger, on écrit souvent ; 8ème, au lieu de huitième ; 7ème, au lieu de septième ; 100ème, au lieu de centième, et ainsi de suite. D'après toutes ces conventions, le douzième de 24, ou le 12ème de 24, est 2 ; le onzième de 33, ou le 11ème de 33, est 3 ; le triple de 8 est 3 fois 8, ou 24 ; le quadruple de 7 est 4 fois 7, ou 28, etc..... Ceux des commen-

çans

çans qui desireront acquérir l'habitude du calcul, devront s'exercer sur un grand nombre d'exemples ; ils trouveront que le quotient de 1 757 728 par 5782, est 304 ; que celui de 27 682 450 176 par 30 064, est 920 784 ; que celui de 27 682 450 176 par 920 784, est 30 064 ; que celui de 37 098 272 027 888 625 976 par 9 274 568 est 4 000 000 003 007 ; que celui de 402 762 392 par 5098 est 79 004 ; que celui de 14 778 029 556 par 7389 est 2 000 004, etc..... Ces résultats confirment l'exactitude de ceux obtenus dans la multiplication ; on y reconnaît que la division sert à décomposer les produits que la multiplication a formés.

Preuves des quatre Règles.

96. LORSQU'UNE opération est terminée, il est de la plus grande importance de s'assurer de l'exactitude du résultat ; on ne doute pas de la rigueur des règles données pour effectuer le calcul, on craint seulement d'avoir commis une erreur en posant un nombre pour un autre ; ce qu'on appelle une *faute de calcul.* Le moyen qui s'offre le premier, comme le plus naturel, est de recommencer le calcul, pour voir s'il conduit au même résultat ; mais en suivant ce procédé on pourrait répéter la même erreur dans le même sens, ce qui empêcherait de l'apercevoir. Pour parer à cet inconvénient, on a cherché à vérifier le résultat par une opération différente de celle qui l'a fourni ; cette opération se nomme la *preuve.* On l'effectue de la manière suivante.

97. Pour faire la *preuve de l'addition* on observe que si, commençant par la gauche, on écrit successivement sous chaque colonne verticale la retenue qui a résulté de l'addition de la colonne précédente, on doit, s'il n'y a pas eu d'erreur de calcul, trouver zéro pour la retenue placée sous la colonne des unités, parce que cette colonne n'étant précédée d'aucune autre, la retenue de la colonne qui précède celle des unités est nécessairement zéro. Appliquons cette preuve à l'exemple du n° 32, où il s'agissait d'ajouter les nombres 598, 979, 757, comme on le voit d'autre part.

598 979 757	Nombres à ajouter.
2334	Somme.
220	Retenues.

Pour obtenir la somme 2334, on a commencé l'addition par la droite, en disant : 8 unités et 9 unités font 17 unités, et 7 unités font 24 unités, ou 2 dixaines plus 4 unités; je pose 4 unités et je retiens les 2 dixaines : 2 dixaines retenues et 9 dixaines valent 11 dixaines et 7 dixaines font 18 dixaines et 5 dixaines font 23 dixaines, ou 2 centaines plus 3 dixaines, je pose 3 au rang des dixaines, et je retiens les 2 centaines; 2 centaines retenues et 5 centaines font 7 centaines et 9 centaines font 16 centaines et 7 centaines font 23 centaines, ou 3 centaines et 2 mille, je pose les 3 centaines et j'avance les 2 mille. Afin de vérifier si la somme 2334, ainsi obtenue, est exacte, on répétera la même opération, dans un sens inverse, et commençant l'addition par la gauche, on dira; 5 centaines et 9 centaines font 14 centaines et 7 centaines font 21 centaines; mais on a écrit 23 centaines à la somme, les 2 centaines de surplus proviennent donc de la retenue de 20 dixaines faite dans l'addition de la colonne des dixaines, cette colonne a donc dû donner 23 dixaines, mais elle n'en donne que 21, les 2 dixaines de surplus proviennent donc de la retenue de 20 unités faite dans l'addition de la colonne des unités, qui doit conséquemment avoir donné 24 unités; la colonne des unités doit donc, si l'addition est exacte, contenir 24 unités; car n'étant précédée d'aucune autre, elle ne peut avoir été augmentée par aucune retenue; cette colonne contient effectivement 24 unités, la retenue placée sous la colonne des unités est donc 0, la somme 2334 est donc effectivement celle des nombres donnés. *Dans la pratique on se dispense de répéter continuellement le nom de l'espèce d'unité sur laquelle on opère;* ainsi, dans notre exemple, pour trouver la somme 2334, on a commencé par la droite, en disant; 8 et 9 font 17 et 7 font 24, je

pose 4 et je retiens 2; 2 de retenue et 9 valent 11 et 7 font 18 et 5 font 23, je pose 3 et je retiens 2; 2 de retenue et 5 font 7 et 9 font 16 et 7 font 23, je pose 3 et j'avance 2. Afin de vérifier si la somme 2334 est exacte, je dirai, en commençant l'addition par la gauche; 5 et 9 font 14 et 7 font 21, mais on a écrit 23, l'addition de la colonne précédente a donc donné la retenue 2, cette colonne doit donc donner 23 pour somme; mais elle ne donne que 21, on avait donc retenu 2 dans l'addition de la colonne des unités, cette colonne doit donc contenir 24 unités; comme elle les contient, en effet, la retenue placée sous la colonne des unités est zéro, la somme obtenue est donc exacte. Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à tous les nombres, nous établirons cette règle générale. *Pour faire la preuve de l'addition, additionnez successivement chaque colonne verticale, en commençant par la première à gauche; retranchez chaque somme partielle de celle qu'elle est censée avoir donné; écrivez les restes, provenant des retenues, chacun sous la colonne correspondante; alors si l'addition est exacte, le dernier reste placé sous la dernière colonne à droite, sera zéro. On doit bien se rappeler qu'en allant de gauche à droite, chaque unité d'une colonne en vaut dix de la suivante (n° 22), de manière que la retenue placée sous chaque colonne exprime des dixaines d'unités de la colonne suivante.*

98. La *preuve de la soustraction* se déduit de la définition même; en effet, le reste étant l'excès du plus grand nombre sur le plus petit (n° 37), si l'on ajoute le reste au plus petit nombre, on doit retrouver le plus grand. Ainsi, dans ces exemples,

De....	8 679	8 796	67 859	60 007
ôtez....	6 325	592	29 467	38 758
Reste...	2 354	8 204	38 392	21 249.
Preuve..	8 679	8 796	67 859	60 007.

On reconnaît, 1°. que 2354 est la différence exacte entre 8679 et 6325, parce qu'ajoutée au plus petit nombre 6325 elle donne 8679, qui est effectivement le plus grand nombre; 2°. que 8204 est la différence exacte entre 8796 et 592; car ajoutée au plus

petit de ces deux nombres, elle donne le plus grand; 3°. que 38 392 est la différence exacte entre 67 859 et 29 467; car ajoutée au plus petit de ces deux nombres, elle donne le plus grand; 4°. que 21 249 est la différence exacte entre 60 007 et 38 758; parcequ'ajoutée au plus petit de ces deux nombres, elle donne le plus grand. En général, *on reconnaît qu'une soustraction est bien faite quand le reste ajouté au plus petit nombre, donne une somme égale au plus grand nombre; dans le cas contraire, l'opération renferme une erreur de calcul.*

99. Pour faire la *preuve de la multiplication*, il faut diviser le produit par un de ses facteurs, on doit trouver l'autre pour quotient. Ainsi on reconnaît que 15 est le produit de 5 par 3, à ce que 15 divisé par 5 donne 3 pour quotient; le nombre 216 832 est effectivement le produit de 847 par 256, car divisé par 847 il donne 256 pour quotient; le nombre 1 757 728 est effectivement le produit de 5782 par 304, car divisé par son facteur 5782 il donne un quotient 304 égal à son autre facteur; et en général, *une multiplication a été bien faite quand le produit divisé par un de ses facteurs donne un quotient égal à l'autre facteur; elle est également exacte lorsque le changement d'ordre des facteurs ne change pas le produit.*

100. La *preuve de la division* se déduit immédiatement de sa définition; car le dividende étant un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs (page 67, n° 71), si le quotient est exact, en le multipliant par le diviseur, il doit reproduire le dividende. Ainsi, dans l'exemple du n° 85 (page 79), on reconnaît que 367 est le quotient exact de 1468 par 4, parce que 367 multiplié par 4 donne 1468; de même dans le n° 86, le nombre 256 est le quotient exact de 216 832 par 847; car, multiplié par le diviseur, il reproduit le dividende; et en général, *une division a été bien faite quand le diviseur multiplié par le quotient donne un produit égal au dividende; elle est également exacte quand le dividende divisé par le quotient obtenu donne le diviseur.*

101. Si l'on examine attentivement la méthode que nous venons d'exposer pour vérifier chaque règle, on reconnaîtra facilement que *la preuve sert à augmenter la probabilité de l'exac-*

titude du résultat, sans pouvoir cependant en convaincre d'une manière absolue; car quelque méthode que l'on emploie, il est toujours possible, en faisant la preuve, de commettre des erreurs qui détruisent celles qui ont conduit au résultat, et dans ce cas la preuve est vicieuse, puisqu'elle donne à un résultat faux l'apparence de l'exactitude. C'est cet inconvénient qui a engagé à chercher diverses preuves de chaque règle, on en a découvert de fort ingénieuses; mais comme elles ne sont pas d'une nécessité absolue, et que d'ailleurs elles reposent sur des propriétés de nombres assez difficiles à démontrer, j'ai cru devoir les renvoyer à la dernière partie de mon Arithmétique.

102. Ce qui précède offre une théorie complète du calcul des nombres entiers; cette théorie ne comprend que deux règles essentiellement différentes, l'addition et la soustraction; car la multiplication et la division n'en sont que des cas particuliers. L'arithmétique paraîtrait donc devoir se terminer ici; mais il est un cas de la division que nous n'avons pas encore traité, celui où le dernier reste de la division n'est pas zéro; la recherche du quotient donne alors naissance à des nombres d'une nouvelle espèce, que nous allons faire connaître.

FRACTIONS.

103. DANS tous les exemples de division, nous avons supposé que le dividende contenait le diviseur un nombre exact de fois, ce qui nous a donné zéro pour dernier reste; mais il est très-rare que cette condition soit remplie; si l'on voulait par exemple diviser 41 en 5 parties égales, il faudrait trouver un nombre qui, multiplié par 5, reproduisit 41; on obtiendrait donc ce nombre en divisant 41 par 5; or le dividende 41 est plus grand que le produit 40, du diviseur 5 par 8; le quotient est donc plus grand que 8; mais le dividende 41 est moindre que le produit 45, du diviseur 5 par 9, le quotient est donc moindre que 9; le quotient de 41 par 5, étant plus grand que 8 et moindre que 9, n'est pas assignable en nombre entier (n° 3, page 2); le calcul vient

à l'appui de ce raisonnement, car la division de 41 par 5 donne 8 au quotient et 1 de reste. Si l'on veut alors se former une idée exacte du quotient, il faut observer que 41 étant composé de 40 plus 1, pour diviser 41 par 5, il suffit de diviser successivement 40 par 5, 1 par 5, et de réunir ensuite les deux quotiens; or le quotient exact de 40 par 5 est 8, il ne reste donc plus qu'à diviser 1 par 5, ce qui ne peut s'exécuter qu'en concevant l'unité divisée en 5 parties égales; car chacune de ces parties, étant le cinquième de l'unité, exprimera le quotient de 1 par 5; la réunion de ces deux quotiens partiels montre que le quotient de 41 par 5, se compose de 8 et d'une des 5 parties égales dont on peut concevoir l'unité composée. Un raisonnement analogue à celui que nous venons d'employer, fera voir qu'on partagera 25 en 7 parties égales, en divisant dans le même nombre de parties ses élémens 21 et 4; or le quotient de 21 par 7 est 3; il reste donc à diviser 4 par 7; afin d'y parvenir, on décomposera le nombre 4 en 1 plus 1 plus 1 plus 1; on prendra la septième partie de chacune de ces unités, ce qui donnera le septième d'un plus le septième d'un plus le septième d'un plus le septième d'un; on réunira ces quatre quotiens partiels, et l'on aura 4 fois le septième d'un, pour le quotient de 4 par 7, ensorte que *un septième de 4 est la même chose que 4 fois le septième d'un;* (cette observation nous sera bientôt utile). La réunion des deux quotiens partiels, de 21 par 7 et de 4 par 7, nous apprend que le quotient de 25 par 7 est formé, de 3 plus de 4 des 7 parties égales dont on peut concevoir l'unité composée. On verrait de la même manière, que le quotient de 23 par 4 est formé du nombre entier 5 et de 3 des 4 parties égales dont on conçoit l'unité composée: que le quotient de 38 par 7 est 5 plus 3 des 7 parties égales dont on peut concevoir l'unité composée, et ainsi de suite.

104. En général, *lorsque le dividende ne contient pas le diviseur un nombre exact de fois, on forme le quotient total, en ajoutant à ses unités le quotient du dernier reste par le diviseur. Pour obtenir ce dernier quotient, on décompose l'unité du dividende en un nombre de parties égales marqué par le diviseur, et l'on prend ensuite autant de ces parties égales qu'il y a d'unités*

dans le reste. Par exemple, le quotient total de 71 par 9, se forme en ajoutant aux 7 unités du quotient, 8 des 9 parties égales dont on peut concevoir l'unité composée; de même, pour obtenir le quotient de 46 par 7, on divisera 46 par 7, ce qui donnera 6 unités au quotient, et 4 unités de reste; on décomposera l'unité en 7 parties égales, et l'on prendra 4 de ces parties; alors le quotient de 46 par 7 sera composé de 6 unités, et de 4 des 7 parties égales dont on peut concevoir l'unité composée.

105. *La partie qu'on ajoute aux unités du quotient pour le compléter, est toujours plus petite que l'unité du dividende;* car cette unité étant décomposée en un nombre de parties égales marqué par le diviseur, pour la recomposer, il faudrait prendre autant de ces parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, tandis qu'on n'en prend qu'un nombre marqué par le dernier reste, toujours moindre que le diviseur (nº 93, 1°.) Cette partie, qu'on ajoute aux unités du quotient pour le compléter, étant toujours plus petite qu'une unité du dividende, a reçu à cause de cela le nom de FRACTION. Ainsi, *lorsque le dividende ne contient pas exactement le diviseur, ou, ce qui revient au même, lorsque le dividende n'est pas un multiple du diviseur, le quotient total se compose d'un nombre entier et d'une* FRACTION *qui exprime la valeur du dernier reste divisé par le diviseur.* On est convenu d'indiquer cette division, en plaçant le diviseur sous le dernier reste, et l'en séparant par un *trait* horizontal. D'après ces conventions, le quotient de 21 par 5 est 4 plus $\frac{1}{5}$, celui de 25 par 7 est 3 plus $\frac{4}{7}$, celui de 23 par 4 est 5 plus $\frac{3}{4}$, celui de 38 par 7 est 5 plus $\frac{3}{7}$; les quantités $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{7}$, sont des *fractions*, dont chacune indique le quotient du dernier reste par le diviseur; la première $\frac{1}{5}$ indique le quotient de 1 par 5, la 2ème celui de 4 par 7, la 3ème celui de 3 par 4, la 4ème celui de 3 par 7; ensorte que, *dans une fraction, le* TRAIT *qui sépare le nombre supérieur du nombre inférieur, est un signe de division qui équivaut à,* DIVISÉ PAR. Les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{7}$, peuvent donc s'énoncer, 3 *divisé par* 4, 3 *divisé par* 7.

106. Pour énoncer les fractions, on est convenu de donner des noms particuliers aux diverses subdivisions de l'unité. Ces

noms, excepté un, dérivent immédiatement des expressions adoptées pour la division des nombres. En effet : 1°. lorsqu'on divise un nombre par 2 par 3 ou par 4, on dit qu'on en prend, la *moitié*, le *tiers*, ou le *quart* (n° 95) ; les parties égales qui résultent de la division de l'unité, par 2, par 3 ou par 4, devraient donc s'appeler, des *moitiés*, des *tiers*, des *quarts ;* mais par une exception assez déplacée, on a nommé *demi*, la moitié de l'unité (*) ; 2°. lorsque le diviseur est plus grand que 4, on joint constamment à son nom la terminaison *ième;* ensorte que diviser un nombre, par 5, par 6, par 7, par 8, etc. c'est en prendre le *cinquième*, le *sixième*, le *septième*, le *huitième*, etc. (95) ; les subdivisions qui résultent de la division de l'unité en plus de quatre parties égales, doivent donc s'énoncer d'une manière uniforme, en ajoutant la terminaison *ième*, au nom du nombre qui exprime en combien de parties égales l'unité est décomposée ; il n'y a pas d'exceptions à cet égard ; les parties égales qui résultent de la division de l'unité par les nombres 5, 6, 7, 8, etc. se nomment des *cinquièmes*, des *sixièmes*, des *septièmes*, des *huitièmes*, etc. ; le mot *unité* est toujours sous-entendu ; ainsi un cinquième, signifie un cinquième d'unité ; un dixième, signifie un dixième d'unité, etc. D'après ces conventions, l'*unité est composée, de deux demis, ou de trois tiers, ou de quatre quarts, ou de cinq cinquièmes, ou de six sixièmes*, etc. Les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, etc. qui expriment les quotiens de l'unité par les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. doivent s'appeler, *un demi, un tiers, un quart, un cinquième, un sixième, un septième*, etc. ; et parconséquent les fractions, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, etc. qui peuvent être considérées comme exprimant, 2 fois $\frac{1}{3}$, 3 fois $\frac{1}{4}$, 2 fois $\frac{1}{5}$, 4 fois $\frac{1}{5}$, 3 fois $\frac{1}{6}$, 5 fois $\frac{1}{6}$, 2 fois $\frac{1}{7}$, 5 fois $\frac{1}{7}$, etc. doivent se nommer *deux tiers, trois quarts, deux cinquièmes, quatre cinquièmes, trois sixièmes, cinq sixièmes, deux sep-*

(*) Le mot *demi*, particularise l'une des deux parties égales de l'unité ; le mot *moitié*, a une acception beaucoup plus étendue ; il exprime chacune des deux parties égales d'un nombre. Ainsi, par exemple, on dit : que la moitié d'un est *un demi*, que la moitié de 6 est 3, que la moitié de 18 est 9 ; mais on ne dit pas, que la demie de 6 est 3, et que la demie de 18 est 9.

tièmes, cinq septièmes, etc. Ensorte que dans une fraction, le nombre inférieur donne le nom de l'espèce des parties de la fraction, et le nombre supérieur ne sert qu'à en indiquer le nombre. *Une fraction est donc toujours composée de deux nombres; l'un inférieur, qui marque en combien de parties égales l'unité est divisée; l'autre supérieur, qui désigne combien on doit prendre de ces parties pour composer la valeur de la fraction;* le nombre inférieur servant à *dénommer* plutôt telle fraction que telle autre, s'appelle *dénominateur*, et le nombre supérieur a reçu le nom de *numérateur*, du mot latin *numerare*, qui signifie *nombrer*, à cause de sa propriété d'indiquer quel nombre on doit prendre des parties exprimées par le *dénominateur*, pour composer la valeur de la fraction. Le numérateur et le dénominateur s'appellent conjointement les *deux termes* de la fraction; le numérateur est le *premier terme*, le dénominateur est le *second terme*. Ainsi, dans la fraction $\frac{4}{7}$, nommée *quatre septièmes*, le numérateur est 4, le dénominateur est 7, le premier terme est 4, le second terme est 7; le dénominateur 7, indique que l'unité a été divisée en 7 parties égales; le numérateur 4, marque que la valeur de la fraction se compose de 4 de ces parties égales; de même, dans la fraction $\frac{7}{15}$, le numérateur est 7, le dénominateur est 15, les deux termes sont 7 et 15; le 1er terme est 7, le second est 15; le dénominateur 15 indique que l'unité est divisée en 15 parties, chacune égale à un quinzième; le numérateur 7 exprime que la valeur de la fraction se compose de 7 quinzièmes, etc.

107. De tout ce qui précède on peut déduire cette règle générale: *pour énoncer une fraction quelconque; 1°. si le dénominateur est l'un des nombres, 2, 3, 4, ajoutez au nom du numérateur l'un des mots*, DEMI, TIERS, QUART; *bien entendu que demi correspond au dénominateur 2; tiers au dénominateur 3, et quart au dénominateur 4*; 2°. *si le dénominateur surpasse 4, énoncez successivement les nombres qui servent de numérateur et de dénominateur, et joignez au nom du dénominateur la terminaison* IÈME. D'après cette règle; pour énoncer la fraction $\frac{2}{3}$, j'ajouterai au nom *deux*, de son numérateur 2, le mot *tiers*,

qui convient à son dénominateur 3, et j'obtiendrai *deux tiers*, pour le nom de la fraction $\frac{2}{3}$; de même, pour énoncer la fraction $\frac{3}{4}$, j'ajouterai au nom *trois*, de son numérateur 3, le mot *quart*, qui convient à son dénominateur 4, et j'aurai *trois quarts*, pour le nom de la fraction $\frac{3}{4}$. S'il s'agissait de la fraction $\frac{47}{56}$, dont le dénominateur surpasse 4, j'énoncerais successivement son numérateur 47 et son dénominateur 56, auquel j'ajouterais la terminaison *ièmes*, et j'aurais *quarante-sept cinquante-six*IÈMES, pour le nom de la fraction $\frac{47}{56}$; de même, pour nommer la fraction $\frac{30201}{70111}$, j'énoncerais successivement son numérateur 30 201 et son dénominateur 70 111, auquel j'ajouterais la terminaison *ièmes*, et j'aurais *trente mille deux cent un soixante-dix mille cent-onz*IÈMES, pour le nom de la fraction proposée ; on reconnaîtra de la même manière que les fractions $\frac{347}{2728}$; $\frac{2001003}{2001007}$; $\frac{30201}{11101}$; $\frac{3000000}{111}$, *ont pour énoncés ; trois cent quarante-sept deux mille sept cent vingt-huit*IÈMES ; *deux millions mille trois deux millions mille septi*ÈMES ; *trente mille deux cent un onze mille cent un*IÈMES ; *trois millions cent onz*IÈMES, *etc.* Les commençans doivent s'exercer à appliquer cette règle à l'énoncé d'un plus grand nombre de fractions.

108. Passons à la solution du problême inverse, et proposons-nous d'écrire une fraction énoncée (*) ; la solution de ce problême n'est qu'une suite immédiate de la règle du n° 107; elle offre néanmoins quelques difficultés que nous aurons soin de lever ; 1°. *si l'énoncé de la fraction se termine par l'un des mots*, **DEMI**, **TIERS**, *ou* **QUART** ; *le nombre énoncé sera le numérateur, et le dénominateur l'un des nombres deux, trois, ou quatre ; le dénominateur* 2, *correspondra au mot demi, le dénominateur* 3, *au mot tiers, et le dénominateur* 4, *au mot quart*. Ainsi, *cinq demis*, s'écrit $\frac{5}{2}$; *sept tiers*, s'écrit $\frac{7}{3}$; *cent dix-huit quarts*, s'écrit $\frac{118}{4}$, etc. ; 2°. *si l'énoncé finit par la terminaison* IÈME,

(*) La remarque faite au sujet des nombres entiers dans la note du n° 8, page 9, s'applique aux fractions : *une fraction* ÉNONCÉE *est une fraction* DICTÉE, *ou* ÉCRITE *en toutes lettres ; une fraction* ÉCRITE *est exprimée en* CHIFFRES. Ainsi : deux tiers, cinq septièmes, etc. sont des *fractions énoncées* ; $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{13}$, etc. sont des *fractions écrites*.

on commencera par la supprimer, l'énoncé qui restera sera celui de deux nombres entiers que l'on écrira d'après la règle du n° 17; le premier sera le numérateur, et le second le dénominateur; ainsi, pour écrire la fraction *cinq sept*IÈMES, on supprime d'abord la terminaison *ièmes*, l'énoncé *cinq-sept* qui reste alors, est celui des nombres 5 et 7, dont le 1er est le numérateur et le 2ème le dénominateur de la fraction énoncée, cette fraction est donc $\frac{5}{7}$. Si l'on supprime la terminaison *ièmes* dans l'énoncé de la fraction *trois cent quarante-sept deux mille sept cent vingt-huit*IÈMES, il restera l'énoncé des deux nombres 347 et 2728 qui expriment les deux termes de la fraction cherchée $\frac{347}{2728}$. On verra de même, que l'énoncé *deux millions mille trois deux millions mille sept*IÈMES, est celui de la fraction $\frac{2001003}{2001007}$; car après la suppression de la terminaison IÈMES, il reste l'énoncé des deux nombres écrits au numérateur et au dénominateur. L'énoncé *trente mille deux cent un onze mille cent un*IÈMES est celui de la fraction $\frac{30201}{11101}$; pour écrire la fraction *trois millions cent onz*IÈMES, on supprimera la terminaison IÈMES, il restera l'énoncé des deux nombres 3 000 000 et 111, dont le 1er est le numérateur, et le second le dénominateur de la fraction cherchée $\frac{3000000}{111}$, etc.

109. Il sera très-facile d'écrire la fraction, toutes les fois que son énoncé mettra en évidence les énoncés partiels du numérateur et du dénominateur; mais cela n'arrive pas toujours; dans certains cas, un même énoncé appartient à des fractions différentes, et dans d'autres, plusieurs énoncés, qui ne diffèrent que par l'ortographe appartiennent à des fractions différentes dont la prononciation est cependant la même. Si l'on donnait, par exemple, l'énoncé.....

*Six cent dix-sept mill*IÈMES,

il serait impossible d'assigner la fraction qu'il exprime, car il appartient aux fractions $\frac{610}{7000}$, $\frac{617}{1000}$; on voit ici le grand avantage des chiffres sur les lettres; une fraction écrite en chiffres ne laisse aucun doute sur sa valeur, tandis qu'une fraction écrite en toutes lettres peut appartenir à des fractions différentes. La

prononciation induit encore plus souvent en erreur ; par exemple, les six fractions......

$$\frac{600}{17736};\ \frac{617700}{36};\ \frac{610}{7736};\ \frac{617730}{6};\ \frac{6}{117736};\ \frac{617007}{136};$$

se prononcent toutes de la même manière. D'après ces diverses considérations, j'ai cru que le seul moyen de détruire toutes ces causes d'erreur, était d'attaquer le mal dans sa source, en ayant toujours soin, pour l'écriture en toutes lettres, de mettre une virgule entre l'énoncé des deux termes de la fraction, et dans la dictée, de laisser une *pose* entre la prononciation du numérateur et celle du dénominateur. L'importance de ces conventions m'engage à les traduire par cette règle générale. 1°. *Lorsque vous écrivez une fraction, par le moyen des lettres, ayez toujours soin de mettre une* VIRGULE *entre le nom du numérateur et celui du dénominateur.* 2°. *Lorsque vous dictez une fraction, laissez une* POSE *suffisante entre l'énoncé du numérateur et celui du dénominateur.* D'après ces principes, la fraction $\frac{500}{17}$, s'écrira *cinq cent, dix-septièmes.* Si l'on dictait cette fraction, on aurait soin de laisser une pose entre la prononciation de ses deux termes, 500 et 17; la fraction $\frac{510}{7}$ s'écrira *cinq cent dix, septièmes.* Si l'on dictait cette fraction, on aurait soin de laisser une pose entre les énoncés des deux termes 510 et 7 ; enfin la fraction $\frac{5}{117}$ doit s'écrire *cinq, cent dix-septièmes.* Dans chacun des énoncés précédens, la virgule sépare le nom du numérateur de celui du dénominateur. Les trois fractions $\frac{500}{17}$, $\frac{510}{7}$, $\frac{5}{117}$, se confondraient dans la prononciation, si l'on ne laissait pas une pose entre l'énoncé du numérateur et celui du dénominateur.

Réciproquement, si l'on veut écrire la fraction énoncée : *cinq cents, dix-septièmes*, on supprimera la terminaison *ièmes ;* il restera *cinq cents, dix-sept ;* la virgule séparant l'énoncé du numérateur de celui du dénominateur, je vois que la fraction cherchée a *cinq cents* pour numérateur, et *dix-sept* pour dénominateur; elle est donc exprimée par $\frac{500}{17}$. On verra de même, que la fraction ; *six, cent millièmes* ; doit s'écrire $\frac{6}{100000}$, tandis que la fraction ; *six cent, millièmes* ; s'écrit $\frac{600}{1000}$. En ayant égard aux observations précédentes, on ne pourra jamais être induit en erreur.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède, que l'énoncé proposé était celui d'une fraction ; les causes d'erreur seraient bien plus nombreuses, si l'on ignorait absolument à quelle espèce de nombre appartient l'énoncé, car alors il pourrait convenir à diverses combinaisons de nombres entiers et de fractions ; par exemple.......

Trois mille deux cent cinquante-sept millièmes,

est un nombre énoncé vicieux, en ce qu'il convient également aux quantités différentes........

$$\frac{3257}{1000},\ \frac{3250}{7000},\ \frac{3000}{257000},\ 3000\,\frac{257}{1000}.$$

Le seul moyen de parer à ces nombreux inconvéniens, est de placer le mot *unité* entre l'énoncé du nombre entier et celui de la fraction; bien entendu que dans ce dernier, la *virgule* séparera le nom du numérateur de celui du dénominateur, avec ces conventions; l'énoncé de la fraction $\frac{3257}{1000}$ sera *trois mille deux cent cinquante-sept, millièmes*; 3000 $\frac{257}{1000}$, s'énoncera *trois mille* UNITÉS *deux cent cinquante-sept, millièmes*; 3250 $\frac{7}{1000}$ s'écrira; *trois mille deux cent cinquante* UNITÉS *sept, millièmes*; les formes diverses de ces énoncés ne peuvent plus laisser aucun doute sur les valeurs des quantités qu'ils représentent; ainsi : *quatre cent trente-sept, centièmes* est l'énoncé de la fraction $\frac{437}{100}$; *quatre cent trente* UNITÉS *sept, centièmes*, représente le nombre entier 430 joint à la fraction $\frac{7}{100}$; *cent trente* UNITÉS *dix-sept, millièmes*, est l'énoncé du nombre entier 130 joint à la fraction $\frac{17}{1000}$, etc.

110. Nous avons prouvé dans le n° 103, *que la fraction $\frac{4}{7}$ indique également, ou un septième de 4, ou 4 septièmes d'un.* Sous le premier aspect, cette fraction exprime le quotient de son numérateur 4 par son dénominateur 7, et doit s'énoncer *4 divisé par 7*; sous le second aspect, le dénominateur 7 indique que l'unité est divisée en 7 parties égales, et le numérateur 4 dit qu'il faut 4 de ces parties pour composer la valeur de la fraction $\frac{4}{7}$, qui doit alors s'énoncer, *quatre, septièmes*. Cette remarque est générale : *la valeur d'une fraction s'obtient également, ou en divisant son numérateur par son dénominateur, ce qui suit de son origine, ou en divisant l'unité en un nombre de parties égales*

marqué par le dénominateur, et prenant autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur. La première manière d'envisager une fraction tient à son origine, car une fraction a été engendrée (105) par la nécessité d'exprimer le quotient du dernier reste d'une division par le diviseur; cela nous donnera le moyen de mettre les fractions ordinaires sous la forme de nombres entiers. La seconde manière d'envisager une fraction, a engendré son nom; elle offre les plus grands avantages dans le calcul, parce qu'elle fait dépendre toutes les fractions, des subdivisions de l'unité; avantage qui disparaît, lorsqu'on considère une fraction comme égale au quotient de son numérateur par son dénominateur. Éclaircissons ce que nous venons de dire, au moyen d'un exemple numérique, et proposons-nous d'ajouter ensemble les deux fractions $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{7}$; on ne saurait y parvenir, en les considérant comme des quotiens; car un septième de 3 et un septième de 2, sont deux unités essentiellement différentes, qui ne peuvent conséquemment se réunir en un seul nombre; mais il n'en est pas ainsi, quand on considère ces fractions sous le second aspect; car alors exprimant 3 fois un septième et 2 fois un septième, leur somme est évidemment 5 septièmes, ou $\frac{5}{7}$. Cet exemple suffit pour faire apercevoir que, *lorsqu'il s'agira du calcul des fractions, on devra toujours considérer le dénominateur comme indiquant en combien de parties égales l'unité est divisée, et le numérateur comme marquant combien il faut prendre de ces parties pour composer la valeur de la fraction.* Ceci bien compris, passons au calcul des fractions.

Calcul des Fractions.

111. L'ADDITION et la soustraction des fractions qui ont le même dénominateur, n'offrent aucune difficulté; car le dénominateur indiquant en combien de parties égales l'unité est divisée, quand les dénominateurs sont égaux, on est certain que dans chaque fraction l'unité est divisée en un même nombre de parties égales; ces parties sont donc toutes égales entr'elles; il suffit donc d'opérer sur les numérateurs, qui indiquent le nombre de parties égales renfermées dans chaque fraction; le résultat est

alors composé de parties égales de l'espèce de celles qui l'ont fourni, ce qu'on exprime en effectuant le résultat du dénominateur commun. Ainsi, par exemple, $\frac{2}{7}$ plus $\frac{3}{7}$ font $\frac{5}{7}$; car les fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{7}$, exprimant respectivement 2 parties égales à $\frac{1}{7}$ et 3 parties égales à $\frac{1}{7}$, leur somme doit être composée, de 2 parties plus 3 parties, égales à $\frac{1}{7}$, c'est-à-dire, de 5 parties égales à $\frac{1}{7}$, elle est donc effectivement $\frac{5}{7}$; on peut encore s'en assurer, en remplaçant le dénominateur par le nom des parties égales qu'il indique, car alors, $\frac{2}{7}$ plus $\frac{3}{7}$ deviennent, 2 septièmes plus 3 septièmes, dont la somme est bien certainement 5 septièmes, ou $\frac{5}{7}$. On verra de la même manière; que $\frac{7}{11}$ plus $\frac{2}{11}$, font $\frac{9}{11}$; que $\frac{7}{13}$ plus $\frac{5}{13}$, font $\frac{12}{13}$; que $\frac{112}{417}$ plus $\frac{29}{417}$, font $\frac{141}{417}$, etc.

Des raisonnemens analogues conduisent à la soustraction des fractions de même dénominateur; s'il s'agissait d'ôter $\frac{2}{17}$ de $\frac{11}{17}$, on dirait, de 11 dix-septièmes ôtez 2 dix-septièmes, reste 9 dix-septièmes, ou $\frac{9}{17}$; on reconnaîtra avec la même facilité, que $\frac{9}{13}$ moins $\frac{2}{13}$ valent $\frac{7}{13}$, que $\frac{5}{19}$ moins $\frac{2}{19}$ valent $\frac{3}{19}$, que $\frac{141}{417}$ moins $\frac{112}{417}$ valent $\frac{29}{417}$, etc. : chaque reste est exact; car, ajouté à la plus petite fraction, il donne la plus grande.

112. En général, *pour ajouter, ou pour soustraire deux fractions qui ont le même dénominateur, il suffit de former la somme ou la différence de leurs numérateurs et d'affecter le résultat, du dénominateur commun. Cette règle s'applique à l'addition d'un nombre quelconque de fractions de même dénominateur* : ainsi, par exemple, pour ajouter les quatre fractions $\frac{2}{51}$, $\frac{3}{51}$, $\frac{4}{51}$, $\frac{7}{51}$; je formerai la somme 16 de leurs numérateurs 2, 3, 4, 7; cette somme affectée du dénominateur commun 51, donnera $\frac{16}{51}$, pour la somme des fractions proposées.

La règle précédente ne peut pas s'appliquer à des fractions de dénominateurs différens, parce qu'alors, dans chaque fraction, l'unité n'étant plus divisée en un même nombre de parties égales, ces parties ne sont plus toutes égales entr'elles, on ne peut donc pas les combiner dans cet état; mais on le pourrait, si elles avaient le même dénominateur; il faut donc chercher les moyens de réduire plusieurs fractions au même dénominateur; cette réduction est fondée sur la propriété suivante.

113. *Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.* Pour le démontrer, considérons d'abord la fraction $\frac{3}{7}$; si son dénominateur 7 restant le même, on multipliait son numérateur 3 par 2, elle deviendrait $\frac{6}{7}$, et serait rendue 2 fois plus grande, car le dénominateur 7 ne changeant pas, comme il indique en combien de parties égales l'unité est divisée, on conçoit que l'unité reste divisée dans le même nombre de parties, ces parties restent donc de même grandeur, mais ayant multiplié le numérateur par 2, on a pris deux fois plus de ces mêmes parties, la fraction a donc été rendue deux fois plus grande. Si le numérateur 3, de la fraction $\frac{3}{7}$, restant le même, on multiplie son dénominateur 7 par 2, elle deviendra $\frac{3}{14}$ et sera rendue 2 fois plus petite, car le dénominateur 7, qui indique en combien de parties égales l'unité est divisée, étant rendu deux fois plus grand, l'unité est divisée en deux fois plus de parties, mais le numérateur n'a pas changé; on prend donc toujours le même nombre de ces parties deux fois plus petites, la fraction a donc été rendue deux fois plus petite. Cela posé : puisqu'en multipliant le numérateur de la fraction $\frac{3}{7}$ par 2, on la rend 2 fois plus grande, tandis qu'on la rend deux fois plus petite en multipliant son dénominateur par deux; lorsqu'on multiplie ses deux termes par 2, elle ne change pas de valeur, car après l'avoir rendue deux fois plus grande, on lui restitue sa valeur primitive en la rendant deux fois plus petite. De même, si l'on multiplie les deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$ par 3, elle deviendra $\frac{15}{21}$, et n'aura pas changé de valeur, car le numérateur 15, étant triple du numérateur 5, la 2ème fraction $\frac{15}{21}$ est composée de trois fois plus de parties que la 1ère; mais le dénominateur 21 étant triple du dénominateur 7, l'unité est divisée en 3 fois plus de parties dans la 2ème fraction que dans la 1ère, les parties qui composent la 2ème fraction sont donc trois fois plus petites que celles qui composent la 1ère, mais on en prend trois fois plus dans l'une que dans l'autre : il y a donc compensation. Si l'on multipliait les deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$ par 7, elle deviendrait $\frac{14}{21}$, et n'aurait pas changé de valeur; car, si d'un côté, la multiplication de son numérateur par 7 l'a rendue

rendue 7 fois plus grande, en la composant de 7 fois plus de parties; de l'autre, la multiplication de son dénominateur par 7 l'a rendue 7 fois plus petite, en la composant de parties 7 fois plus petites, ce qui établit une compensation exacte. Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à toutes les fractions, le principe énoncé est démontré.

114. La réduction des fractions au même dénominateur ne peut plus offrir aucune difficulté. S'il s'agit, par exemple, de réduire au même dénominateur les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$; on multipliera les deux termes 2 et 3 de la première par le dénominateur 7 de la seconde, elle deviendra $\frac{14}{21}$, et n'aura pas changé de valeur (113); la seconde fraction $\frac{5}{7}$ pourra de même être transformée en $\frac{15}{21}$, en multipliant ses deux termes 5 et 7 par le dénominateur 3 de la première fraction; on peut donc, sans changer la valeur de chacune des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$, les transformer en $\frac{14}{21}$ et $\frac{15}{21}$, elles ont alors acquis le dénominateur commun 21. De même, s'il s'agit de réduire au même dénominateur les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, on n'altérera pas leurs valeurs en multipliant les deux termes 2 et 3 de la 1ère par le dénominateur 5 de la 2ème, et les deux termes 4 et 5 de la 2ème, par le dénominateur 3 de la 1ère; on aura les nouvelles fractions $\frac{10}{15}$ et $\frac{12}{15}$, équivalentes à $\frac{2}{3}$ et à $\frac{4}{5}$. En général, *pour réduire deux fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de la première par le dénominateur de la seconde, et les deux termes de la seconde par le dénominateur de la première; les deux fractions qui en résultent ont pour dénominateur commun, le produit des dénominateurs des fractions primitives.*

115. Il est facile d'étendre ce procédé à un plus grand nombre de fractions. Si l'on avait, par exemple, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ et $\frac{6}{7}$, à réduire au même dénominateur, on y parviendrait évidemment, en réduisant d'abord les deux premières au même dénominateur, au moyen de la règle précédente, ce qui les changerait en, $\frac{10}{15}$ et $\frac{12}{15}$, pour réduire les nouvelles fractions $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{6}{7}$, au même dénominateur; comme elles n'ont que deux dénominateurs différens, 15 et 7, on peut leur appliquer la règle du n° 114, en multipliant les deux termes des deux premières fractions $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, par 7, et

les deux termes de la troisième par 15, ce qui transformera les fractions proposées en $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$. Il est facile d'apercevoir que ces deux opérations successives se réduisent à multiplier les deux termes de chacune des fractions proposées, par le produit des dénominateurs des deux autres : en effet, si l'on effectue ce calcul sur les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, on multipliera les deux termes 2 et 3 de la 1ère par 35, produit des dénominateurs 5 et 7 des deux autres fractions, ce qui changera $\frac{2}{3}$ en $\frac{70}{105}$; on changera de même la 2ème fraction $\frac{4}{5}$ en son équivalente $\frac{84}{105}$, en multipliant ses deux termes 4 et 5 par le produit 21 des dénominateurs 3 et 7 des deux autres fractions; enfin on multipliera les deux termes 6 et 7 de la 3ème fraction par 15, produit des dénominateurs 3 et 5 des deux autres fractions, ce qui la transformera en $\frac{90}{105}$; et alors les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ seront exprimées par les fractions équivalentes $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$; ces dernières ont pour dénominateur commun le produit 105 des dénominateurs 3, 5, 7, des fractions primitives. Si l'on généralise ce second procédé, on l'énoncera au moyen de cette règle générale. *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur; multipliez successivement les deux termes de chacune, par le produit des dénominateurs différens de toutes les autres. Cela n'altèrera pas leurs valeurs (n° 113), et les nouvelles fractions auront pour dénominateur commun le produit de tous les dénominateurs des fractions primitives.*

116. Voici quelques applications des règles précédentes. Pour obtenir la somme des fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$, on les réduira d'abord au même dénominateur, d'après la règle du n° 114, en multipliant successivement les deux termes 2 et 7 de la 1ère, par le dénominateur 8 de la 2ème, et les deux termes 3 et 8 de la 2ème par le dénominateur 7 de la 1ère; on aura les nouvelles fractions $\frac{16}{56}$ et $\frac{21}{56}$; leur somme aura, pour numérateur, la somme 37 de leurs numérateurs 16 et 21, et pour dénominateur, leur dénominateur commun 56 (n° 112); cette somme sera donc $\frac{37}{56}$. Si l'on demandait la différence entre les fractions $\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{7}$, on les réduirait d'abord au même dénominateur, ce qui les changerait en $\frac{21}{56}$ et $\frac{16}{56}$; la différence 5 des numérateurs 21 et 16, affectée du dé-

nominateur commun 56, donnerait $\frac{5}{56}$ pour la différence demandée. On trouvera de la même manière, que les fractions $\frac{2}{11}$ et $\frac{3}{8}$, réduites au meme dénominateur, deviennent $\frac{16}{88}$ et $\frac{33}{88}$, que leur somme est $\frac{49}{88}$, et que leur différence est $\frac{17}{88}$. Pour obtenir la somme des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{11}$, on les réduira d'abord au meme dénominateur, d'après la règle du n° 114, en multipliant les deux termes 2 et 3 de la 1re, par le produit 330 des dénominateurs 5, 6, 11, des trois autres fractions, ce qui donnera $\frac{660}{990}$; on multipliera ensuite les deux termes 4 et 5 de la 2ème par le produit 198, des dénominateurs 3, 6, 11, des trois autres fractions, ce qui changera la 2ème fraction $\frac{4}{5}$ en son équivalente $\frac{792}{990}$; la multiplication des deux termes 5 et 6, de la 3ème fraction par le produit 165, des dénominateurs 3, 5, 11, des trois autres fractions, donnera $\frac{825}{990}$; enfin on multipliera les deux termes 7 et 11, de la 4ème fraction $\frac{7}{11}$, par le produit 90, des dénominateurs 3, 5, 6, des trois autres fractions, ce qui donnera $\frac{630}{990}$. Les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{11}$, sont alors réduites au même dénominateur, car elles sont respectivement transformées en $\frac{660}{990}$, $\frac{792}{990}$, $\frac{825}{990}$, $\frac{630}{990}$; cela posé, leur somme aura, pour dénominateur, leur dénominateur commun 990, et pour numérateur la somme 2907 de leurs numérateurs 660, 792, 825, 630; cette somme sera donc exprimée par la fraction $\frac{2907}{990}$.

117. Le quotient du dernier reste par le diviseur, a reçu le nom de fraction; or ce dernier reste appelé *numérateur*, est nécessairement moindre que le diviseur, nommé *dénominateur;* conséquemment, *d'après l'origine d'une fraction, son numérateur est essentiellement plus petit que son dénominateur.* Les fractions $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$ et $\frac{6}{7}$, satisfont à cette condition : dans chacune, le numérateur est plus petit que le dénominateur; mais leur somme $\frac{13}{7}$, qui a la forme d'une fraction, en diffère essentiellement, puisque son numérateur 13 est plus grand que son dénominateur 7; pour distinguer les quantités de cette dernière espèce, dans lesquelles le numérateur surpasse le dénominateur, des fractions proprement dites, dans lesquelles le numérateur est moindre que le dénominateur, on les appelle *des expressions fractionnaires*, ou encore des *quantités fractionnaires;* ainsi $\frac{7}{5}$,

$\frac{8}{3}$, $\frac{9}{4}$, etc. sont des expressions fractionnaires, ou des quantités fractionnaires, tandis que $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{11}$, etc. sont des fractions.

118. Nous avons vu (110) que la valeur d'une fraction, dont le numérateur est moindre que le dénominateur, peut également s'obtenir, ou en divisant son numérateur par son dénominateur, ou en divisant l'unité en un nombre de parties égales marqué par le dénominateur, et prenant autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur. Les expressions dont le numérateur surpasse ou égale le dénominateur, peuvent également être considérées sous ce double aspect. Par exemple, les quantités $\frac{3}{3}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{14}{3}$, considérées sous le premier aspect, exprimant respectivement les quotiens, de 3 par 3, de 12 par 3, de 14 par 3, équivalent à 1, à 4, et à 4 plus $\frac{2}{3}$. On sera conduit au même résultat, si on les considère sous le second aspect; car alors dans l'expression $\frac{3}{3}$, le dénominateur 3 indique que l'unité est divisée en 3 parties égales, le numérateur 3 marque que l'on doit prendre ces 3 parties : cette expression a donc pour valeur l'unité, ou 1; d'où il suit que $\frac{12}{3}$, valant $\frac{3}{3}$ plus $\frac{3}{3}$ plus $\frac{3}{3}$ plus $\frac{3}{3}$, ou 1 plus 1 plus 1 plus 1, vaudra 4 unités, et que $\frac{14}{3}$, qui revient à $\frac{12}{3}$ plus $\frac{2}{3}$, vaudra 4 plus $\frac{2}{3}$.

119. Les raisonnemens que nous venons d'employer, pouvant s'appliquer à toutes les quantités fractionnaires, nous établirons ces principes généraux : 1°. *On peut traiter comme des fractions, celles dont le dénominateur n'est pas plus grand que le numérateur.* D'après cela, pour abréger le discours, nous comprendrons les nombres fractionnaires sous la dénomination générique de fractions; ensorte que par fraction, nous entendrons une quantité plus grande ou plus petite que l'unité; lorsque nous voudrons les distinguer, nous aurons soin d'en prévenir;

2°. *On peut mettre l'unité sous la forme d'une fraction qui ait tel dénominateur qu'on voudra, en lui donnant le même nombre pour numérateur.* Ainsi, pour mettre l'unité sous la forme d'une fraction qui ait pour dénominateur, ou 5, ou 12, ou 100; j'écris, ou $\frac{5}{5}$, ou $\frac{12}{12}$, ou $\frac{100}{100}$; il est bien évident que toutes ces expressions sont équivalentes à l'unité.

3°. *Pour changer un nombre entier en une fraction équiva-*

lente qui ait un dénominateur donné, il faut lui donner pour numérateur le produit du nombre entier par le dénominateur donné. Ainsi, pour mettre 3 sous la forme d'une fraction qui ait 7 pour dénominateur, j'écris $\frac{7 \text{ fois } 3}{7}$, ou $\frac{21}{7}$. La raison de ce procédé est facile à découvrir, car chaque unité valant $\frac{7}{7}$, les 3 unités du nombre 3, valent $\frac{7}{7}$ plus $\frac{7}{7}$ plus $\frac{7}{7}$, c'est-à-dire, $\frac{21}{7}$. De même, pour mettre 5 sous la forme d'une fraction ayant pour dénominateur, ou 4, ou 7, ou 9, j'écris, ou $\frac{20}{4}$, ou $\frac{35}{7}$, ou $\frac{45}{9}$. Pour mettre 5 sous la forme d'une fraction qui ait l'unité pour dénominateur, j'écris, d'après la règle, $\frac{1 \text{ fois } 5}{1}$, ou $\frac{5}{1}$; de même $\frac{7}{1}$ vaut 7, $\frac{9}{1}$ vaut 9; et en général, *on peut, sans changer la valeur d'un nombre entier, lui donner la forme d'une fraction, en écrivant le nombre entier au numérateur, et l'unité au dénominateur;*

4°. *Pour extraire les unités contenues dans une expression fractionnaire, il suffit de diviser son numérateur par son dénominateur; les unités du quotient sont les unités contenues dans l'expression fractionnaire, et la fraction, qui doit être ajoutée à ces unités pour composer la valeur de l'expression fractionnaire, a pour numérateur le reste de la division, et pour dénominateur celui de l'expression fractionnaire.* Ainsi, pour trouver les entiers contenus dans l'expression fractionnaire $\frac{30}{7}$, je divise 30 par 7, ce qui me donne 4 au quotient, et 2 de reste : ce reste, affecté du dénominateur 7, donne $\frac{2}{7}$ pour la fraction qui doit accompagner l'entier 4; ensorte que l'expression $\frac{30}{7}$ est composée de l'entier 4 et de la fraction $\frac{2}{7}$; on trouvera de la même manière, que $\frac{19}{7}$ se décompose en 2 et $\frac{5}{7}$, que $\frac{15}{4}$ vaut 3 plus $\frac{3}{4}$, et ainsi des autres.

5°. *Pour mettre sous forme fractionnaire un nombre entier joint à une fraction, il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne, ajouter ce produit au numérateur de la même fraction, et donner à cette somme le dénominateur de la fraction qui accompagnait l'entier.* Ainsi, pour mettre sous forme fractionnaire 2 plus $\frac{3}{8}$, on multipliera

le nombre entier 2, par le dénominateur 5 de la fraction $\frac{3}{5}$ qui l'accompagne, ce qui donnera 10 pour produit; on ajoutera ce produit au numérateur 3 de la même fraction $\frac{3}{5}$; on donnera à la somme 13 le dénominateur 5 de la fraction qui accompagnait l'entier, et l'on aura $\frac{13}{5}$ pour l'expression fractionnaire équivalente à 2 plus $\frac{3}{5}$; et en effet, si l'on divise 13 par 5, comme l'indique $\frac{13}{5}$, on retrouve 2 plus $\frac{3}{5}$. Pour se rendre compte de ce procédé, il suffit d'observer que chaque unité valant $\frac{5}{5}$, les 2 unités du nombre entier 2, valent $\frac{5}{5}$ plus $\frac{5}{5}$, ou $\frac{10}{5}$; et conséquemment 2 plus $\frac{3}{5}$, vaut $\frac{10}{5}$ plus $\frac{3}{5}$, ou $\frac{13}{5}$; de même, s'il s'agissait de mettre sous forme fractionnaire 3 plus $\frac{5}{7}$, on multiplierait 3 par 7, au produit 21, on ajouterait le numérateur 5; la somme 26, affectée du dénominateur 7, donnerait $\frac{26}{7}$ pour la valeur de 3 plus $\frac{5}{7}$.

Le même raisonnement pourrait s'appliquer à tout autre exemple : ainsi la règle donnée est générale; elle nous montre que, *pour obtenir la somme résultante de l'addition d'un nombre entier avec une fraction, il suffit de multiplier le nombre entier par le dénominateur de la fraction, d'ajouter le numérateur au produit, et d'affecter la somme du dénominateur de la fraction*. Ainsi, pour ajouter le nombre entier 7 à la fraction $\frac{3}{4}$, on multipliera 7 par 4, au produit 28 on ajoutera le numérateur 3; la somme 31, affectée du dénominateur 4, donnera $\frac{31}{4}$ pour la somme demandée. On trouvera de même, que 7 plus $\frac{8}{11}$ valent $\frac{85}{11}$, que 8 plus $\frac{9}{10}$ valent $\frac{89}{10}$.

120. D'après ce qui précède : *Quand le numérateur est égal au dénominateur, la fraction a pour valeur l'unité; quand le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction a une valeur moindre que l'unité; enfin, quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, l'expression fractionnaire qui en résulte est plus grande que l'unité.* Ces diverses propriétés peuvent immédiatement se déduire de chacun des deux aspects, sous lesquels on peut envisager une fraction; en effet : 1°. Si l'on considère une fraction comme indiquant le quotient de son numérateur par son dénominateur; quand ses deux termes sont égaux, le quotient de l'un par l'autre est l'unité : c'est ainsi que

$\frac{3}{3}$ indiquant le quotient de 3 par 3, vaut 1; quand le numérateur est moindre que le dénominateur, alors ce numérateur ne contient pas une fois le dénominateur, le quotient est donc moindre que l'unité. Par exemple, l'expression $\frac{4}{5}$ indiquant le quotient de 4 par 5, a une valeur moindre que l'unité, car le dividende 4 ne contient pas une fois le diviseur 5; enfin, quand le numérateur surpasse le dénominateur, celui-ci est contenu plus d'une fois dans le numérateur, le quotient surpasse donc l'unité; ainsi l'expression $\frac{17}{5}$ vaut plus que l'unité, car elle indique la division de 17 par 5, et le dividende 17 contient plus d'une fois le diviseur 5; 2°. si l'on considère une fraction sous le second aspect, alors le dénominateur indiquera en combien de parties égales l'unité est divisée; le numérateur exprimera combien l'on doit prendre de ces parties pour composer la valeur de la fraction, et conséquemment, quand le numérateur sera égal au dénominateur, cela indiquera que l'on doit prendre toutes les parties dont on conçoit l'unité composée, le résultat sera donc l'unité. Par exemple l'expression $\frac{3}{3}$, dont le numérateur est égal au dénominateur, a pour valeur l'unité; car le dénominateur 3 indiquant que l'unité est divisée en 3 parties égales, le numérateur 3 indique que l'on doit prendre ces trois parties, on recompose donc l'unité; quand le numérateur est moindre que le dénominateur, on prend moins de parties qu'il n'y en a dans l'unité, la fraction qui en résulte a donc une valeur moindre que l'unité; ainsi la fraction $\frac{4}{5}$, dont le numérateur 4 est moindre que le dénominateur 5, a une valeur plus petite que l'unité, parceque le dénominateur 5 indiquant que l'unité a été divisée en 5 parties égales, le numérateur 4 dit qu'on ne doit prendre que 4 de ces cinq parties, on prend donc moins que l'unité; et en effet, $\frac{4}{5}$ vaut $\frac{5}{5}$ moins $\frac{1}{5}$, ou 1 moins $\frac{1}{5}$: enfin, quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, on prend plus de parties qu'il n'en faut pour composer l'unité; l'expression fractionnaire qui en résulte, a donc une valeur plus grande que l'unité : ainsi l'expression $\frac{7}{5}$ est plus grande que l'unité; car le dénominateur 5 indiquant que l'unité est divisée en cinq parties égales, le numérateur 7 dit que l'on doit prendre 7 de ces parties, on prend

donc plus que l'unité ; et en effet, $\frac{7}{5}$ vaut $\frac{5}{5}$ plus $\frac{2}{5}$, ou 1 plus $\frac{2}{5}$.

121. L'addition de plusieurs unités égales a engendré les nombres entiers ; l'addition de plusieurs nombres entiers égaux a ensuite engendré la multiplication d'un nombre entier par un autre ; l'addition de plusieurs fractions égales va engendrer la multiplication d'une fraction par un nombre entier ; ainsi l'addition de 3 fractions égales à $\frac{2}{7}$, donnera $\frac{2}{7}$ plus $\frac{2}{7}$ plus $\frac{2}{7}$, ou $\frac{6}{7}$, pour le produit de $\frac{2}{7}$ par 3 ; l'addition de 4 fractions égales à $\frac{6}{11}$, donnera $\frac{6}{11}$ plus $\frac{6}{11}$ plus $\frac{6}{11}$ plus $\frac{6}{11}$, ou $\frac{24}{11}$, pour le produit de $\frac{6}{11}$ par 4 ; on verra de même que le produit de $\frac{5}{13}$ par 4, est $\frac{20}{13}$, que celui de $\frac{5}{2}$ par 3 est $\frac{15}{2}$, et qu'en général, *pour multiplier une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier son numérateur par ce nombre entier, en ne changeant pas le dénominateur.*

122. Comme la multiplication d'une fraction par un nombre entier, s'est réduite à multiplier son numérateur par ce nombre entier ; le moyen qui s'offre naturellement pour diviser une fraction par un nombre entier, est de décomposer le produit, en divisant le numérateur de la fraction dividende, par le nombre entier qui doit servir de diviseur ; ainsi, pour diviser la fraction $\frac{6}{7}$ par le nombre entier 3, on divisera simplement son numérateur 6 par le diviseur 3, en laissant le dénominateur 7 tel qu'il est, ce qui donnera $\frac{2}{7}$ pour le quotient de $\frac{6}{7}$ par 3 ; ce quotient est exact ; car, multiplié par le diviseur 3, il reproduit le dividende $\frac{6}{7}$. On peut s'assurer directement de l'exactitude de ce procédé : en effet, quand on divise le numérateur 6, de la fraction $\frac{6}{7}$, par 3, elle devient $\frac{2}{7}$, et est rendue trois fois plus petite, car le dénominateur ne changeant pas, l'unité reste divisée dans le même nombre de parties égales, ces parties ne changent donc pas de grandeur ; mais on a divisé le numérateur 6 par 3, on a donc pris 3 fois moins de ces mêmes parties, le résultat $\frac{2}{7}$ est donc 3 fois plus petit que $\frac{6}{7}$, le quotient de $\frac{6}{7}$ par 3, est donc $\frac{2}{7}$. On trouvera de la même manière, que le quotient de $\frac{36}{57}$ par 12, est $\frac{3}{57}$, que celui de $\frac{144}{111}$ par 12, est $\frac{12}{111}$, et qu'en général, *il suffit pour diviser une fraction par un nombre entier, de diviser son numérateur par ce nombre sans changer son dénominateur.* D'après cela, pour diviser $\frac{8}{7}$ par 4, il suffit de diviser le numérateur 8 par le

diviseur 4, en conservant le dénominateur 7, ce qui donne $\frac{2}{7}$ pour quotient; $\frac{2}{7}$ est effectivement le quotient de $\frac{8}{7}$ par 4, car multiplié par le diviseur 4, il reproduit le dividende $\frac{8}{7}$.

Cette méthode réussit toutes les fois que le numérateur de la fraction dividende est exactement divisible par le diviseur; mais cette condition est rarement remplie; si l'on voulait, par exemple, diviser $\frac{5}{8}$ par 3, on serait fort embarrassé, car le numérateur 5, de la fraction dividende, n'est pas exactement divisible par le diviseur 3; cette difficulté dut nécessairement conduire à la recherche d'une méthode plus générale; on raisonna sans doute de la manière suivante: comme le numérateur 5, de la fraction dividende $\frac{5}{8}$, n'est pas exactement divisible par le diviseur 3, il est impossible de rendre cette fraction trois fois plus petite, en prenant le tiers des 5 parties, égales à $\frac{1}{8}$, dont elle est composée; le seul moyen de rendre cette fraction trois fois plus petite, est donc de rendre chacune de ses parties trois fois plus petites, sans changer leur nombre; or pour donner à $\frac{1}{8}$ une valeur trois fois plus petite, il suffit de multiplier le dénominateur 8 par 3, ce qui donne $\frac{1}{24}$, car l'unité étant alors divisée en trois fois plus de parties égales, ces nouvelles parties sont trois fois plus petites, prenant donc le même nombre 5 de ces parties 3 fois plus petites, on aura $\frac{5}{24}$ pour le quotient de $\frac{5}{8}$ par 3: il serait assez difficile de faire la preuve, car le quotient $\frac{5}{24}$ multiplié par le diviseur 3, donne la fraction $\frac{15}{24}$, qui ne paraît pas égale au diviseur $\frac{5}{8}$; mais cette égalité deviendra évidente en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{5}{8}$ par 3, car elle deviendra $\frac{15}{24}$, sans avoir changé de valeur; elle était donc équivalente à $\frac{15}{24}$. Appliquons ce raisonnement à la division de $\frac{2}{3}$ par 5; le numérateur 2, de la fraction dividende $\frac{2}{3}$, n'étant pas divisible par le diviseur 5, on ne peut prendre le cinquième de cette fraction, en prenant le cinquième du nombre 2 de ses parties; le seul moyen d'effectuer la division est donc de rendre chaque partie cinq fois plus petite, en conservant leur nombre; or le dénominateur 3 du dividende $\frac{2}{3}$, exprime que l'unité est divisée en trois parties égales, si on le multiplie par 5, on concevra l'unité divisée en 5 fois plus de parties, les nouvelles parties seront donc 5 fois plus petites, il suffira donc de prendre le

même nombre 2, de ces parties 5 fois plus petites, pour avoir un résultat 5 fois plus petit; conséquemment, pour diviser $\frac{2}{3}$ par 5, il suffit de multiplier le dénominateur 3 par le diviseur 5, en conservant le numérateur 2, le résultat $\frac{2}{15}$ exprime le quotient demandé. Si l'on multiplie les deux termes de la fraction dividende $\frac{2}{3}$ par 5, on ne changera pas sa valeur, et elle deviendra égale au produit $\frac{10}{15}$, du quotient $\frac{2}{15}$ par le diviseur 5; cette transformation de la fraction dividende $\frac{2}{3}$, en son équivalente $\frac{10}{15}$, donne un moyen d'effectuer la division par la règle du n° 122, (page 120). En effet, d'après cette règle, pour diviser $\frac{10}{15}$ par 5, il suffit de prendre le cinquième du numérateur 10, ce qui donne $\frac{2}{15}$, pour le quotient de $\frac{10}{15}$, ou de $\frac{2}{3}$, par 5. De même, pour diviser $\frac{5}{7}$ par 9, d'après la règle du n° 122, il suffit de multiplier les deux termes 5 et 7 de la fraction dividende par le diviseur 9, elle ne change pas de valeur, et devient $\frac{45}{63}$; la division de cette dernière par 9, s'effectue en divisant le numérateur 45 par 9, le résultat $\frac{5}{63}$ est le quotient demandé. On l'eût obtenu plus promptement en multipliant le dénominateur 7, de la fraction dividende $\frac{5}{7}$, par le diviseur 9, ce qui eût donné $\frac{5}{63}$; cette dernière méthode, évitant la transformation de la fraction dividende, doit être préférée comme plus directe; ainsi, *toutes les fois que le numérateur de la fraction dividende ne sera pas divisible par le diviseur, on effectuera la division en multipliant le dénominateur de la fraction dividende par le diviseur, et en ne changeant pas le numérateur.*

Après avoir reconnu que le procédé le plus naturel à suivre pour diviser une fraction par un nombre entier, était de diviser le numérateur par ce nombre, nous avons vu que ce procédé n'était applicable qu'au cas particulier où le numérateur de la fraction dividende était exactement divisible par le diviseur, ce qui nous a conduit à rechercher une méthode plus générale. La multiplication d'une fraction par un nombre entier n'a pas offert cette difficulté, le procédé le plus naturel s'est trouvé le plus général, car on peut toujours multiplier le numérateur de la fraction multiplicande par le nombre entier multiplicateur (121) : aussi n'avons-nous pas cherché un autre procédé; mais

celui que la nécessité a fait découvrir, doit faire pressentir qu'il en existe un second pour effectuer la multiplication d'une fraction par un nombre entier. Un raisonnement analogue à celui du n° 121 va nous conduire au but; en effet, pour augmenter une quantité il suffit, ou d'augmenter le nombre de ses parties sans changer leur grandeur, ou de rendre ses parties plus grandes sans changer leur nombre; conséquemment, pour augmenter la valeur d'une fraction; il suffit, ou d'augmenter le numérateur, ce qui augmente le nombre des parties sans changer leur grandeur, ou de diminuer le dénominateur, ce qui rend les parties plus grandes sans changer leur nombre. Cette dernière observation nous apprend que, *pour multiplier une fraction par un nombre entier, il suffit de diviser le dénominateur de la fraction multiplicande par le nombre entier multiplicateur, en conservant le numérateur.* S'il s'agit, par exemple, de multiplier la fraction $\frac{5}{12}$ par 3, on divisera le dénominateur 12 par 3, sans changer le numérateur 5, et l'on aura $\frac{5}{4}$ pour le produit de $\frac{5}{12}$ par 3; cela est évident, car en divisant le dénominateur 12, de la fraction dividende $\frac{5}{12}$ par 3, ce qui donne $\frac{5}{4}$, on conçoit l'unité divisée en trois fois moins de parties, les nouvelles parties sont donc trois fois plus grandes; mais on en prend le même nombre 5, la nouvelle fraction $\frac{5}{4}$, qui en résulte, est donc triple de $\frac{5}{12}$, elle exprime donc le produit de $\frac{5}{12}$ par 3; pour faire la preuve, on divisera le produit $\frac{5}{4}$ par son facteur 3, on trouvera au quotient, l'autre facteur $\frac{5}{12}$; il est facile de reconnaître, *à priori*, que le produit $\frac{5}{4}$ est triple du multiplicande $\frac{5}{12}$; en effet, dans la fraction $\frac{5}{12}$ l'unité est divisée en 12 parties, tandis que dans la fraction $\frac{5}{4}$ la même unité n'est divisée qu'en 4 parties, c'est-à-dire en 3 fois moins de parties; ces dernières parties sont donc 3 fois plus grandes; mais chaque fraction contient le même nombre 5 de parties, la *fraction produit* $\frac{5}{4}$ est donc effectivement le triple de la fraction multiplicande $\frac{5}{12}$.

123. Afin de faciliter les calculs, nous comprendrons les règles des n°s 121 et 122 (page 120), dans cet énoncé général. *Pour multiplier une fraction par un nombre entier, il faut, ou multiplier son numérateur par le nombre entier, en conservant*

son dénominateur, ou diviser son dénominateur par le nombre entier, en conservant son numérateur. Pour diviser une fraction par un nombre entier, il faut, ou multiplier son dénominateur par ce nombre entier, sans changer son numérateur, ou diviser son numérateur par le nombre entier multiplicateur, en conservant le même dénominateur. Des deux méthodes données pour chaque règle, la seconde n'est sujette à aucune exception, car on peut toujours multiplier un nombre entier par un autre; le second procédé, quoique moins général, doit être préféré lorsqu'il est applicable, parce qu'il conduit à des résultats plus simples. Appliquons cette règle générale à plusieurs exemples. Pour multiplier la fraction $\frac{5}{16}$ par 4, on pourra, ou multiplier son numérateur par 4, ce qui donne $\frac{20}{16}$, ou diviser son dénominateur par 4, ce qui donne $\frac{5}{4}$, ensorte que le produit de $\frac{5}{16}$ par 4, est également exprimé, par $\frac{20}{16}$ et par $\frac{5}{4}$; ces deux fractions doivent donc être équivalentes; elles le sont en effet, car en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{5}{4}$ par 4, ce qui ne change pas sa valeur, on obtient $\frac{20}{16}$. S'il s'agissait de multiplier la fraction $\frac{5}{17}$ par 3, on ne pourrait pas appliquer les deux procédés, parceque le dénominateur 17 n'est pas divisible par le multiplicateur 3; on triplerait le numérateur 5, le résultat $\frac{15}{17}$ exprimerait le produit demandé. On trouvera en suivant les mêmes procédés, que le produit de $\frac{7}{9}$ par 3, est $\frac{21}{9}$, ou $\frac{7}{3}$; que celui de $\frac{17}{12}$ par 4, est $\frac{68}{12}$, ou $\frac{17}{3}$; que celui de $\frac{7}{13}$ par 5, est $\frac{35}{13}$, etc. Pour diviser la fraction $\frac{8}{9}$ par 4, on pourra, ou multiplier son dénominateur 9 par 4, ce qui donnera $\frac{8}{36}$, ou diviser son numérateur 8 par 4, ce qui donnera $\frac{2}{9}$; ensorte que le quotient de $\frac{8}{9}$ par 4, est également exprimé par $\frac{8}{36}$ et par $\frac{2}{9}$; ces fractions doivent être équivalentes, comme exprimant un même quotient; elles le sont en effet, car la multiplication des deux termes 2 et 9 de la 2ème fraction par 4 n'en change pas la valeur, et donne $\frac{8}{36}$; la division de $\frac{7}{9}$ par 5 ne peut s'effectuer que d'une seule manière, en multipliant le dénominateur 9 par 5, ce qui donne $\frac{7}{45}$ pour le quotient demandé. On trouvera de la même manière; que le quotient de $\frac{21}{9}$ par 3, est $\frac{21}{27}$, ou $\frac{7}{9}$; que celui de $\frac{68}{12}$ par 4, est $\frac{68}{48}$, ou $\frac{17}{12}$; que celui de $\frac{35}{13}$ par 5, est $\frac{35}{65}$, ou $\frac{7}{13}$, etc.

124. La multiplication et la division de deux fractions l'une par l'autre, se déduit immédiatement de la multiplication et de la division d'une fraction par un nombre entier. Soit d'abord proposé d'effectuer le produit de $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$: on dira, si j'avais $\frac{4}{5}$ à multiplier par 2, le produit serait $\frac{8}{5}$; or ce n'était pas par 2 que je devais multiplier, mais par un nombre $\frac{2}{3}$, trois fois plus petit que 2, le produit $\frac{8}{5}$ est donc trois fois trop grand, il faut donc lui restituer sa valeur en le divisant par 3, ce qui revient à multiplier le dénominateur 5, de la fraction $\frac{8}{5}$, par 3; le résultat $\frac{8}{15}$ exprime le produit cherché de $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$. Le raisonnement qu'on vient d'employer est susceptible de cette autre forme; $\frac{2}{3}$ est le tiers de 2, le produit de $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$ doit donc être le tiers du produit de $\frac{4}{5}$ par 2; mais le produit de $\frac{4}{5}$ par 2 est $\frac{8}{5}$, celui de $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, qui en est le tiers, sera donc $\frac{8}{15}$: enfin on peut encore dire, que multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est prendre les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, ou 2 fois le tiers de $\frac{4}{5}$; mais le tiers de $\frac{4}{5}$ est $\frac{4}{15}$; 2 fois le tiers de $\frac{4}{5}$ vaut donc 2 fois $\frac{4}{15}$, ou $\frac{8}{15}$; conséquemment sous tel aspect qu'on puisse considérer la multiplication, on obtient constamment $\frac{8}{15}$ pour le produit de $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$. Le produit resterait le même si l'on changeait l'ordre des facteurs; en effet, il s'agirait alors de multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, ce qui reviendrait à prendre les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, ou 4 fois le cinquième de $\frac{2}{3}$; mais le cinquième de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{15}$; les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ valent donc 4 fois $\frac{2}{15}$, c'est-à-dire $\frac{8}{15}$. Des raisonnemens analogues prouveraient, que le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$, ou de $\frac{5}{7}$ par $\frac{2}{3}$, est $\frac{10}{21}$, que celui de $\frac{9}{7}$ par $\frac{8}{11}$, ou de $\frac{8}{11}$ par $\frac{9}{7}$, est $\frac{72}{77}$, et ainsi de suite.

125. En général : *Pour multiplier deux fractions entr'elles, il faut diviser le produit de leurs numérateurs par celui de leurs dénominateurs; ensorte que la fraction* PRODUIT *a pour numérateur, le produit des numérateurs des fractions qu'on doit multiplier, et pour dénominateur le produit des dénominateurs de ces mêmes fractions.* Voici quelques exemples. Le produit de $\frac{5}{7}$ par $\frac{9}{4}$ s'obtiendra, d'après la règle, en divisant 45, produit des numérateurs 5 et 9, par 28, produit des dénominateurs 7 et 4, ce qui s'indique ainsi $\frac{45}{28}$; la comparaison du produit $\frac{45}{28}$ avec ses facteurs $\frac{5}{7}$ et $\frac{9}{4}$, montre que le numérateur 45 du produit, est le produit des numérateurs 5 et 9 des facteurs, et que son dénominateur 28 est le produit des dénominateurs 7 et 4. Pour for-

mer le produit de $\frac{4}{7}$ par $\frac{3}{5}$, je multiplie le numérateur 4 de la 1ère fraction, par le numérateur 3 de la 2ème; je multiplie ensuite le dénominateur 7 de la 1ère par le dénominateur 5 de la 2ème., le résultat $\frac{12}{35}$ est le produit cherché. L'application de la même règle montrera, que le produit de $\frac{3}{11}$ par $\frac{4}{7}$, ou de $\frac{4}{7}$ par $\frac{3}{11}$, est également $\frac{12}{77}$; que celui des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{7}$, effectué dans un ordre quelconque, est $\frac{8}{21}$; que celui de $\frac{5}{8}$ par $\frac{7}{9}$, ou de $\frac{7}{9}$ par $\frac{5}{8}$, est $\frac{35}{72}$, etc.

Dans les multiplications précédentes, *le produit des deux fractions n'a pas changé quand on a changé l'ordre des facteurs*; il est facile de démontrer que cette propriété est générale. En effet, lorsqu'après avoir multiplié la 1ère fraction par la 2ème, on change l'ordre des facteurs, en multipliant la 2ème fraction par la 1ère, la fraction PRODUIT ne peut pas changer, car ses deux termes expriment les produits des mêmes nombres entiers effectués dans un ordre différent (n° 59, page 52). La même propriété subsisterait encore dans le cas particulier où l'un des facteurs serait un nombre entier, car ce nombre entier, affecté du dénominateur 1, prendrait la forme fractionnaire, sans changer de valeur (n° 119, 3°. page 117).

126. Un nombre entier pouvant être considéré comme égal à une fraction qui aurait pour numérateur ce nombre entier et l'unité pour dénominateur, cela ramène la multiplication d'un entier par une fraction, à celle de deux fractions l'une par l'autre. S'il s'agissait de multiplier le nombre entier 7 par la fraction $\frac{3}{4}$, on substituerait au multiplicande 7 la fraction équivalente $\frac{7}{1}$, et la question serait réduite à multiplier les deux fractions $\frac{7}{1}$ et $\frac{3}{4}$, l'une par l'autre; la règle du n° 125, donnerait $\frac{21}{4}$ pour le produit cherché. On peut obtenir ce résultat d'une manière plus directe, en observant que multiplier 7 par $\frac{3}{4}$, c'est prendre les $\frac{3}{4}$ de 7, ou 3 fois le quart de 7; mais le quart de 7 est $\frac{7}{4}$, les $\frac{3}{4}$ de 7 valent donc 3 fois $\frac{7}{4}$, ou $\frac{21}{4}$. On verrait de la même manière, que le produit de 9 par $\frac{5}{11}$, ou de $\frac{9}{1}$ par $\frac{5}{11}$, est $\frac{45}{11}$; que celui de 10 par $\frac{2}{9}$, est $\frac{20}{9}$, et qu'en général.........

Pour multiplier directement un nombre entier par une fraction, il suffit de multiplier le numérateur de cette fraction par

le nombre entier, en laissant le dénominateur tel qu'il est. Cette règle n'est qu'un cas particulier de celle du n° 125, elle évite seulement de mettre l'entier sous forme de fraction. Ainsi, pour obtenir le produit de 8 par $\frac{6}{7}$, on multipliera le numérateur 6 par le nombre entier 8, et l'on conservera le dénominateur 7; le résultat $\frac{48}{7}$ sera le produit demandé, de 8 par $\frac{6}{7}$; le changement d'ordre dans les facteurs ne changerait pas le produit, car alors il s'agirait de multiplier la fraction $\frac{6}{7}$ par le nombre entier 8, ce qui s'exécuterait (n° 121), en multipliant le numérateur 6 par le multiplicateur, 8, et conservant le dénominateur 7; on aurait donc encore $\frac{48}{7}$ pour le produit cherché. On verra de même, que le produit de $\frac{5}{7}$ par 9, ou de 9 par $\frac{5}{7}$, est $\frac{45}{7}$; que celui de $\frac{8}{11}$ par 10, ou de 10 par $\frac{8}{11}$, est $\frac{80}{11}$; etc.

127. Si l'on avait plusieurs fractions à multiplier entr'elles, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, par exemple, on y parviendrait évidemment, en multipliant d'abord $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, et en multipliant ensuite le produit $\frac{8}{15}$ par $\frac{7}{11}$, ce qui donnerait $\frac{56}{165}$ pour le produit demandé. Dans ce résultat, le numérateur 56 est le produit des numérateurs 2, 4, 7, des fractions proposées, et le dénominateur 165 est le produit des dénominateurs 3, 5, 11, des mêmes fractions. Si l'on réfléchit sur la formation du produit de plusieurs facteurs (n° 69), on verra qu'il ne dépend jamais que de multiplications partielles de deux facteurs, et l'on en conclura que les remarques fournies par la comparaison du produit $\frac{56}{165}$ avec ses facteurs $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, subsisteraient encore, quels que fussent le nombre et la valeur des fractions proposées. On posera donc cette règle générale....

Pour multiplier plusieurs fractions entr'elles, il suffit de diviser le produit de leurs numérateurs par celui de leurs dénominateurs; ensorte que la fraction PRODUIT *a pour numérateur le produit de tous les numérateurs des fractions proposées, et pour dénominateur le produit de tous les dénominateurs des mêmes fractions; ces produits s'effectuent d'après la règle donnée dans le n° 69, (page 63.) Si quelques facteurs étaient des nombres entiers, on les mettrait d'abord sous la forme fractionnaire, en leur donnant l'unité pour dénominateur, et la question serait ramenée à multiplier plusieurs fractions entr'elles.* D'après cela, pour multi-

plier entr'elles les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, on divisera le produit 384, des numérateurs 2, 4, 6, 8, par le produit 945 des dénominateurs 3, 5, 7, 9; le résultat $\frac{384}{945}$ exprimera le produit cherché. Le produit des facteurs $\frac{2}{3}$, 5, $\frac{4}{7}$, est le même que celui des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{4}{7}$; ce dernier est $\frac{40}{21}$; on l'obtient en divisant le produit 40, des numérateurs 2, 5, 4, par le produit 21, des dénominateurs 3, 1, 7.

128. Je dois observer que multiplier entr'elles les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, c'est réellement prendre les $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$; en effet: pour effectuer le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, dans l'ordre indiqué par leur rang, il faut d'abord multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire, prendre les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, ce qui donne $\frac{8}{15}$; il faut ensuite multiplier ce produit par $\frac{6}{7}$, c'est-à-dire prendre les $\frac{6}{7}$ de $\frac{8}{15}$; mais $\frac{8}{15}$ était déjà les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$; il faut donc réellement prendre les $\frac{6}{7}$, des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$. Ainsi, le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, doit être équivalent aux $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$. Le calcul vient à l'appui de ce raisonnement; le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, effectué d'après la règle du n° 127, est $\frac{48}{105}$; pour trouver les $\frac{6}{7}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, on dira, les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ font $\frac{8}{15}$; les $\frac{6}{7}$ de ces $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, valent donc les $\frac{6}{7}$ de $\frac{8}{15}$, c'est-à-dire, $\frac{48}{105}$. On verrait de même que le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, doit être égal aux $\frac{8}{9}$ des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, et le calcul viendrait à l'appui, en conduisant dans les deux cas au même résultat $\frac{384}{945}$. Les quantités désignées par les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, par les $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, par les $\frac{8}{9}$ des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, etc se nomment des *fractions de fractions*. On voit que *le procédé le plus simple pour obtenir la valeur d'une* FRACTION DE FRACTION, *est de former le produit de toutes les fractions ordinaires qui entrent dans son énoncé; le résultat exprime la fraction simple équivalente à la fraction de fraction proposée.* C'est ainsi que la fraction de fraction exprimée par les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{6}{7}$ de $\frac{3}{4}$, a pour valeur le produit $\frac{144}{420}$ des fractions composantes $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$; on serait conduit au même résultat, en effectuant successivement les multiplications indiquées par la fraction de fraction, car on dirait: les $\frac{6}{7}$ de $\frac{3}{4}$, font $\frac{18}{28}$; les $\frac{4}{5}$ de ces $\frac{6}{7}$ de $\frac{3}{4}$, valent donc les $\frac{4}{5}$ de $\frac{18}{28}$, ou $\frac{72}{140}$; les $\frac{2}{3}$ de ces $\frac{4}{5}$ des $\frac{6}{7}$ de $\frac{3}{4}$, valent donc enfin les $\frac{2}{3}$ de $\frac{72}{140}$, c'est-à-dire, $\frac{144}{420}$, comme on l'avait déjà trouvé, en formant le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$. L'éva-

luation

luation des fractions de fractions, offrant beaucoup de difficultés aux commençans, ils devront s'exercer sur un grand nombre d'exemples qu'ils exécuteront d'après la règle abrégée, et ensuite tout au long; ils trouveront; que les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{8}{11}$ de $\frac{9}{13}$, ont pour valeur le produit $\frac{576}{2145}$, des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{9}{13}$.

129. Si l'on réfléchit sur ce qui vient d'être dit, on reconnaîtra que *les fractions de fractions, sont des quantités rapportées à d'autres quantités prises successivement pour unité.* Ainsi, les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, ne sont autre chose que les $\frac{4}{5}$ de la quantité représentée par les $\frac{2}{3}$ de l'unité primitive, et prise à son tour pour unité; on réduit, comme on vient de le voir, ces deux fractions à une seule, qui est leur produit, et le résultat $\frac{8}{15}$ exprime la valeur de la quantité cherchée, rapportée à l'unité primitive; ensorte que les $\frac{4}{5}$ de la quantité représentée par les $\frac{2}{3}$ de l'unité primitive, équivalent aux $\frac{8}{15}$ de cette même unité primitive. Si l'on voulait prendre les $\frac{6}{7}$ de ce résultat, cela reviendrait à prendre les $\frac{6}{7}$ des $\frac{8}{15}$ de l'unité primitive, qui sont les $\frac{48}{105}$ de l'unité primitive, et comme $\frac{8}{15}$ était déjà les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, il en résulte que les $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ sont exprimés par les $\frac{48}{105}$ de l'unité primitive dont $\frac{2}{3}$ exprimait les $\frac{2}{3}$. On verra de même que la fraction de fraction exprimée par les $\frac{8}{9}$ des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, a pour valeur les $\frac{384}{945}$ de l'unité primitive, dont $\frac{2}{3}$ était les deux tiers; car $\frac{48}{105}$ exprimant déjà les $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, les $\frac{8}{9}$ de $\frac{48}{105}$, qui sont $\frac{384}{945}$, expriment les $\frac{8}{9}$ des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$.

En général, *lorsque pour évaluer des* FRACTIONS DE FRACTIONS, *on effectue le produit des fractions simples qui les composent, la fraction produit qui en résulte, est rapportée à la même unité que la dernière des fractions simples qui sont énoncées.* Cette règle donne le moyen de simplifier certains calculs. Si l'on proposait, par exemple, de prendre les $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ de 60, on dirait, les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ sont $\frac{8}{15}$, il suffit donc de prendre les $\frac{8}{15}$ de 60; or $\frac{1}{15}$ de 60 vaut 4, les $\frac{8}{15}$ de 60 sont donc 32. On eût été conduit plus longuement au même résultat, en prenant les $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ de 60; car les $\frac{2}{3}$ de 60 étant 40, les $\frac{4}{5}$ de ces $\frac{2}{3}$ de 60, sont les $\frac{4}{5}$ de 40, ou 32. De même, si l'on demandait la valeur des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ de 840; on pourrait prendre les $\frac{2}{3}$ de 840, qui sont 560; les $\frac{4}{5}$ de ces $\frac{2}{3}$ de 840, seraient les $\frac{4}{5}$ de 560, ou 448; enfin les $\frac{6}{7}$ de 448 don-

neraient 384, pour la valeur des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ de 840. La règle donnée pour évaluer une fraction de fraction, en fraction simple, abrège ces calculs; en effet, elle nous apprend que les $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, équivalent à $\frac{48}{105}$; les $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ de 840, valent donc les $\frac{48}{105}$ de 840; or $\frac{1}{105}$ de 840 vaut 8; les $\frac{48}{105}$ de 840 valent donc 48 fois 8, ou 384. On verrait de même, que prendre les $\frac{8}{9}$ des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ de 3780, revient à prendre les $\frac{384}{945}$ de 3780; ce qui donne 1536.

130. Examinons actuellement comment on peut diviser deux fractions l'une par l'autre; et pour fixer les idées, proposons-nous de diviser $\frac{5}{7}$ par $\frac{2}{3}$: un raisonnement analogue à celui du n° 124 (page 125), fera découvrir le quotient; en effet, si l'on avait $\frac{5}{7}$ à diviser par 2, il suffirait de multiplier le dénominateur 7 par 2, ce qui donnerait $\frac{5}{14}$; mais ce n'était pas par 2 qu'on devait diviser, c'était par une fraction $\frac{2}{3}$, trois fois plus petite que 2, on a donc divisé $\frac{5}{7}$ par un nombre 2, trois fois trop grand, le quotient $\frac{5}{14}$, qui en est résulté, est donc trois fois trop petit (*); il faut donc lui restituer sa valeur, en le multipliant par 3; or 3 fois $\frac{5}{14}$, donnent $\frac{15}{14}$; le quotient demandé, de $\frac{5}{7}$ par $\frac{2}{3}$, est donc $\frac{15}{14}$; le quotient $\frac{15}{14}$ est exact; car, multiplié par le diviseur $\frac{2}{3}$, il donne la fraction $\frac{30}{42}$, équivalente au dividende $\frac{5}{7}$; pour s'en convaincre, il suffit de multiplier les deux termes 5 et 7 de la fraction $\frac{5}{7}$ par 6, on aura la fraction équivalente $\frac{30}{42}$. La comparaison, du dividende $\frac{5}{7}$ et du diviseur $\frac{2}{3}$, avec le quotient $\frac{15}{14}$, offre une méthode abrégée pour diviser deux fractions l'une par l'autre, car pour

(*) Le quotient indique combien de fois le dividende contient le diviseur ; mais si le diviseur devient trois fois plus grand, le nombre de fois qu'il sera contenu dans le même dividende sera évidemment trois fois plus petit ; conséquemment le quotient, qui exprime ce nombre de fois, sera rendu trois fois plus petit ; on voit donc que si le diviseur devient trois fois plus grand, le quotient devient trois fois plus petit. Le calcul confirme l'exactitude de ce raisonnement ; le quotient de 60 par 4 est 15, celui de 60 par 3 fois 4, ou par 12, est le tiers de 15, ou 5 ; le quotient de 36 par 3 est 12, celui du même dividende 36 par le triple de 3, ou par 9, est 4, tiers de 12. Cette propriété subsiste pour tous les nombres ; en général, *lorsqu'on multiplie le diviseur par un nombre, le quotient est divisé par le même nombre*. Nous généraliserons encore ce principe dans la dernière partie de l'Arithmétique.

obtenir le quotient $\frac{15}{14}$, il suffit de multiplier le dividende $\frac{5}{7}$ par $\frac{3}{2}$, qui est la fraction diviseur $\frac{2}{3}$ renversée. La division d'un nombre entier par une fraction, conduirait également à multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée. Par exemple : s'il fallait diviser le nombre entier 7, par la fraction $\frac{3}{4}$, on dirait ; le quotient de 7 par 3 est $\frac{7}{3}$; celui de 7 par la fraction $\frac{3}{4}$, quatre fois plus petite que 3, sera donc 4 fois plus grand que $\frac{7}{3}$, c'est-à-dire $\frac{28}{3}$; on voit que le quotient $\frac{28}{3}$ a été obtenu en multipliant le dividende 7 par $\frac{4}{3}$, qui est la fraction diviseur $\frac{3}{4}$ renversée.

L'examen attentif des raisonnemens qui ont dirigé dans les deux opérations précédentes convaincra de leur généralité et fournira cette règle. *Pour diviser, une fraction ou un nombre entier, par une fraction ; il suffit de multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée ; le résultat exprime le quotient demandé.* La division de $\frac{4}{5}$ par $\frac{7}{11}$, s'effectue en multipliant le dividende $\frac{4}{5}$ par $\frac{11}{7}$, fraction diviseur renversée ; ce qui donne $\frac{44}{35}$, pour le quotient demandé. Le quotient de $\frac{3}{10}$ par $\frac{7}{5}$, sera $\frac{3}{10}$ multiplié par $\frac{5}{7}$, ou $\frac{15}{70}$; celui de 9 par $\frac{2}{5}$, sera 9 multiplié par $\frac{5}{2}$, ou $\frac{45}{2}$.

131. On doit observer que les règles données, (n°s 125 et 130), pour multiplier et diviser deux fractions l'une par l'autre, comprennent celles des n°s 123 et 126, et suffisent pour mettre en état d'effectuer le produit ou le quotient, de deux fractions l'une par l'autre, d'une fraction par un nombre entier, d'un entier par une fraction ; car cela se réduit à transformer l'entier en une fraction équivalente, ayant pour numérateur ce nombre entier, et pour dénominateur l'unité. Voici un exemple de chaque espèce ; le produit $\frac{15}{28}$, de $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, s'obtient en divisant le produit 15, des numérateurs 3 et 5, par le produit 28, des dénominateurs 4 et 7 ; le produit de $\frac{5}{7}$ par 4, est le même que celui de $\frac{5}{7}$ par $\frac{4}{1}$, c'est-à-dire $\frac{20}{7}$; la multiplication de 4 par $\frac{5}{7}$, revient à celle de $\frac{4}{1}$ par $\frac{5}{7}$, dont le résultat est $\frac{20}{7}$; s'il s'agit de diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, on multipliera le dividende $\frac{3}{4}$ par $\frac{7}{5}$, fraction diviseur renversée, et l'on aura $\frac{21}{20}$ pour le quotient demandé ; le quotient de $\frac{5}{7}$ par 9 est le même que celui de $\frac{5}{7}$ par $\frac{9}{1}$: on l'obtiendra donc en multipliant le dividende $\frac{5}{7}$ par $\frac{1}{9}$, fraction divi-

seur $\frac{9}{1}$ renversée, ce qui donnera $\frac{5}{63}$; enfin le quotient de 9 par $\frac{5}{7}$, ou de $\frac{9}{1}$ par $\frac{5}{7}$, est $\frac{9}{1}$ multiplié par $\frac{7}{5}$, ou $\frac{63}{5}$. Ces exemples suffisent pour faire apercevoir que les règles données dans les nos 125 et 130, sont applicables aux nombres entiers, mis sous forme de fractions; mais dans la pratique on doit préférer les règles des nos 123 et 126, comme plus directes; elles n'exigent pas la transformation des nombres entiers en fractions.

132. Les principes précédens comprennent tout le *calcul des fractions*, car ils donnent les moyens d'effectuer les diverses opérations de l'arithmétique sur les fractions. *Si l'on avait à opérer sur des entiers joints à des fractions ; on réduirait d'abord les entiers en fractions, par la méthode indiquée dans le n° 119, 5°. (page 117) ; on n'aurait plus alors qu'à opérer sur des fractions; ce qui s'exécuterait aisément au moyen des règles données pour le calcul des fractions.* Voici quelques exemples de chaque espèce : pour additionner 2 plus $\frac{3}{5}$ avec 4 plus $\frac{2}{5}$; on mettra d'abord les entiers sous forme de fractions; on trouvera que 2 plus $\frac{3}{5}$ valent, $\frac{10}{5}$ plus $\frac{3}{5}$, ou $\frac{13}{5}$, et que 4 plus $\frac{2}{5}$ valent $\frac{20}{5}$ plus $\frac{2}{5}$, ou $\frac{22}{5}$; la question est alors réduite à ajouter $\frac{13}{5}$ avec $\frac{22}{5}$; le résultat $\frac{35}{5}$, ou 7, exprime la somme demandée. Si les dénominateurs, des fractions qui accompagnent les nombres entiers, étaient différens; on commencerait par réduire les fractions au même dénominateur et la question rentrerait dans la précédente; ainsi, pour ajouter 2 plus $\frac{3}{4}$ avec 5 plus $\frac{2}{3}$, on réduira d'abord les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, ce qui les changera en $\frac{9}{12}$ et en $\frac{8}{12}$; il ne s'agira plus que d'ajouter 2 plus $\frac{9}{12}$ à 5 plus $\frac{8}{12}$; or 2 plus $\frac{9}{12}$ font $\frac{33}{12}$, et 5 plus $\frac{8}{12}$ font $\frac{68}{12}$; l'addition de $\frac{33}{12}$ avec $\frac{68}{12}$, donnera $\frac{101}{12}$, pour la somme cherchée. Avant de passer à la soustraction, je crois devoir prévenir qu'on est convenu d'omettre le mot PLUS, mis entre un entier et une fraction ; ainsi dans notre exemple, au lieu de 2 *plus* $\frac{3}{4}$ et de 5 *plus* $\frac{2}{3}$, on écrit seulement $2\frac{3}{4}$ et $5\frac{2}{3}$. On devra donc bien se rappeler, dans toute la suite de cette arithmétique, que *la fraction qui suit un nombre entier sans interposition de* SIGNE, *est censée ajoutée à ce nombre entier.* D'après cette convention, $3\frac{2}{5}$ exprime 3 plus $\frac{2}{5}$, ou $\frac{17}{5}$; de même, $5\frac{7}{11}$ vaut 5 plus $\frac{7}{11}$, ou

$\frac{62}{11}$, etc. Si l'on voulait retrancher, $2\,\frac{3}{5}$ de $7\,\frac{2}{5}$; on réduirait tout en fraction; $2\,\frac{3}{5}$ deviendrait $\frac{13}{5}$, et $7\,\frac{2}{5}$ se changerait en $\frac{37}{5}$; on aurait alors $\frac{13}{5}$ a ôter de $\frac{37}{5}$, ce qui donnerait le reste $\frac{24}{5}$. Pour retrancher $2\,\frac{3}{4}$ de $5\,\frac{2}{3}$; on commencera par réduire $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, ce qui donnera $\frac{9}{12}$ et $\frac{8}{12}$; alors $2\,\frac{3}{4}$ et $5\,\frac{2}{3}$ deviendront $2\,\frac{9}{12}$ et $5\,\frac{8}{12}$; mais $2\,\frac{9}{12}$ valent $\frac{33}{12}$ et $5\,\frac{8}{12}$ valent $\frac{68}{12}$; il ne s'agit donc plus que d'ôter $\frac{33}{12}$ de $\frac{68}{12}$; ce qui donne $\frac{35}{12}$, pour le reste cherché. S'il s'agissait de multiplier $5\,\frac{2}{3}$ par $4\,\frac{3}{4}$; on mettrait chaque facteur sous forme fractionnaire, d'après la règle du n° 119 5°; la question serait alors réduite à multiplier $\frac{17}{3}$ par $\frac{19}{4}$, ce qui donnerait $\frac{323}{12}$ pour le produit demandé. On trouvera de la même manière; que le produit, de $3\,\frac{4}{5}$ par $2\,\frac{1}{3}$, ou de $\frac{19}{5}$ par $\frac{7}{3}$, est $\frac{133}{15}$; que celui de $7\,\frac{3}{5}$ par $11\,\frac{3}{8}$, ou de $\frac{38}{5}$ par $\frac{91}{8}$ est $\frac{3458}{40}$. La division s'effectue d'une manière analogue; ainsi, pour diviser $2\,\frac{3}{4}$ par $5\,\frac{2}{3}$, on remplacera $2\,\frac{3}{4}$ et $5\,\frac{2}{3}$ par les expressions équivalentes $\frac{11}{4}$ et $\frac{17}{3}$; il ne s'agira plus que de diviser $\frac{11}{4}$ par $\frac{17}{3}$; le résultat $\frac{33}{68}$, sera le quotient demandé. On trouvera également; que le quotient de $3\,\frac{4}{5}$ par $2\,\frac{1}{3}$, ou de $\frac{19}{5}$ par $\frac{7}{3}$, est $\frac{57}{35}$; que celui de $7\,\frac{3}{5}$ par $11\,\frac{3}{8}$, ou de $\frac{38}{5}$ par $\frac{91}{8}$, est $\frac{304}{455}$, etc.

133. La méthode que nous venons de faire connaître n'est sujette à aucune exception. On peut la simplifier, considérablement, dans quelques cas particuliers. En effet :

1°. *Dans l'*ADDITION *des entiers joints aux fractions; au lieu de tout mettre sous forme fractionnaire, il est plus simple de faire la somme des fractions qui accompagnent les entiers, d'extraire ensuite de cette somme les unités qu'elle peut contenir, et de joindre à cette somme, ainsi décomposée, les nombres entiers qui accompagnent les fractions; le résultat de cette dernière opération exprime la somme demandée.* Ainsi; pour ajouter $7\,\frac{5}{9}$ avec $3\,\frac{8}{9}$, on fera la somme $\frac{13}{9}$, des fractions $\frac{5}{9}$ et $\frac{8}{9}$, qui accompagnent les entiers 7 et 3; on extraira de la somme $\frac{13}{9}$ les unités qu'elle contient, ce qui la changera en $1\,\frac{4}{9}$; cette dernière somme ajoutée aux entiers 7 et 3 donnera $11\,\frac{4}{9}$, pour le résultat demandé. Si l'on voulait ajouter les quantités $12\,\frac{3}{4}$, $5\,\frac{2}{3}$, $4\,\frac{5}{7}$; on calculerait d'abord la somme des fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, ce qui donnerait $\frac{179}{84}$, ou $2\,\frac{11}{84}$; cette dernière expression ajoutée

aux nombres entiers 12, 5, 4, qui accompagnent les fractions, donnera $23\frac{11}{84}$ pour le résultat cherché. On trouvera de la même manière; que la somme des quantités $15\frac{7}{8}$, $31\frac{8}{9}$, $53\frac{2}{5}$, $129\frac{3}{7}$, est $230\frac{1493}{2520}$; que celle des quantités $3\frac{2}{3}$, $5\frac{4}{5}$, $7\frac{8}{11}$, 12, 13, $\frac{5}{7}$, est $42\frac{1049}{1155}$, etc. Tous ces résultats s'accordent avec ceux que fournit la règle générale du n° 132, mais on les obtient avec moins de calcul.

2°. *Dans la* SOUSTRACTION *des entiers joints aux fractions; au lieu de tout mettre sous forme fractionnaire, il est infiniment plus simple de retrancher directement, la fraction, de la fraction, et le nombre entier, du nombre entier. Si la fraction à soustraire était la plus grande, on rendrait la soustraction possible en empruntant une des unités du plus grand nombre.* D'après cela; pour ôter $2\frac{3}{7}$ de $8\frac{5}{7}$; on retranchera $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$ et 2 de 8, la réunion des restes partiels, $\frac{2}{7}$ et 6, composera le reste total $6\frac{2}{7}$. La méthode du n° 132 eût conduit plus longuement au même résultat; on eût substitué aux quantités, $2\frac{3}{7}$ et $8\frac{5}{7}$, leurs valeurs fractionnaires, $\frac{17}{7}$ et $\frac{61}{7}$; de $\frac{61}{7}$ on eût ôté $\frac{17}{7}$, ce qui eût donné $\frac{44}{7}$, ou $6\frac{2}{7}$, pour le reste demandé. De même; pour soustraire $2\frac{3}{5}$ de $7\frac{2}{3}$, on retranchera $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$ et 2 de 7; la réunion des restes partiels, $\frac{1}{15}$ et 5, donnera le reste total $5\frac{1}{15}$. Si l'on voulait ôter $2\frac{10}{15}$ de $7\frac{4}{15}$, comme $\frac{10}{15}$ ne peuvent s'ôter de $\frac{4}{15}$, on rendrait la soustraction possible en empruntant une des unités du nombre 7; cette unité d'emprunt, qui vaut $\frac{15}{15}$, jointe aux $\frac{4}{15}$ qu'il y avait déjà, donne $\frac{19}{15}$, dont ôtant les $\frac{10}{15}$ du nombre à soustraire, reste $\frac{9}{15}$; passant aux unités, et se rappelant qu'on a emprunté une des unités du nombre 7, on ôtera 2 de 6, ce qui donnera le reste 4; la réunion des restes partiels, $\frac{9}{15}$ et 4, compose le reste total $4\frac{9}{15}$. Cela revient, comme on voit, à transformer $7\frac{4}{15}$ en $6\frac{19}{15}$ et à en ôter $2\frac{10}{15}$. Nous joindrons ici quelques exemples de soustractions de cette dernière espèce.....

De......	$9\frac{4}{7}$	25	$13\frac{4}{7}$	9	$3\frac{4}{7}$
ôtez.......	$5\frac{6}{7}$	$3\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{11}$	$2\frac{6}{7}$
Restes......	$3\frac{5}{7}$	$21\frac{1}{5}$	$12\frac{5}{7}$	$8\frac{5}{11}$	$0\frac{5}{7}$
Preuves....	$9\frac{4}{7}$	25	$13\frac{4}{7}$	9	$3\frac{4}{7}$

Dans le premier exemple, on a dit : de $\frac{4}{7}$ je ne puis ôter $\frac{6}{7}$, j'emprunte donc une unité sur les 9 ; cette unité, qui vaut $\frac{7}{7}$, jointe aux $\frac{4}{7}$ qu'il y avait déjà, donne $\frac{11}{7}$, dont ôtant les $\frac{6}{7}$ du nombre à soustraire, reste $\frac{5}{7}$ que j'écris; passant aux unités, et me rappelant que j'ai emprunté une des 9 unités, j'ôte 5 de 8, et j'écris au-dessous le reste 3; ce qui me donne $3\frac{5}{7}$ pour le reste cherché. Ce reste est exact, car ajouté au plus petit nombre $5\frac{6}{7}$, il reproduit le plus grand nombre $9\frac{4}{7}$; en effet, $\frac{5}{7}$ ajouté à $\frac{6}{7}$ donne $\frac{11}{7}$, ou $1\frac{4}{7}$; j'écris $\frac{4}{7}$ et je retiens 1, que j'ajoute à 5 plus 3, ce qui me donne 9, que j'écris; j'ai alors le plus grand nombre $9\frac{4}{7}$. *Dans le 2e exemple*, on a emprunté une unité sur les 25 du nombre supérieur; de cette unité, qui vaut $\frac{5}{5}$, on a ôté les $\frac{4}{5}$ du nombre à soustraire, et l'on a posé le reste $\frac{1}{5}$; passant aux unités, et se rappelant qu'on a emprunté une unité sur les 25, on a ôté 3 de 24, ce qui a donné les 21 unités du reste. Pour faire la preuve, on a dit : $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{5}$ font $\frac{5}{5}$, ou 1, que je retiens; 1 de retenue et 21 font 22 et 3 font 25. *Dans le 3e exemple*, on a considéré $13\frac{4}{7}$, comme formé de 12 et de $\frac{11}{7}$; on en a ôté $\frac{6}{7}$; ce qui a donné le reste $12\frac{5}{7}$; ce reste ajouté à $\frac{6}{7}$ a donné $13\frac{4}{7}$. *Dans le 4e exemple*, on a considéré 9 comme 8 plus $\frac{11}{11}$, on en a ôté $\frac{6}{11}$, il est resté $8\frac{5}{11}$. Enfin, *dans le dernier exemple*, on a emprunté une unité sur les 3; cette unité, qui vaut $\frac{7}{7}$, jointe aux $\frac{4}{7}$ qu'il y avait déjà, a donné $\frac{11}{7}$; on en a ôté $\frac{6}{7}$, ce qui a donné les $\frac{5}{7}$ du reste; et comme l'emprunt d'une unité sur les 3 n'en laisse que 2, on a ôté 2 de 2, ce qui a donné 0 pour les unités du reste; le reste total est donc $\frac{5}{7}$; il est exact, car ajouté au plus petit nombre il donne le plus grand. Dans ces exemples, on a supposé que les fractions qui accompagnaient les nombres entiers avaient le même dénominateur; s'il n'en était pas ainsi, on commencerait par les réduire au même dénominateur; on en voit des exemples dans les soustractions qui suivent.

De $948\frac{2}{3}$, ou $948\frac{8}{12}$	De $9\frac{2}{5}$, ou $9\frac{14}{35}$	De $234\frac{7}{35}$, ou $234\frac{133}{665}$
ôtez $39\frac{3}{4}$, ou $39\frac{9}{12}$	ôtez $3\frac{6}{7}$, ou $3\frac{30}{35}$	ôtez $97\frac{17}{19}$, ou $97\frac{595}{665}$
Reste .... $908\frac{11}{12}$	Reste ...... $5\frac{19}{35}$	Reste .... $136\frac{203}{665}$.

134. *La* MULTIPLICATION, *d'une fraction jointe à un entier, par un nombre entier, ou d'un nombre entier par une fraction jointe*

à un entier, peut s'exécuter d'une manière abrégée, en choisissant pour multiplicateur le nombre entier, et multipliant successivement la fraction et l'entier, qui composent le multiplicande, par le multiplicateur; la somme des deux produits partiels ainsi obtenus, exprime le produit total. Quand le premier de ces deux produits partiels renferme des unités, on les retient pour les joindre à celles du second. Ainsi, pour obtenir le produit de $5\frac{2}{7}$ par 3, ou celui de 3 par $5\frac{2}{7}$; on considérera $5\frac{2}{7}$ comme multiplicande et 3 comme multiplicateur; il suffira alors de multiplier successivement $\frac{2}{7}$ et 5 par 3; la réunion des produits partiels, $\frac{6}{7}$ et 15, donne le produit total $15\frac{6}{7}$. La méthode générale du n° 132, eût conduit plus longuement au même résultat; on eût d'abord substitué au multiplicande $5\frac{2}{7}$, le nombre fractionnaire $\frac{37}{7}$ qui lui est égal; on eût alors multiplié $\frac{37}{7}$ par 3, ce qui eût donné $\frac{111}{7}$ pour produit; la division de 111 par 7, eût donné 15 au quotient et 6 de reste; on en eût conclu que $\frac{111}{7}$ valait $15\frac{6}{7}$, et que parconséquent le produit demandé était $15\frac{6}{7}$. S'il s'agissait de former le produit de $6\frac{3}{5}$ par 4, on multiplierait d'abord $\frac{3}{5}$ par 4, ce qui donnerait le produit $\frac{12}{5}$, ou $2\frac{2}{5}$; on lui ajouterait 4 fois 6, ou 24, et l'on aurait $26\frac{2}{5}$ pour le produit demandé. Voici quelques exemples de cette espèce.

Multiplicandes..	$9\frac{3}{4}$	$6\frac{2}{3}$	$4\frac{7}{8}$	$7\frac{3}{4}$
Multiplicateurs..	7	12	8	4
Produits	$68\frac{1}{4}$	80	39	31

Dans le 1er exemple, on a dit : 7 fois $\frac{3}{4}$ font $\frac{21}{4}$, ou $5\frac{1}{4}$; j'écris $\frac{1}{4}$ et je retiens 5; 7 fois 9 font 63 et 5 de retenue font 68, que j'écris. Pour multiplier $6\frac{2}{3}$ par 12, on a dit : 12 fois $\frac{2}{3}$ font $\frac{24}{3}$, ou 8; 12 fois 6 font 72, et 8 de retenue font 80. *Dans le 3e exemple*, on a d'abord multiplié $\frac{7}{8}$ par 8, ce qui a donné 7; à ce dernier produit on a ajouté 8 fois 4; le résultat 39 a exprimé le produit demandé, de $4\frac{7}{8}$ par 8. On peut observer, dans ce dernier exemple, que la multiplication de la fraction $\frac{7}{8}$, par le nombre 8, égal à son dénominateur, a donné pour produit le numérateur 7; ensorte que la multiplication de $4\frac{7}{8}$ par 8, s'est réduite à ajouter le numérateur 7 au produit 32, de l'entier 4, par le dénominateur 8 de la fraction qui l'accompagne. De même, dans

le dernier exemple, la multiplication de $\frac{3}{4}$ par 4, a donné 3, et le produit 31, de $7\frac{3}{4}$ par 4, s'est composé de 3 et de 4 fois 7.

135. *En général. Le produit d'une fraction par un nombre entier égal à son dénominateur, est égal au numérateur. Pour multiplier une fraction jointe à un nombre entier, par un nombre égal à son dénominateur, il suffit de multiplier le nombre entier, par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne, et d'ajouter au produit le numérateur de cette même fraction; la somme exprime le produit demandé. L'ordre dans lequel on effectue les multiplications étant indifferent, on doit choisir pour multiplicateur le nombre entier.* D'après cette règle; le produit de $\frac{7}{13}$ par 13, est 7; celui de $\frac{7}{12}$ par 12, ou de 12 par $\frac{7}{12}$, est 7; celui de $\frac{113}{37}$ par 37, ou de 37 par $\frac{113}{37}$, est 113, etc. Le produit de $12\frac{4}{5}$ par 5, ou de 5 par $12\frac{4}{5}$, est 5 fois 12, augmenté de 4, ou 64; celui de $7\frac{5}{8}$ par 8, ou de 8 par $7\frac{5}{8}$, est 8 fois 7, augmenté de 5, c'est-à-dire 61, etc.

La DIVISION, est susceptible de simplifications analogues; le quotient de $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{4}$ est $\frac{3}{4}$ multiplié par $\frac{4}{5}$, ou $\frac{3 \text{ fois } 4}{5 \text{ fois } 4}$, ou $\frac{3}{5}$; ensorte que pour diviser l'une par l'autre les fractions de même dénominateur, $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{4}$, il a suffi de diviser le numérateur 3 de la 1ère, par le numérateur 5 de la 2e. Le quotient de $\frac{7}{12}$ par $\frac{7}{13}$, est $\frac{7}{12}$ multiplié par $\frac{13}{7}$, ou $\frac{7 \text{ fois } 13}{7 \text{ fois } 12}$, ou $\frac{13}{12}$; ensorte que pour diviser l'une par l'autre les deux fractions de même numérateur, $\frac{7}{12}$ et $\frac{7}{13}$, il a suffi de diviser le dénominateur 13 de la 2e fraction par le dénominateur 12 de la 1ère. Enfin, le quotient de 1 par $\frac{9}{7}$ est 1 multiplié par $\frac{7}{9}$, ou $\frac{7}{9}$. Ces diverses propriétés étant indépendantes des exemples particuliers, que nous n'avions choisis que pour fixer les idées, nous en déduirons les principes suivans; 1°. *pour diviser l'une par l'autre deux fractions de même dénominateur, il suffit de diviser le numérateur de la première par celui de la seconde;* 2°. *pour diviser deux fractions de même numérateur, il suffit de diviser le dénominateur de la seconde par celui de la première;* 3°. *le quotient de l'unité par une fraction, est égal à cette fraction renversée.* Ces règles sont fort

utiles dans la pratique. Il en résulte ; que le quotient de $\frac{7}{11}$ par $\frac{9}{11}$ est $\frac{7}{9}$; que celui de $\frac{3}{5}$ par $\frac{3}{7}$, est $\frac{7}{5}$; que celui de 1 par $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$, etc.

136. *Dans la division de deux nombres entiers l'un par l'autre, quand le dividende n'est pas le produit exact du diviseur par un nombre entier, on parvient à un dernier reste, qui n'est pas zéro, et alors le quotient total se compose d'un nombre entier et d'une fraction, moindre que l'unité, qui a pour numérateur le dernier reste, et pour dénominateur le diviseur.* Ainsi, la division de 39 par 8 donnant 4 au quotient et 7 de reste, le quotient de 39 par 8 est 4 plus $\frac{7}{8}$, ou $4\frac{7}{8}$: ce quotient est exact ; car, multiplié par le diviseur 8, il reproduit le dividende 39.

Sous ce point-de-vue, *le quotient d'une division peut toujours s'exprimer exactement ; car si le dernier reste est zéro, le quotient est un nombre entier, et si le dernier reste n'est pas zéro, le quotient se compose d'un nombre entier et d'une fraction. Dans ces deux cas, la multiplication du diviseur par le quotient, reproduit le dividende ; quand cette condition n'est pas remplie, on doit en conclure qu'on a commis une erreur de calcul.* Par exemple, si l'on trouvait $4\frac{2}{3}$ pour le quotient de 13 par 3 ; comme ce quotient, multiplié par le diviseur 3, donne le nombre 14, qui n'est pas égal au dividende 13, j'en conclurais que la division a été mal faite ; et en effet, si l'on divise 13 par 3, on trouvera 4 unités au quotient, et 1 de reste ; le véritable quotient est donc $4\frac{1}{3}$, et non pas $4\frac{2}{3}$.

Quand le quotient est un nombre entier, on voit clairement qu'il exprime combien de fois le dividende contient le diviseur ; ainsi la division de 12 par 4, donnant pour quotient le nombre entier 3, on conçoit que ce quotient marque que le dividende 12 est composé de 3 fois le diviseur 4. Mais peut-on se former la même idée du quotient, lorsqu'il est composé d'un nombre entier et d'une fraction ? Non, sans doute ; car une partie du quotient est alors une fraction qui indique une division qu'on n'a pu effectuer. Conséquemment, *lorsque le dernier reste n'est pas zéro, la division n'est réellement effectuée qu'en partie ; les*

unités du quotient indiquent la partie de la division qui a pu s'effectuer, et la fraction qui accompagne ces unités, indique une division qui reste à effectuer. Dans ce cas, on peut faire la preuve de la division comme l'indique la règle du n° 100; car le quotient multiplié par le diviseur, doit reproduire le dividende. Mais quand on n'a pour but que d'obtenir les unités du quotient (*), *il est beaucoup plus simple d'ajouter le dernier reste, au produit du diviseur par les unités du quotient : si l'opération a été bien faite, on doit obtenir un nombre égal au dividende.* En voici la raison ; on ne parvient au dernier reste qu'après avoir retranché successivement du dividende les produits partiels des unités, dixaines, centaines, etc. du quotient par le diviseur ; mais ces soustractions partielles produisent le même effet que la soustraction du produit du diviseur par la totalité des unités du quotient ; on peut donc dire que le dernier reste a été obtenu après avoir retranché du dividende le produit du diviseur par les unités du quotient, et conséquemment le dividende se compose du produit du diviseur par les unités du quotient et du dernier reste. Cela fournit ce principe général :

137. *Dans toute division, le dividende est égal au produit du diviseur par les unités du quotient, plus le dernier reste.* Le principe du n° 100 n'est qu'un cas particulier de celui-ci ; car en supposant que le dernier reste est zéro, la seconde partie de la valeur du dividende disparaît, et le dividende se trouve égal au produit du diviseur par les unités du quotient. La division de 39 par 8, donnant 4 unités au quotient, et 7 de reste; le dividende 39 est égal au produit 32, du diviseur 8 par les 4 unités du quotient, plus le reste 7. De même, la division de 51 par 4, donnant 12 unités au quotient, et 3 de reste ; le dividende 51 est égal au produit 48, du diviseur 4 par les 12 unités du quotient, plus le reste 3. Cette propriété nous sera fort utile par la suite, mais pour l'instant elle se réduit à fournir une preuve simple de la division : *lorsque le dernier reste n'est pas zéro, on forme le*

(*) Par *unités du quotient*, on entend toujours le nombre entier qui fait partie du quotient total ; ainsi, quand on divise 121 437 par 8, ce qui donne 15 179 au quotient et 5 de reste, les unités du quotient sont 15 179.

produit du diviseur par les unités du quotient; on ajoute le dernier reste à ce produit; la somme doit être égale au dividende; si cette condition n'était pas remplie, on serait certain d'avoir commis une erreur de calcul. Appliquons cette preuve aux divisions suivantes :

16 287	327	374 568	12 143	378	7
13 08.	49	364 29.	3 0	35.	55
3 207		10 278 Reste.		38	
2 943				3 Reste.	
264 Reste.					

Les deux premières ont été bien faites, car dans chacune d'elles le produit du diviseur par les unités du quotient, augmenté du reste, donne le dividende; mais la dernière contient une *faute de calcul*, car le produit 385, du diviseur 7 par les 55 unités du quotient, augmenté du dernier reste 3, donne le nombre 388, qui n'est pas égal au dividende 378; et en effet, si l'on fait le calcul avec soin, on verra que les chiffres barrés 3, 5, 3, sont inexacts; car, au lieu de poser sous 35 le vrai reste 2, on a mis 3; si l'on corrige cette faute, on trouvera le quotient 54, et zéro de reste. La preuve confirme l'exactitude de ce résultat; car le diviseur 7, multiplié par le quotient 54, donne le dividende 378.

Les règles exposées pour vérifier l'exactitude des résultats fournis par le calcul des nombres entiers, s'appliquent immédiatement aux fractions, et aux diverses combinaisons des fractions avec les nombres entiers: *Dans la* SOUSTRACTION, *le reste ajouté au plus petit nombre doit donner une somme égale au plus grand; dans la* MULTIPLICATION, *le produit divisé par l'un de ses facteurs, doit donner un quotient égal à l'autre facteur; dans la* DIVISION, *le produit du diviseur par le quotient, doit être égal au dividende. Pour faire la preuve de l'*ADDITION, *il suffit d'appliquer la règle du n° 97, en observant que la dernière colonne à droite devient alors celle des fractions.* En voici quelques exemples : . . . .

Nombres à ajouter	$948\frac{8}{11}$	$39\,788\frac{2}{3}$	$36\frac{4}{5}$
	$897\frac{9}{11}$	$4\,979\frac{4}{5}$	$9\frac{17}{19}$
	$989\frac{10}{11}$	$99\,999\frac{1}{2}$	$13\frac{5}{7}$
Sommes.....	$2836\frac{5}{11}$	$144\,767\frac{29}{30}$	$60\frac{272}{665}$.
Preuves.....	xxx ∅	xx xxx ∅	xx ∅.

Dans le 1er exemple ; pour vérifier si $2836\frac{5}{11}$ est effectivement la somme des nombres proposés, on appliquera la règle donnée (n° 97, page 99) pour faire la preuve de l'addition ; et commençant par la gauche, on dira : 9 et 8 font 17, et 9 font 26 ; mais on a posé 28, l'addition de la colonne précédente a donc donné la retenue 2 ; cette colonne doit donc contenir 23 unités de son ordre, mais elle n'en contient que 21 ; on avoit donc retenu 2 dixaines dans l'addition de la colonne des unités ; et comme on avait posé 6 unités, cette colonne doit contenir 26 unités, mais elle n'en contient que 24, les 2 unités de surplus expriment donc la retenue fournie par l'addition des fractions ; mais on a posé $\frac{5}{11}$ à la somme, la colonne des fractions doit donc contenir $2\frac{5}{11}$, ou $\frac{27}{11}$; comme elle les contient en effet, la retenue placée sous la colonne des fractions, qui est la dernière à droite, est zéro ; la somme obtenue est donc exacte. Dans les deux autres exemples, on a commencé par réduire les fractions au même dénominateur ; on a ensuite effectué l'addition et la preuve, comme dans le 1er exemple.

138. Je pourrais terminer ici la théorie des fractions ; mais les grands avantages qui résultent de leur *réduction*, m'imposent la loi de faire connaître comment elle s'effectue. J'ai démontré (n° 113, page 112), qu'une fraction ne changeait pas de valeur lorsqu'on multipliait ses deux termes par un même nombre ; on peut prouver de la même manière, qu'*une fraction ne change pas de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.* Prenons pour exemple la fraction $\frac{8}{14}$; si son dénominateur restant le même, on divisait son numérateur 8 par 2, elle deviendrait $\frac{4}{14}$, et serait rendue 2 fois plus petite ; car le dénominateur 14 n'ayant pas changé, on conçoit que l'unité reste divisée dans le même nombre de parties, ces parties restent donc

de même grandeur ; mais ayant divisé le numérateur par 2, on n'a pris que la moitié de ces parties de même grandeur, la fraction a donc été rendue 2 fois plus petite. Si le numérateur 8, de la fraction $\frac{8}{14}$, restant le même, on divisait son dénominateur 14 par 2, elle deviendrait $\frac{8}{7}$, et serait rendue 2 fois plus grande ; car le dénominateur 14 devenant deux fois plus petit, on conçoit l'unité divisée en deux fois moins de parties ; ces parties sont donc deux fois plus grandes ; mais le numérateur n'a pas changé ; on prend donc le même nombre de ces parties deux fois plus grandes, la fraction a donc été rendue deux fois plus grande. Conséquemment ; puisqu'en divisant le numérateur de la fraction $\frac{8}{14}$ par 2 on la rend deux fois plus petite, tandis qu'on la rend deux fois plus grande en divisant son dénominateur par 2, elle ne change pas de valeur quand on divise ses deux termes par 2, car après l'avoir rendue 2 fois plus petite, on lui restitue sa valeur primitive, en la rendant deux fois plus grande. Les propriétés énoncées dans le n° 123 (page 123), donnent une démonstration plus courte ; en effet, d'après ces propriétés, lorsqu'on divise le numérateur 8 de la fraction $\frac{8}{14}$ par 2, on prend la moitié de cette fraction ; mais en divisant le dénominateur 14 par 2, on double la fraction ; ces deux opérations qui se détruisent, ne changent donc pas la valeur de la fraction. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à tout autre exemple, le principe énoncé au commencement de cet article, est démontré. Ainsi : Lorsqu'on divise par 100 les deux termes de la fraction $\frac{100}{1000}$, elle ne change pas de valeur, et se réduit à $\frac{1}{10}$; en divisant les deux termes de la fraction $\frac{60}{96}$ par 12, on obtient la fraction équivalente $\frac{5}{8}$; la division des deux termes de la fraction $\frac{56}{49}$ par 7 ne change pas sa valeur, et lui donne cette forme plus simple $\frac{8}{7}$. On verrait de la même manière, que la fraction $\frac{200}{1000}$ est équivalente aux fractions $\frac{2}{10}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{2000}{10000}$, etc. ; et qu'en général, *une fraction ne change pas de valeur, lorsqu'on introduit ou que l'on supprime un même nombre de zéros sur la droite du numérateur et du dénominateur ;* car cette opération revient à multiplier, ou à diviser les deux termes de la fraction par un même nombre (n°s 68 et 94, pages 62 et 95). Ce principe servira de fondement à la théorie

des *décimales*; il nous apprend que les fractions

$\frac{70000}{80000}$, $\frac{9000}{1100000}$, $\frac{1200}{170}$, $\frac{36000000}{70000000}$, $\frac{700}{1000}$, $\frac{705000}{111300000}$, $\frac{30}{100}$, $\frac{16000}{20000}$,

sont exprimées par les fractions équivalentes,

$\frac{7}{8}$, $\frac{9}{1100}$, $\frac{120}{17}$, $\frac{36}{70}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{705}{111300}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$.

Une fraction ne changeant pas de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre, comme elle est alors exprimée par de plus petits nombres, on doit profiter de cette simplification toutes les fois qu'elle se présente. Il existe à cet égard un grand nombre de méthodes particulières qui conduisent toutes au résultat par des tâtonnemens plus ou moins nombreux; mais comme elles reposent sur des principes assez difficiles à démontrer, nous croyons devoir les renvoyer à la dernière partie de cette Arithmétique; nous nous bornerons ici à faire connaître une méthode qui n'est sujette à aucune exception, et qui conduit au résultat sans aucun tâtonnement.

139. Il est d'abord évident, que si l'on connaissait le plus grand nombre qui pût diviser en même temps les deux termes d'une fraction, alors en effectuant cette double division, on aurait une nouvelle fraction dont les deux termes ne pourraient plus se diviser en même temps par un même nombre. Cette nouvelle fraction serait donc *irréductible*, car on nomme ainsi une fraction qui est exprimée par les plus petits termes possibles. Par exemple, si l'on divise les deux termes de la fraction $\frac{24}{36}$ par le nombre 12, qui est le plus grand de tous ceux qui peuvent diviser 24 et 36 en même temps, on aura la *fraction irréductible* $\frac{2}{3}$; on verrait de même que les fractions, $\frac{48}{60}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{35}{42}$, peuvent être exprimées par les *fractions irréductibles*, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$; il suffit pour cela de diviser les deux termes 48 et 60 de la 1ère par 12, les deux termes 27 et 36 de la 2ème par 9, et les deux termes 35 et 42 de la 3ème par 7. Lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont de très-grands nombres, il est impossible d'apercevoir quel est le plus grand nombre qui peut les diviser en même temps; la propriété dont jouit ce nombre, d'être le plus grand des diviseurs communs aux deux termes d'une fraction, lui a fait donner le nom de *plus grand commun divi-*

seur; et la méthode générale qui sert à le faire découvrir, se nomme la *méthode du plus grand commun diviseur.*

140. Pour jeter plus de jour sur cette grande théorie, nous la présenterons successivement sous deux aspects différens; cela suffira pour convaincre de l'exactitude de la règle que nous donnerons pour *trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres;* mais comme ceux qui se destinent à l'étude de l'*Algèbre,* doivent s'exercer à saisir l'ensemble d'une longue suite de raisonnemens rigoureux, ils trouveront dans la dernière partie de cette Arithmétique, une autre théorie du plus grand commun diviseur, qui fera mieux voir comment on a découvert le mécanisme du calcul, et qui joindra à cet avantage celui d'offrir le germe de l'importante *théorie du plus grand commun diviseur* ALGÉBRIQUE. Revenons à notre objet; et, pour fixer les idées, considérons les deux nombres 48 et 18. Le plus grand diviseur commun à ces deux nombres, ne saurait évidemment surpasser le plus petit des deux, qu'il doit diviser exactement; il est donc très-naturel d'essayer si le plus petit nombre 18, qui se divise lui-même, et donne 1 pour quotient exact, peut diviser aussi le plus grand nombre 48; auquel cas, 18 serait le plus grand commun diviseur demandé. Cela n'arrive pas dans notre exemple, car 48 divisé par 18, donne 2 au quotient, et 12 pour reste. Mais, d'après le principe établi dans le n° 137, (page 139), le dividende 48 est égal au produit du diviseur 18 par les 2 unités du quotient, plus le reste 12; le plus grand commun diviseur des nombres 48 et 18, doit donc diviser le reste 12 de leur division : en effet, le plus grand diviseur commun aux nombres 48 et 18, divisera exactement 48 et 2 fois 18, composé de 18 plus 18; mais, pour diviser 48, il suffit de diviser ses parties 2 fois 18 et 12, puisque la somme des deux quotiens qui en résulteront, multipliée par le diviseur, devant donner 2 fois 18 plus 12, ou le nombre 48, sera le résultat de la division de 48 par ce diviseur; la division de 48 par le diviseur commun, donnera donc pour quotient un nombre entier égal à la réunion des deux quotiens partiels, de 2 fois 18 et de 12, par le diviseur commun; mais on vient de prouver que le premier de ces quotiens

tiens partiels était un nombre entier, le second doit donc être aussi un nombre entier ; car autrement un nombre entier serait égal à un nombre entier plus une fraction, chose absurde. Le plus grand commun diviseur entre 48 et 18 doit donc enfin diviser le reste 12 de leur division ; mais il divise 18 ; il ne peut donc pas être plus grand que le plus grand commun diviseur entre 18 et 12. On peut remarquer ici, 1°. que la somme 48 étant composée des deux parties 2 fois 18 et 12, tout nombre qui divise cette somme et le facteur 18 de l'une de ses parties, doit nécessairement diviser l'autre partie 12 ; 2°. que le plus grand commun diviseur entre les deux nombres 48 et 18 ne peut pas surpasser le plus grand commun diviseur entre 18, le plus petit de ces deux nombres, et le reste 12 de leur division.

Comme les mêmes raisonnemens pourraient s'appliquer à tous les nombres, nous établirons ces principes généraux : 1°. *Lorsqu'une somme est composée de deux parties, tout nombre qui divise cette somme et un facteur de l'une de ses parties, divise nécessairement l'autre partie ; 2°. le plus grand commun diviseur entre deux nombres, ne peut être plus grand que le plus grand commun diviseur entre le plus petit de ces deux nombres et le reste de la division du plus grand nombre par le plus petit.* Appliquons ces principes à notre exemple, et, pour plus de clarté, disposons le calcul comme on le voit ici :

	48	18		18	12		12	6
	36	2		12	1		12	2
1er reste	12		2eme reste	6		3eme reste	0	

Nous dirons alors : le plus grand commun diviseur entre 48 et 18 ne peut pas surpasser celui entre 18, le plus petit de ces deux nombres, et le reste 12 de leur division ; par la même raison, le plus grand commun diviseur entre 18 et 12 ne saurait surpasser celui entre 12, le plus petit de ces nombres, et le reste 6 de leur division ; enfin, le plus grand commun diviseur entre 12 et 6, est 6, car le quotient exact de 12 par 6 est 2 ; le plus grand commun diviseur des deux nombres 48 et 18, ne peut donc pas être plus grand que 6 ; conséquemment, si le nombre C divise exactement 48 et 18, il sera leur plus grand commun

diviseur ; c'est ce qui arrive effectivement, car, en reprenant les opérations dans un ordre inverse, on voit que 6 divisant 12 et 6, divisera nécessairement 18, composé de 12 et de 6; puisque 6 divise 18 et 12, il divisera 48 composé de 2 fois 18 et de 12; le nombre 6 divisera donc les nombres proposés 48 et 18, et, comme un nombre plus grand ne saurait les diviser, il sera leur plus grand commun diviseur. On voit dans cet exemple, que le mécanisme du calcul, qui a conduit à la recherche du plus grand commun diviseur 6, entre 48 et 18, consiste : à diviser le plus grand nombre 48 par le plus petit 18, ce qui donne le 1[er] reste 12 ; à diviser ensuite le plus petit nombre 18 par le 1[er] reste 12, ce qui donne le 2[ème] reste 6 ; enfin, à diviser le 1[er] reste 12 par le 2[ème] reste 6, ce qui donne *zéro* pour 3[ème] reste ; le 2[ème] reste 6, qui divise exactement le reste précédent 12, est le plus grand commun diviseur demandé. Le calcul vient à l'appui de ce raisonnement ; car la division de 48 et de 18 par 6, donne les quotiens 8 et 3 qui n'ont plus aucun facteur commun. Cette méthode peut s'appliquer à tous les nombres, ensorte que la recherche du plus grand commun diviseur entre les deux nombres 3185 et 1001 conduit au calcul suivant :

	3185	1001		1001	182		182	91
1er reste	182	3	2eme reste	91	5	3eme reste	0	2

La division de 3185 par 1001 a donné 3 au quotient, avec 182 de reste ; la division de 1001 par 182 a donné 5 au quotient et 91 de reste ; enfin la division de 182 par 91, a donné 2 pour quotient exact, et zéro de reste ; il en résulte que 91 est le plus grand commun diviseur entre 3185 et 1001 ; pour s'en convaincre, il suffit de faire la preuve de chaque division, d'après la règle du n° 137 ; cela donne :

3185 *égale* 3 *fois* 1001 *plus* 182.
1001 *égale* 5 *fois* 182 *plus* 91.
182 *égale* 2 *fois* 91.

Pour démontrer que 91 divise 3185 et 1001, on dira, en partant de la preuve de la dernière division : 91 divise 182 et 91, il divisera donc 5 fois 182 et 91, il divisera donc leur somme 1001 ; puisque 91 divise 1001 et 182, il divisera 3 fois 1001 et 182, et

parconséquent leur somme 3185; ainsi 91 divise 3185 et 1001; il est donc leur commun diviseur. Pour démontrer qu'un nombre plus grand que 91, ne saurait diviser séparément 3185 et 1001; on dira, en partant de la preuve de la première division; tout diviseur commun entre 3185 et 1001, divisant la somme 3185 et le facteur 1001 de l'une de ses parties, divisera l'autre partie 182; or ce diviseur commun divise 1001 et 5 fois 182, qui est l'une de ses parties, il divise donc son autre partie 91, il ne peut donc pas surpasser 91. Le nombre 91 jouissant de la double propriété de diviser 3185 et 1001, et d'être le plus grand de tous les nombres qui peuvent les diviser, est leur plus grand commun diviseur. Et, en effet, si l'on divise 3185, et 1001 par 91, on obtiendra les quotiens 35 et 11 qui n'ont pas de diviseurs communs.

141. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer pouvant s'appliquer à tout autre exemple, nous poserons en principe que : *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, il faut diviser le plus grand par le plus petit. Si la division se fait sans reste, ce sera le plus petit nombre qui sera le diviseur cherché; s'il y a un reste, on divisera le plus petit des deux nombres proposés par ce reste, et s'il n'y a pas de second reste, le premier sera le plus grand commun diviseur cherché; s'il y a un second reste, on divisera le premier par le second, et s'il n'y a pas de troisième reste, ce sera le second qui sera le diviseur demandé; s'il y a un troisième reste, on divisera le second reste par le troisième, et continuant ainsi à diviser le reste de chaque opération par celui de la suivante, jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient exact, le reste, qui aura exactement divisé le reste précédent, sera le plus grand commun diviseur cherché. Si ce reste est l'unité, celà annoncera que les nombres donnés n'ont point d'autre diviseur commun que l'unité; ces nombres n'ont donc point, dans ce cas, de commun diviseur. Lorsqu'on applique cette règle, il est commode de placer les divisions successives les unes à la suite des autres, en mettant chaque quotient au-dessus du dividende qui l'a fourni, et effectuant chaque soustraction sans poser les nombres à sous-*

traire. Ainsi, dans le second exemple du n° 140 (page 146), où il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur des nombres 3185 et 1001 ; on disposera le calcul comme on le voit ici :

Quotiens..........	3	5	2		.... *1ere rangée.*
Dividendes et diviseurs	3185	1001	182	91	...... *2eme rangée.*
Restes..........	182	91	0		.... *3eme rangée.*

La 1ère rangée horizontale contient les quotiens placés au dessus des dividendes qui les ont fournis ; la 2ème contient les dividendes et les diviseurs ; enfin la 3ème est composée des restes mis au dessous des dividendes qui les ont fournis. On a effectué le calcul de la manière suivante : après avoir divisé 3185 par 1001, ce qui a donné 3 pour quotient, et 182 de reste ; on a divisé 1001 par 182, ce qui a donné 5 au quotient et 91 pour reste ; ensorte que 91 s'est trouvé le plus grand commun diviseur entre 3185 et 1001. On peut observer que 91 est aussi le plus grand commun diviseur entre 1001 et 182. Voici quelques exemples :

1	5	
216	180	36
36	0	

1	2	2	
462	330	132	66
132	66	0	

15	1	4	1	1	6	
1139	72	59	13	7	6	1
419 59	13	7	6	1	0	

1	61	2	1	2	
204 091	200 819	3272	1227	818	409
3 272	4 499 1 227	818	409	0	

Dans la 1ère opération, où l'on se proposait de trouver le plus grand commun diviseur entre 216 et 180, on a divisé le 1er nombre par le 2ème, ce qui a donné 1 au quotient et 36 de reste ; 180 divisé par 36, a donné 5 pour quotient exact, et conséquemment 36 pour le plus grand commun diviseur demandé entre 216 et 180 : *dans la 2ème opération*, où l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre les nombres 462 et 330 ; on a divisé 462 par 330, ce qui a donné 1 au quotient et 132 de reste ; on a divisé ensuite 330 par 132, et l'on a obtenu 2 unités au quotient et 66 de reste ; la division de 132 par 66 a donné le quotient exact 2, avec le reste

zéro, le reste 66, qui a divisé exactement le reste précédent, s'est trouvé le plus grand commun diviseur demandé entre 462 et 330. *Dans la 3ème opération*, destinée à découvrir le plus grand diviseur commun aux nombres 1139 et 72, on a divisé le plus grand de ces deux nombres par le plus petit; la division de 113 dixaines du dividende 1139 par le diviseur 72, a donné 1 dixaine au quotient et 41 dixaines de reste; à côté de ces 41 dixaines, on a abaissé les 9 unités du dividende, ce qui a donné 419 pour second dividende partiel; celui-ci, divisé par le diviseur 72, a donné les 5 unités du quotient, ensorte que la division de 1139 par 72 a donné 15 unités au quotient, et 59 pour dernier reste; on a divisé ensuite le plus petit nombre 72 par le reste 59, ce qui a donné 1 au quotient, avec le reste 13; la division de 59 par 13, a donné 4 au quotient et 6 de reste; 7 divisé par 6 a donné 1 au quotient avec 1 de reste; la division de 6 par 1 ayant donne 6 pour quotient exact, on en a conclu que les nombres donnés 1139 et 72 n'avaient que l'unité pour commun diviseur; et comme l'unité n'est pas un nombre, on est certain qu'il n'existe aucun nombre qui puisse diviser en même temps 1139 et 72; ce qu'on exprime en disant que ces nombres n'ont pas de plus grand commun diviseur. Enfin, *dans la dernière opération*, où l'on se proposait de trouver le plus grand commun diviseur entre les nombres 204091 et 200819, on a été conduit à effectuer cinq divisions qui ont donné pour les unités des quotiens les nombres entiers 1, 61, 2, 1, 2, avec les restes 3272, 1227, 818, 409, 0; le diviseur 409, qui a conduit au reste zéro, est le plus grand commun diviseur demandé.

142. D'après cela, pour réduire les fractions, $\frac{330}{462}$, $\frac{180}{216}$, $\frac{200819}{204091}$, à leurs plus simples expressions, il suffira de diviser successivement, les deux termes 330 et 462, de la 1ère par leur plus grand commun diviseur 66; puis les deux termes 180 et 216 de la 2ème, par leur plus grand commun diviseur 36; enfin les deux termes 200819 et 204091 de la 3ème, par leur plus grand diviseur commun 409; les fractions proposées seront alors exprimées par les fractions irréductibles équivalentes, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{401}{499}$. La fraction $\frac{72}{1139}$ est *irréductible*, car il n'existe aucun diviseur commun entre ses

deux termes. Les élèves pourront s'exercer aux calculs dont je vais indiquer les résultats; la division des deux termes de la fraction $\frac{103680}{60480}$, par leur plus grand diviseur commun 8640, donnera la fraction irréductible équivalente $\frac{12}{7}$; on verra de même, que la fraction $\frac{18432}{4320}$, est équivalente à la fraction irréductible $\frac{64}{15}$; il suffira pour cela de diviser les deux termes 18432, et 4320, par leur plus grand commun diviseur 288. En général, *pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il faut d'abord chercher le plus grand commun diviseur entre ses deux termes (n° 141). On divise ensuite les deux termes de la fraction, par leur plus grand commun diviseur; les quotiens sont les deux termes de la fraction irréductible équivalente à la proposée. Lorsque le plus grand commun diviseur entre les deux termes d'une fraction est l'unité, on est averti par-là que la fraction proposée est irréductible, car la division de ses deux termes par l'unité ne saurait la changer.* Si l'on applique cette règle aux fractions

$\frac{875}{1000}$; $\frac{75}{100}$; $\frac{578125}{1000000}$; $\frac{848}{10000}$; $\frac{324}{999}$; $\frac{142857}{999999}$; $\frac{307692}{999999}$; $\frac{285714}{999999}$; $\frac{2142855}{9999990}$;

on trouvera qu'elles sont équivalentes aux *fractions irréductibles*

$\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{37}{64}$; $\frac{53}{625}$; $\frac{12}{37}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{4}{13}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{14}$.

143. La règle énoncée dans le n° 141 peut se déduire des considérations suivantes. S'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur entre les deux termes 462 et 330 de la fraction $\frac{330}{462}$: on essaierait d'abord la division de ses deux termes par le plus petit; on verrait que 462 divisé par 330, donne 1 au quotient, avec le reste 132; ensorte que 462 vaut 330 plus 132; on peut donc, au lieu de $\frac{330}{462}$, écrire $\frac{330}{330 \text{ plus } 132}$. On voit dans cette dernière, que le plus grand commun diviseur devant diviser exactement ses deux termes, doit diviser 132; il ne peut donc pas excéder 132; je divise actuellement le premier diviseur 330 par le 1er reste 132, je trouve 2 au quotient et 66 de reste, ce qui m'apprend que le numérateur 330, vaut 2 fois 132 plus 66; le dénominateur, 330 plus 132, se compose donc de 2 fois 132 plus 66, et de 132, ou en tout de 3 fois 132 plus 66; substituant ces nouvelles valeurs du numérateur et du dénominateur, on aura la fraction

$$\frac{2 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66}{3 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66}$$

Elle nous apprend que le plus grand commun diviseur, des deux termes de la proposée, doit diviser 66; en effet, on a vu que ce plus grand commun diviseur divisait 132, il divise donc 2 fois 132 et 3 fois 132, mais il divise le numérateur, 2 fois 132 plus 66, et le dénominateur, 3 fois 132 plus 66, il doit donc diviser 66, il ne peut donc pas être plus grand que 66. Je divise le 1er reste 132 par le 2ème reste 66, le quotient est exactement 2; le nombre 132 vaut donc 2 fois 66; conséquemment; 2 fois 132 vaut 4 fois 66, et 3 fois 132 valent 6 fois 66; le numérateur, 2 fois 132 plus 66, vaut donc 4 fois 66 plus 66, ou 5 fois 66; et le dénominateur, 3 fois 132 plus 66, vaut 6 fois 66 plus 66, ou 7 fois 66. La fraction proposée $\frac{330}{462}$ peut donc se mettre sous cette forme. $\frac{5 \text{ fois } 66}{7 \text{ fois } 66}$. Il est alors évident que le plus grand commun diviseur entre ses deux termes est 66; ensorte que la fraction proposée est exprimée par la fraction irréductible $\frac{5}{7}$. La recherche du plus grand commun diviseur 66, entre les deux termes 330 et 462 de la fraction $\frac{330}{462}$, a conduit, comme on vient de le voir, à diviser le plus grand nombre 462 par le plus petit 330, ce qui a donné 1 au quotient avec 132 de reste; on a ensuite divisé le plus petit nombre 330 par le 1er reste 132, ce qui a donné 2 au quotient et 66 de reste; on a divisé le 1er reste 132, par le 2ème reste 66, ce qui a donné 2 pour quotient exact; on en a conclu que le reste 66, qui a divisé exactement le reste précédent, était le plus grand commun diviseur des deux nombres 330 et 462. Si l'on généralise ce procédé, on sera conduit à la règle du n° 141.

Théorie des Décimales.

144. La simplicité du calcul des nombres entiers, comparée à la complication du calcul des fractions, suffit pour faire apercevoir combien il serait utile d'assujétir les subdivisions de l'unité à une loi de décroissement uniforme; car on sent que c'est de cette uniformité que dépend la facilité des opérations de l'arith-

métique sur les nombres entiers. On y est parvenu d'une manière très-heureuse, en adoptant la subdivision de l'unité principale en parties de dix en dix fois plus petites, que l'on nomme à cause de cela *unités décimales*, ou plus simplement *décimales*. Il est bien évident que ce mode de décroissement était celui qu'indiquait la nature de notre système de numération.

145. *Le système des* DÉCIMALES *n'est qu'une simple extension de celui adopté pour les nombres entiers ; on a conçu la série des différens ordres d'unités continuée à l'infini de part et d'autre de l'unité principale.* Ainsi, par exemple ; comme en avançant successivement d'un rang vers la droite d'un nombre, on passe : des MILLE, aux dixièmes de mille, ou *centaines* : des centaines, aux dixièmes de centaines, ou *dixaines* : des dixaines, aux dixièmes de dixaines, ou UNITÉS ; il est très-naturel de continuer le même système de décroissement décimal, en passant successivement : des unités, aux dixièmes d'unités, ou *dixièmes* : des dixièmes, aux dixièmes de dixièmes, ou *centièmes* : des centièmes, aux dixièmes de centièmes, ou MILLIÈMES : des millièmes, aux dixièmes de millièmes, ou *dix-millièmes* : des dix-millièmes, aux dixièmes de dix-millièmes, ou *cent-millièmes ;* continuant ce mode de décroissement, on formera des unités de dix en dix fois plus petites, qui porteront les noms ; MILLIONIÈMES, *dix-millionièmes*, *cent-millionièmes ;* BILLIONIÈMES, *dix-billionièmes*, *cent-billionièmes*, etc. Ainsi quand partant du chiffre des unités d'un nombre, on avance successivement d'un rang, vers la gauche ou vers la droite, les noms des différentes unités se succèdent dans l'ordre suivant, qui se prolonge indéfiniment dans les deux sens.......

UNITÉS, *dixaines*, *centaines* ; MILLE, *dixaines de mille*, etc. } (*)
UNITÉS, *dixièmes*, *centièmes* ; MILLIÈMES, *dix-millièmes*, etc. }

(*) On doit bien se garder de confondre les expressions.....
dix millièmes et *dix-millièmes*.
La première indique *dix fois un millième*, ou $\frac{10}{1000}$, ou $\frac{1}{100}$, ou *un centième* ; la deuxième indique des *dixièmes de millièmes* ; ensorte que deux dix-millièmes valent $\frac{2}{10000}$. En comparant les expressions équivalentes *dix-millièmes* et *dixièmes de millièmes*, on reconnaît que le *trait-d'union*, placé entre les

Dans la 1ère ligne, les mots expriment successivement des unités de dix en dix fois plus grandes; dans la 2ème, ils expriment des unités de dix en dix fois plus petites. On voit que rien n'empêche de pousser ces subdivisions aussi loin qu'on voudra ; c'est ce mode de décroissement décimal qui leur a fait donner le nom de *fractions décimales;* ce nom convient parfaitement à des quantités qui expriment des fractions d'unité de dix en dix fois plus petites.

146. *La manière d'écrire les fractions décimales, au moyen des chiffres, est la même que pour les nombres entiers.* Ainsi; comme, d'après le système établi pour l'écriture des nombres entiers, un chiffre mis sur la droite d'un autre exprime des unités dix fois plus petites; si l'on prolonge ce système à droite des unités, le chiffre placé sur la droite de celui des unités, exprimera des dixièmes d'unités, ou *dixièmes :* le chiffre écrit sur la droite de celui des dixièmes, exprimera des dixièmes de dixièmes, ou *centièmes :* le chiffre suivant exprimera des dixièmes de centièmes, ou MILLIÈMES; et continuant ce mode de décroissement décimal, on reconnaîtra que *lorsque partant du chiffre des unités, on avance successivement d'un rang vers la droite; les chiffres expriment, des dixièmes, des centièmes, des* MILLIÈMES; *des dix-millièmes, des cent-millièmes, des* MILLIONIÈMES, *des dix-millionièmes, des cent-millionièmes, des* BILLIONIÈMES, etc.

Pour fixer la place des unités entières, on est convenu de mettre une *virgule* sur la droite du chiffre qui les représente. De crainte que l'on confondît cette *virgule* avec celle qui sert à séparer les parties du discours, j'ai cru devoir lui donner cette forme *caractéristique* (,) On devra donc bien se rappeler que *le signe , placé entre deux chiffres, est une espèce particu-*

---

mots *dix* et *millièmes*, équivaut à *ièmes de*; ce trait d'union a la même acception toutes les fois qu'il précède un nom de nombre, suivi de la terminaison *ièmes.* Ainsi les expressions . . . . . .

dixièmes; centièmes; millièmes; dix-millièmes; cent-millièmes,
sont équivalentes à celles-ci :
*dixièmes; centièmes; millièmes; dix*IÈMES DE *millièmes; cent*IÈMES DE *mill.*

lière de VIRGULE, *exclusivement destinée à séparer le chiffre des unités de celui des dixièmes.*

D'après cette convention, pour exprimer 4 unités plus $\frac{7}{10}$, ou 4 $\frac{7}{10}$, ou 4 unités 7 dixièmes, on écrit le chiffre 7 des dixièmes à la droite du chiffre 4 des unités, en l'en séparant par la virgule caractéristique , , ce qui donne 4,7 ; de même, pour exprimer 36 unités 5 dixièmes, ou 36 $\frac{5}{10}$, on écrit 36,5 ; pour exprimer 274 unités 7 dixièmes 5 centièmes, on écrit 274,75. Si l'on voulait écrire en décimales 34 $\frac{59}{100}$, on remarquerait que la fraction $\frac{59}{100}$ peut se décomposer en $\frac{50}{100}$ plus $\frac{9}{100}$, ou en $\frac{5}{10}$ plus $\frac{9}{100}$, et que par conséquent, 34 $\frac{59}{100}$, valent 34 unités 5 dixièmes 9 centièmes ; on doit donc écrire 34,59. Si le nombre donné était 364 unités plus $\frac{789}{1000}$; on observerait d'abord que $\frac{789}{1000}$, valent $\frac{700}{1000}$ plus $\frac{80}{1000}$ plus $\frac{9}{1000}$, ou encore $\frac{7}{10}$, plus $\frac{8}{100}$ plus $\frac{9}{1000}$, c'est-à-dire, 7 dixièmes plus 8 centièmes plus 9 millièmes; le nombre donné 364 $\frac{789}{1000}$, vaut donc 364 unités plus 7 dixièmes plus 8 centièmes plus 9 millièmes ; il peut donc s'écrire ainsi, 364,789.

Quand le nombre donné manque d'unités entières (il est alors plus petit que l'unité), on les remplace par le caractère 0, *qui n'ayant aucune valeur par lui-même, ne sert qu'à indiquer l'absence des unités.* Ainsi, $\frac{1}{10}$ s'écrit 0,1 ; la fraction $\frac{26}{100}$, composée de $\frac{20}{100}$ plus $\frac{6}{100}$, ou de $\frac{2}{10}$ plus $\frac{6}{100}$, ou de 2 dixièmes plus 6 centièmes, s'écrira 0,26.

Si le nombre donné manquait d'unités décimales d'un certain ordre, c'est-à-dire, de dixièmes, de centièmes, etc. on les remplacerait par des zéros, afin de conserver aux autres chiffres le rang qu'ils doivent occuper. Ainsi, pour écrire en décimales 2 $\frac{7}{100}$, on observera que ce nombre, composé de 2 unités et de 7 centièmes, manque de dixièmes, on mettra donc un zéro pour occuper la place des dixièmes, ce qui donnera 2,07. De même, pour écrire 6 unités 7 millièmes, on mettra 6,007, parceque les deux zéros, mis à la place des dixièmes et des centièmes qui manquent, font valoir au chiffre 7, des millièmes. S'il s'agissait de la fraction $\frac{207}{1000}$, on la décomposerait, en $\frac{200}{1000}$ plus $\frac{7}{1000}$, ou en $\frac{2}{10}$ plus $\frac{7}{1000}$, ou en 2 dixièmes plus 7 millièmes; sous cette dernière forme, on voit qu'il faut écrire zéro au rang des unités,

2 au rang des dixièmes, o pour tenir la place des centièmes qui manquent, et 7 au rang des millièmes; ensorte que la fraction ordinaire $\frac{207}{1000}$ est exprimée par la fraction décimale 0,207. De même, $\frac{45}{10000}$ s'écrirait 0,0045; car $\frac{45}{10000}$ valent $\frac{40}{10000}$ plus $\frac{5}{10000}$, qui se réduisent à $\frac{4}{1000}$ plus $\frac{5}{10000}$, ou à 4 millièmes plus 5 dix-millièmes; on doit donc mettre trois zéros pour tenir la place des unités des dixièmes et des centièmes qui manquent, et mettre ensuite sur la droite de ces zéros, les chiffres 4 et 5, qui exprimeront alors les 4 millièmes et les 5 dix-millièmes, dont se compose la fraction donnée $\frac{45}{10000}$. S'il s'agissait du nombre fractionnaire $\frac{36785}{1000}$, on commencerait par en extraire les unités qu'il renferme, ce qui donnerait 36 unités $\frac{785}{1000}$, ou 36 unités 7 dixièmes 8 centièmes 5 millièmes; on verrait alors qu'il doit s'écrire 36,785. Par la même raison, le nombre fractionnaire $\frac{360087}{1000}$, se décomposant en 360 unités 8 centièmes 7 millièmes, doit s'écrire ainsi : 360,087.

Les fractions plus petites que l'unité sont exprimées par des *fractions décimales plus petites que l'unité*, et les nombres fractionnaires plus grands que l'unité, sont exprimés par des *nombres décimaux plus grands que l'unité*. D'après cela, les expressions décimales, 0,24; 0,09, plus petites que l'unité, sont des *fractions décimales;* et les expressions 2,07, 10,207, plus grandes que l'unité, sont des *nombres décimaux*. Cependant, pour abréger le discours, *nous comprendrons, sous la dénomination générique de nombres décimaux, les expressions décimales plus grandes et plus petites que l'unité; lorsque nous voudrons les particulariser, nous aurons soin d'en prévenir. Les* **CHIFFRES DÉCIMAUX** *sont ceux placés sur la droite de la virgule; ils expriment respectivement, en allant de gauche à droite, des dixièmes, ou unités décimales du* 1*er ordre; des centièmes, ou unités décimales du* 2*ème ordre; des millièmes, ou unités décimales du* 3*ème ordre, et ainsi de suite. Le rang de chaque chiffre décimal est déterminé par sa distance à la virgule;* ainsi, dans le nombre décimal 31,4689, le 1er chiffre décimal est 4, le 2ème est 6, le 3ème est 8, et le 4ème est 9. On désigne quelquefois les chiffres décimaux, placés sur la droite de la virgule, par le nom

générique de *décimales*, et chacun de ces chiffres est une décimale ; ainsi, dans le nombre 2,357, il y a trois décimales qui sont 3, 5, 7. Les exemples précédens suffisent pour faire apercevoir combien il est facile d'exprimer en décimales les fractions ordinaires, plus grandes ou plus petites que l'unité, dont les dénominateurs sont, ou 10, ou 100, ou 1000, ou en général l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite ; mais comme il importe beaucoup aux commençans d'avoir une règle générale à cet égard, nous croyons devoir la déduire de la comparaison de plusieurs fractions de chaque espèce avec leurs valeurs décimales, et pour plus de clarté, nous mettrons au-dessous de chaque fraction ordinaire son expression décimale, comme on le voit ici ;

$$\frac{37}{100};\quad \frac{9478}{100000000};\quad \frac{2}{10};\quad \frac{345}{1000};\quad \frac{7298}{10000};\quad \frac{306}{100000};$$

$$0{,}37;\quad 0{,}00009478;\quad 0{,}2;\quad 0{,}345;\quad 0{,}7298;\quad 0{,}00306.$$

Avec un peu d'attention, on s'aperçoit que *chaque fraction décimale contient autant de chiffres décimaux, sur la droite de la virgule, qu'il y a de zéros dans le dénominateur de la fraction ordinaire qu'elle exprime.* Ainsi, par exemple, dans la fraction décimale 0,7298, équivalente à la fraction ordinaire $\frac{7298}{10000}$, il y a autant de chiffres décimaux qu'il y a de zéros dans le dénominateur 10000, c'est-à-dire 4. On voit aussi que, *dans chaque fraction décimale, le numérateur de la fraction ordinaire qu'elle exprime est écrit à la droite de la virgule, de manière que le chiffre de ses unités occupe un rang décimal marqué par le nombre des zéros du dénominateur ;* ainsi, dans l'evpression 0,7298, équivalente à la fraction ordinaire $\frac{7298}{10000}$, on voit que le numérateur 7298 est écrit sur la droite de la virgule, de manière que le chiffre 8 de ses unités occupe le 4ème rang décimal marqué par les 4 zéros du dénominateur 10000. Les mêmes observations pouvant se faire sur toutes les fractions ordinaires dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros, nous établirons cette règle générale.

147. *Pour exprimer en décimales une fraction ordinaire moindre que l'unité, dont le dénominateur est l'unité, suivie*

d'un ou de plusieurs zéros vers la droite; il faut écrire le numérateur de cette fraction sur la droite de la VIRGULE, *mise à la suite du zéro qui occupe la place des unités, de manière que le dernier chiffre à droite de ce numérateur, occupe un rang décimal marqué par le nombre des zéros du dénominateur;* pour exprimer en décimales la fraction ordinaire $\frac{34567}{100000}$, dont le dénominateur contient 5 zéros; on écrira le numérateur 34567 sur la droite de la *virgule*, de manière que son dernier chiffre 7 soit le 5ème chiffre décimal, ce qui donnera 0,34567; de même, s'il s'agit de la fraction $\frac{369}{10000000}$, comme son dénominateur contient 7 zéros, le dernier chiffre 9 de son numérateur doit être le 7ème chiffre décimal; mais 369 ne contient que 3 chiffres, il faut donc mettre quatre zéros sur la gauche de 369 pour tenir la place des quatre chiffres décimaux qui manquent; on écrira donc 0,0000369. L'application de cette règle n'offre aucunes difficultés lorsque le nombre des chiffres du numérateur est égal à celui des zéros du dénominateur, il suffit alors d'écrire le numérateur à la suite de la *virgule;* mais comme dans tout autre cas ce n'est que par une espèce de tâtonnement qu'on parvient à faire occuper au dernier chiffre du numérateur le rang qui lui convient, je crois devoir donner une règle plus commode dans la pratique. La comparaison des fractions ordinaires

1er *cas.*		2ème *cas.*		3ème *cas.*	
$\frac{36785}{1000}$,	$\frac{345}{100}$,	$\frac{236}{1000}$,	$\frac{4564}{10000}$,	$\frac{345}{100000}$,	$\frac{7365}{1000000}$,

avec leurs valeurs décimales,

36,785	3,45	0,236	0,4564	0,00345	0,007365

conduit à cet énoncé.

148. *Pour exprimer en décimales une fraction ordinaire, plus grande ou plus petite que l'unité, dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, il faut distinguer* TROIS CAS. *Le* PREMIER *est celui où le numérateur surpasse le dénominateur; il suffit alors d'écrire le numérateur en y plaçant la virgule de manière qu'elle soit suivie d'autant de chiffres décimaux vers la droite, qu'il y a de zéros dans le déno-*

minateur. Le SECOND *cas est celui où le numérateur contient autant de chiffres qu'il y a de zéros dans le dénominateur; après avoir mis un zéro pour tenir la place des unités, et une virgule sur sa droite pour le séparer des dixièmes, il suffit d'écrire le numérateur à la suite de la virgule. Le* TROISIÈME *cas est celui où le numérateur contient moins de chiffres qu'il n'y a de zéros dans le dénominateur; on prend alors la différence entre le nombre des zéros du dénominateur et celui des chiffres du numérateur; cette différence marque le nombre des zéros qui doivent être placés entre la virgule et le premier chiffre du numérateur.* Appliquons cette règle à un exemple de chaque espèce. Pour exprimer en décimales la fraction.... $\frac{32768}{1000}$, dont le numérateur surpasse le dénominateur, on écrira le numérateur 32768; et comme le dénominateur contient 3 zéros, on séparera 3 chiffres décimaux par la virgule, ce qui donnera.... 32,768. Pour écrire en décimales la fraction.... $\frac{3245}{10000}$, dont le numérateur contient autant de chiffres qu'il y a de zéros dans le dénominateur, il suffit, après avoir mis un zéro et une virgule pour marquer la place des unités, d'écrire le numérateur à la suite de la virgule de cette manière.... 0,3245. Enfin pour mettre en décimales la fraction.... $\frac{906}{10000000}$, dont le numérateur contient moins de chiffres qu'il n'y a de zéros dans le dénominateur, on prendra la différence entre le nombre 7, des zéros du dénominateur, et le nombre 3, des chiffres du numérateur, la différence 4, marquant le nombre des zéros qui doivent être placés entre la virgule et le premier chiffre 9 du numérateur 906, on écrira.... 0,0000906.

149. La règle précédente donne le moyen de réduire en décimales une fraction ordinaire plus grande ou plus petite que l'unité dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite; on en déduit; que réciproquement; *pour convertir un nombre décimal, plus grand ou plus petit que l'unité, en fraction ordinaire, il suffit d'écrire au numérateur le nombre décimal considéré comme exprimant un nombre entier, ce qui revient à supprimer la virgule, et au dénominateur, l'unité suivie d'autant de zéros vers la droite qu'il y avait de chiffres*

décimaux sur la droite de la virgule. Ainsi, pour convertir en fraction ordinaire la fraction décimale 0,236, on écrira au numérateur le nombre décimal 0,236 considéré comme un nombre entier, c'est-à-dire, 0236, ou 236; la fraction décimale 0,236 contenant 3 chiffres décimaux, le dénominateur de la fraction ordinaire qui l'exprime est l'unité suivie de 3 zéros vers la droite, c'est-à-dire, 1000; mais son numérateur est 236, cette fraction est donc $\frac{236}{1000}$; de même le nombre décimal 36,785 est exprimé par la fraction ordinaire $\frac{36785}{1000}$, dont le numérateur 36785, est le nombre décimal 36,785 considéré comme un nombre entier, ce qui s'est réduit à supprimer la virgule, et dont le dénominateur 1000 est l'unité suivie des trois zéros déterminés par les trois chiffres décimaux du nombre décimal 36,785. Les zéros placés entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, disparaissant toujours dans le numérateur de la fraction ordinaire qui exprime une fraction décimale moindre que l'unité, on peut donner cette règle abrégée.

150. *Toute fraction décimale, moindre que l'unité, est exprimée par une fraction ordinaire, dont le numérateur est composé de la partie décimale significative, considérée comme un nombre entier, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéros vers la droite qu'il y avait de chiffres décimaux.* Ainsi, la fraction décimale 0,00405 est exprimée par la fraction ordinaire $\frac{405}{100000}$, dont le numérateur 405 est la partie décimale significative considérée comme un nombre entier, et dont le dénominateur 100000 est l'unité suivie des 5 zéros, vers la droite, déterminés par les 5 décimales de la fraction décimale 0,00405. Il faudrait bien se garder d'appliquer cette règle abrégée aux nombres décimaux plus grands que l'unité; elle conduirait à une absurdité. Par exemple, le nombre décimal 8,007 est exprimé par la fraction ordinaire $\frac{8007}{1000}$ qui diffère essentiellement de la fraction $\frac{87}{1000}$, que donnerait la règle abrégée, si l'on ne conservait que les chiffres significatifs. En général, *on ne doit jamais supprimer les zéros placés entre des chiffres significatifs. Le chiffre des unités est toujours considéré comme significatif.*

151. La règle du n° 149 donnant le moyen de convertir un

nombre décimal en fraction ordinaire, il est très-naturel de déduire l'énoncé des nombres décimaux de celui des fractions que l'on connaît. Ainsi, *pour énoncer un nombre décimal plus grand ou plus petit que l'unité, il suffit de le convertir en fraction ordinaire, d'après la règle du n° 149, l'énoncé de cette fraction ordinaire, déterminé par la règle du n° 107 (page 106), sera l'énoncé demandé. On préviendra toutes les causes d'erreur en mettant une virgule entre l'énoncé du numérateur et celui du dénominateur.* D'après cela; pour énoncer la fraction décimale 0,36, on observera qu'elle a pour valeur la fraction ordinaire $\frac{36}{100}$, dont l'énoncé est *trente-six, centièmes;* la raison en est que 0,36 valent $\frac{3}{10}$ plus $\frac{6}{100}$, ou $\frac{30}{100}$ plus $\frac{6}{100}$, ou $\frac{36}{100}$. L'énoncé du nombre décimal 36,72 est le même que celui de la fraction ordinaire $\frac{3672}{100}$ qui l'exprime; et ce dernier est *trois mille six cent soixante-douze, centièmes.* L'énoncé de la fraction décimale 0,027 est le même que celui de la fraction équivalente $\frac{27}{1000}$, c'est-à-dire, *vingt-sept, millièmes*, etc. Cette règle n'est sujette à aucune exception, elle a le grand avantage de ramener l'énoncé des nombres décimaux à celui des fractions ordinaires, qui ne dépend lui-même que de l'énoncé des nombres entiers. Par son moyen l'énoncé indique toujours le nombre des plus petites unités décimales dont le nombre décimal est composé. C'est ainsi que l'énoncé, *trois mille six cent soixante-douze, centièmes*, du nombre décimal 36,72, indique qu'il se compose de 3672 centièmes; ce qui est évident, car 36,72 valent 36 $\frac{72}{100}$, ou $\frac{3672}{100}$, ou 3672 centièmes. Mais comme il est souvent utile de séparer l'énoncé du nombre entier de celui de la fraction qui l'accompagne, on peut alors employer la règle suivante.

152. *Pour énoncer un nombre décimal, plus grand que l'unité, il suffit d'ajouter à l'énoncé du nombre entier qui précède la virgule, celui de la fraction ordinaire qui exprime la décimale; le résultat compose l'énoncé demandé. Pour prévenir les erreurs, on a soin de mettre le mot* UNITÉ *entre l'énoncé du nombre entier et celui de la fraction; dans ce dernier, la virgule sépare l'énoncé du numérateur de celui du dénominateur.* Ainsi; pour énoncer le nombre décimal 36,72, on ajoutera à l'énoncé

trente-six

trente-six unités, du nombre entier 36, celui *soixante-douze, centièmes* de la fraction ordinaire $\frac{72}{100}$, qui exprime la partie décimale 0,72, et l'on aura *trente-six unités soixante-douze, centièmes*, pour l'énoncé du nombre décimal 36,72 : la raison en est que 36,72 valent 36 unités plus $\frac{72}{100}$, ou 36 unités 72 centièmes. On verra de la même manière, que le nombre décimal 3600,000072, composé de 3600 unités et de $\frac{72}{1000000}$, a pour énoncé, *trois mille six cents unités soixante-douze, millioniêmes.*

153. Les deux règles précédentes exigent la transformation du nombre décimal en fraction ordinaire; on peut éviter cette transformation au moyen de la règle qui suit : 1°. *Si l'on veut confondre l'énoncé du nombre entier avec celui de la partie décimale, comme dans la règle du n° 151; il suffira d'énoncer le nombre décimal comme s'il exprimait des unités entières, ce qui revient à faire abstraction de la* VIRGULE, *en ajoutant seulement à la fin le nom de la dernière espèce de décimales qu'on a nommée; ce nom est celui des unités décimales exprimées par le dernier chiffre décimal à droite; on l'obtient en comptant sur chaque chiffre décimal, à partir de la virgule, les noms, dixième, centième,* MILLIÈME; *dix-millième, cent-millième,* MILLIONIÈME; *dix-millionième, cent-millionième,* BILLIONIEME, etc. *Le nombre ainsi énoncé se trouve rapporté à ses plus petites unités.* Cette règle n'est qu'une simple conséquence de celle du n° 151; ainsi, pour énoncer le nombre décimal 36,72, on fera d'abord abstraction de la virgule, ce qui donnera 3672; l'énoncé de ce dernier nombre, suivi du nom *centièmes,* qui convient aux plus petites unités décimales du nombre proposé, donnera l'énoncé demandé : *trois mille six cent soixante-douze, centièmes.* S'il s'agit de la fraction décimale 0,7489; on énoncera d'abord la partie décimale 7489, comme si elle exprimait un nombre entier, et l'on ajoutera à la fin le nom *dix-millièmes,* qui convient aux unités décimales exprimées par le dernier chiffre décimal 9, (on a obtenu ce nom, en prononçant depuis la *virgule* les mots, *dixième, centième, millième, dix-millième,* sur les chiffres décimaux 7, 4, 8, 9; (on

en déduira que l'énoncé cherché est . . . . *sept mille quatre cent quatre-vingt-neuf, dix-millièmes.* Pour démontrer directement l'exactitude de ce dernier procédé ; on observera que 0,7489, valent $\frac{7}{10}$ plus $\frac{4}{100}$ plus $\frac{8}{1000}$ plus $\frac{9}{10000}$, ou encore $\frac{7000}{10000}$ plus $\frac{400}{10000}$ plus $\frac{80}{10000}$ plus $\frac{9}{10000}$, ou $\frac{7489}{10000}$, c'est-à-dire 7489, *dix-millièmes.* Si l'on avait la fraction décimale 0,000247 ; on énoncerait la partie décimale significative 247, comme si elle exprimait des unités ; pour déterminer le nom de ces unités, on prononcerait, depuis la *virgule*, sur les chiffres décimaux 0, 0, 0, 2, 4, 7, les noms dixième, centième, millième, dix-millième, cent-millième, *millionième*, qui conviennent à leurs unités ; cela ferait voir que le dernier chiffre 7 exprime des *millionièmes*, et que par conséquent la fraction décimale 0,000247 a pour énoncé, *deux cent quarante-sept, millionièmes.* Ce nom est effectivement celui de la fraction ordinaire $\frac{247}{1000000}$, qui exprime la fraction décimale 0,000247. On verrait de même que les plus petites unités décimales du nombre 0,0000058 sont des billionièmes ; l'énoncé de ce nombre est donc *cinquante-huit, billionièmes.*

2°. *Si l'on veut séparer l'énoncé du nombre entier, de celui de la partie décimale, comme dans la règle du n° 152 ; on énoncera d'abord le nombre entier, placé à gauche de la virgule ; on énoncera ensuite les chiffres décimaux, comme s'ils exprimaient des unités simples, et l'on terminera cet énoncé par le nom des unités décimales exprimées par le dernier chiffre décimal à droite. On obtient ce nom, en prononçant sur chaque chiffre décimal, à partir de la* VIRGULE, *les mots dixième, centième, millième, etc. ; le mot prononcé sur le dernier chiffre décimal à droite, sera le nom de ses unités. Cette méthode n'est qu'un cas particulier de la règle générale énoncée dans le n° 23* (*page* 25). *On conçoit le nombre décimal séparé en deux tranches, par la virgule ; il suffit alors d'énoncer chaque tranche comme si elle était seule, en ajoutant à son énoncé le nom de la plus petite espèce d'unités qu'elle renferme.* S'il s'agit, par exemple, du nombre 36, 72, on énoncera successivement ses deux tranches 36 et 72, comme si elles étaient seules, et l'on

terminera leurs énoncés par les noms *unités* et *centièmes* qui conviennent à leurs plus petites unités, ce qui donnera *trente-six unités soixante-douze, centièmes*, pour l'énoncé du nombre 36,72 ; et en effet, 36,72 valent 36 unités plus $\frac{7}{10}$ plus $\frac{2}{100}$, ou 36 unités plus $\frac{70}{100}$ plus $\frac{2}{100}$, ou enfin 36 unités plus 72 centièmes. Pour énoncer 246,5728, on dira : 246 *unités* 5728 *dix-millièmes*, en énonçant d'abord le nombre entier 246, placé à gauche de la virgule, et ensuite la partie décimale 5728, comme si elle exprimait des unités simples ; mais en prononçant à la fin le nom *dix-millièmes* des unités décimales exprimées par le dernier chiffre décimal 8, on obtient ce nom en comptant depuis la virgule les mots dixième, centième, millième, *dix-millième*, sur les chiffres décimaux 5, 7, 2, 8.

154. Lorsque la virgule n'est précédée que d'un zéro, il n'y a pas d'entiers, et alors les deux manières d'énoncer la fraction décimale rentrent l'une dans l'autre ; ainsi les deux règles précédentes, et celles des n°s 151 et 152, donnent également, *cinq mille sept cent vingt-huit, dix-millièmes*, pour l'énoncé de la fraction décimale 0,5728.

155. *Quand le nombre décimal proposé, contient beaucoup de decimales ; pour trouver le plus brievement possible leur plus petite espèce, déterminée par le dernier chiffre décimal à droite, il convient de diviser la partie décimale en tranches de trois chiffres, à partir de la* VIRGULE ; *alors le premier chiffre à droite de chaque tranche de trois chiffres, exprime successivement des* MILLIÈMES, *des* MILLIONIÈMES, *des* BILLIONIÈMES, *des* TRILLIONIÈMES, *etc. Si la dernière tranche à droite a trois chiffres, son nom est celui des plus petites unités décimales ; si cette tranche ne contient pas trois chiffres décimaux, on prendra le nom des unités de l'avant-dernière tranche, et l'on fera précéder ce nom des mots* DIX *ou* CENT (*), *selon que la dernière tranche*

(*) Je rappelle que le trait d'union placé à la suite des mots dix et cent, comme on le voit ici : *dix-, cent-*, remplace *ième de* ; ensorte que *dix-, cent-*, sont des expressions abrégées qui signifient, dix*ième de*, cent*ième de*. Ainsi les énoncés ; *trois, dix-billionièmes* ; 27 *cent-trillionièmes*, appartiennent aux fractions $\frac{3}{10000000000}$; $\frac{27}{100000000000000}$. Voyez la note du n° 145 (page 152)

aura un ou deux chiffres. Voici un exemple de chaque espèce.

0,123 | 456 | 789 *millièmes. million. billionièm.* 0,123 | 456 | 7 *millièmes. milliones.* 0,123 | 456 | 78 *millièmes. millionièmes.*

Pour déterminer le nom de la plus petite espèce d'unités décimales de la 1ère fraction décimale, on pourrait compter successivement les mots dixième, centième, *millième,* dix-millième, cent-millième, *millionième,* dix-millionième, cent-millionièmes, BILLIONIÈME, sur ses chiffres décimaux 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et l'on reconnaîtrait que le dernier chiffre 9 exprime des *billionièmes;* mais on y parviendra plus briévement en formant des tranches de trois chiffres, comme on le voit ci-dessus; car alors, à cause des noms, *millièmes, millionièmes, billonièmes,* de la 1ère tranche de la 2ème et de la 3ème, le dernier chiffre 9, de la 3ème tranche, exprime des billionièmes; énonçant alors la partie décimale comme si elle exprimait un nombre entier, et ajoutant à cet énoncé le nom *billionième* des plus petites unités décimales, on reconnaîtra que l'énoncé cherché est . . . 123 *millions* 456 *mille* 789, *billionièmes.* Comme dans le second exemple, la dernière tranche à droite ne contient qu'un seul chiffre décimal 7, on fera précéder le nom *millionième,* des unités de l'avant-dernière tranche, du mot *dix-;* et l'on verra que les plus petites unités décimales du nombre 0,1234567, sont des *dix-millionièmes :* énonçant alors la partie décimale comme si elle exprimait des unités entières, et ajoutant à cet énoncé le nom *dix-millionièmes,* des plus petites unités décimales, on verra que le nombre donné 0,1234567 a pour énoncé . . . . *un million* 234 *mille* 567, *dix-millionièmes.* Enfin, comme dans le 3ème exemple, la dernière tranche à droite n'a que deux chiffres, 7 et 8; on ajoutera au nom *millionièmes,* de la tranche précédente, le mot *cent-,* ce qui donnera *cent-millionièmes* pour le nom des plus petites unités décimales du nombre 0,12345678. S'il s'agit d'énoncer ce nombre, on le considérera comme exprimant des unités entières, ce qui le changera en 12 345 678; l'énoncé de ce dernier nombre, suivi du nom *cent-millionièmes* des plus petites unités décimales, donnera l'énoncé demandé. . . 12 *millions* 345 *mille* 678, *cent-millionièmes.*

156. Puisque dans les nombres décimaux comme dans les nombres entiers, les unités des différens ordres deviennent de dix en dix fois plus petites en allant de gauche à droite, les remarques du n° 16 (page 18) doivent s'appliquer aux nombres décimaux. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter les yeux sur l'exemple suivant, où l'on a mis sous chaque chiffre le nom déterminé par l'ordre de ses unités.

8	5	7	3	2	4	6	2	3	9	3	4,	3	4	5.	2	4	3	5	2	6
centaines	dixaines	unités	centaines	dixaines	unités	centaines	dixaines	unités	centaines	dixaines	unités	centaines	dixaines	unités	centaines	dixaines	unités	centaines	dixaines	unités
de *billions.*			de *millions.*			de *mille.*			de *unités.*			de *millièmes.*			de *millionès.*			de *billionès.*		

On y voit que les trois chiffres de chaque tranche expriment tous en allant de droite à gauche, des unités, dixaines et centaines, de l'ordre de la tranche à laquelle ils appartiennent, et que ce nom est indiqué, à gauche de la virgule, par les noms

Unités, *mille*, *millions*, *billions*;

Et à droite, par les noms. . . .

Millièmes, *millionièmes*, *billionièmes*;

Le nombre proposé, ainsi décomposé, a donc pour énoncé . . .

857 *billions* 324 *millions* 623 *mille* 934 *unités* 345 *millièmes*, etc.

On peut remarquer l'uniformité qui règne entre les noms des tranches de trois chiffres, prises à égale distance de part et d'autre de la tranche des unités; car en partant de cette tranche, la 1ère à gauche exprimant des *mille*, celle à droite exprime des *millièmes*, la 2ème tranche à gauche exprimant des *millions*, celle à droite exprime des *millionièmes*, la 3ème tranche à gauche exprimant des *billions*, celle à droite exprime des *billionièmes*. La même loi se continue indéfiniment de part et d'autre de la tranche des unités.

157. La règle du n°. 23 (page 25) s'applique ici; *quelquefois pour énoncer les nombres décimaux, on les partage en tranches égales ou inégales, d'un ou de plusieurs chiffres, on énonce chaque tranche significative, en partant de la 1ère à gauche*,

comme si elle était seule, et on lui donne ensuite le nom de l'espèce d'unité de son dernier chiffre à droite, qui est celui de la plus petite espèce d'unités qu'elle renferme. Pour déterminer ces noms, il suffit de se rappeler que les chiffres placés sur la gauche de la virgule, exprimant respectivement des, UNITÉS, *dixaines, centaines,* MILLE, *dixaines de mille, centaines de mille,* MILLIONS, *etc.; les chiffres décimaux placés sur la droite de la virgule, expriment successivement des, dixièmes, centièmes,* MILLIÈMES, *dix-millièmes, cent-millièmes,* MILLIONIÈMES, *etc.* Cette règle générale comprend celles données dans les nos 23 et 153. Par exemple; le nombre décimal 364,783 partagé en tranches de deux chiffres, comme il suit.. 36 | 4,7 | 83.. doit s'énoncer, *trente-six dixaines, quarante-sept dixièmes, octante-trois millièmes;* car en prononçant sur ses chiffres 3, 6, 4, 7, 8, 3, les mots, centaines *dixaines* unités *dixièmes* centièmes *millièmes*, on voit que les derniers chiffres 6, 7, 3, de chaque tranche, expriment respectivement des *dixaines*, des *dixièmes* et des *millièmes*. Pour vérifier directement l'exactitude de cet énoncé, on observera; que 36 dixaines valent 360 unités, ou 3 centaines plus 6 dixaines; que 47 dixièmes valent $\frac{47}{10}$ ou 4 unités 7 dixièmes; que 83 millièmes, ou $\frac{83}{1000}$, valent $\frac{80}{1000}$, plus $\frac{3}{1000}$, ou $\frac{8}{100}$ plus $\frac{3}{1000}$, ou enfin 8 centièmes plus 3 millièmes; si l'on réunit ces diverses parties, on verra que l'énoncé 36 *dixaines* 47 *dixièmes* 83 *millièmes*, est celui d'un nombre composé de, 3 centaines 6 dixaines 4 unités 7 dixièmes 8 centièmes 3 millièmes; ce nombre est donc 364,783 : c'est effectivement le nombre décimal proposé. Des décompositions analogues pouvant s'effectuer sur tous les nombres décimaux, nous pouvons compter sur l'exactitude de la règle énoncée au commencement de cet article.

158. Les règles précédentes donnent plusieurs moyens d'énoncer un nombre décimal écrit en chiffres; la solution du problème inverse offre plus de difficulté, parce que l'énoncé d'un nombre décimal étant susceptible de formes différentes, il semble nécessaire de donner une règle relative à chacune d'elles; cependant on verra que ces règles sont comprises dans la suivante.

Pour écrire en chiffres un nombre décimal énoncé, il faut distinguer trois cas, relatifs à l'aspect sous lequel il se présente. Dans le premier, l'énoncé ne distinguant pas les unités entières des unités décimales, sera celui d'une fraction ordinaire, ayant pour numérateur le nombre décimal, considéré comme exprimant des unités simples, et pour dénominateur l'unité suivie d'un certain nombre de zéros vers la droite. On écrira cette fraction, d'après la règle du n° 108 (page 106), sa conversion en décimales, effectuée d'après la règle du n° 148 (page 157), donnera l'écriture en chiffres du nombre décimal énoncé. S'il s'agissait du nombre décimal, *trois cent soixante-huit mille quatre, dix-millièmes;* on remarquerait que cet énoncé est celui de la fraction $\frac{368004}{10000}$ dont la valeur décimale est 36,8004.

Dans le second cas, celui où l'énoncé distingue les unités entières des unités décimales, on écrit d'abord les premières; on substitue ensuite aux décimales, la fraction ordinaire qui les exprime, et cette fraction réduite en décimales, donne la partie décimale du nombre énoncé. Si l'on avait à mettre en chiffres, *trente-six unités septante-deux millièmes*, on observerait que ce nombre se compose du nombre entier 36 et de la fraction $\frac{72}{1000}$ dont la valeur décimale est 0,072; il sera donc exprimé par 36,072; l'énoncé 36 *unités* 8004, *dix-millièmes*, est celui, du nombre entier 36, joint à la fraction $\frac{8004}{10000}$; mais cette dernière est exprimée par 0,8004; le nombre cherché se compose donc de 36 unités et de 0,8004; il est donc égal à 36,8004.

Le 3e cas est celui où l'énoncé distingue plusieurs espèces d'unités entières et décimales. Il faut d'abord écrire en chiffres les nombres entiers énoncés, en les rapportant tous à l'unité simple; puis, les fractions ordinaires exprimées par les différentes espèces d'unités décimales; leur somme, convertie en décimales, et jointe aux unités obtenues, donnera le nombre décimal énoncé. Proposons-nous, par exemple, d'écrire en chiffres le nombre décimal 36 *dixaines* 47 *dixièmes* 83 *millièmes;*

les 36 dixaines converties en unités simples donnent 360, les 47 dixièmes plus 83 millièmes, valent $\frac{47}{10}$ plus $\frac{83}{1000}$, ou $\frac{4783}{1000}$, ou enfin 4,783; joignant cette somme aux 360 unités simples, le résultat sera 364,783.

159. Les trois règles précédentes offrent une solution complète de la seconde partie du problême de la numération décimale, car elles donnent des *méthodes certaines pour écrire en chiffres un nombre dicté ou énoncé en toutes lettres;* mais ces règles ont le défaut d'exiger la transformation des nombres décimaux en fractions ordinaires, ce qui doit paraître indirect. Pour obvier à cet inconvénient, nous allons exposer des règles qui donneront le moyen d'opérer directement sur les nombres décimaux énoncés.

Reprenons le 1er cas, celui où l'énoncé ne distingue pas les unités entières des unités décimales; il faudra d'abord écrire le nombre décimal comme s'il exprimait des unités entières; compter ensuite, au moyen de ses doigts, quel est l'ordre de la plus petite décimale énoncée: cet ordre déterminera le nombre de chiffres décimaux que l'on doit séparer par la VIRGULE *sur la droite du nombre écrit. S'il arrivait qu'on dût séparer, par la virgule, plus de décimales que le nombre écrit ne contient de chiffres, on y suppléerait par des zéros placés sur sa gauche; on mettrait ensuite la virgule à sa place, c'est-à-dire, après un nombre de chiffres déterminé par le rang de la plus petite décimale énoncée, et l'on poserait un zéro avant la virgule, pour occuper la place des unités.* On pourrait, par exemple, proposer d'écrire en chiffres, *quarante-deux mille cinq cent trente-deux, dix-millièmes;* faisant abstraction de l'espèce d'unité que ce nombre représente, j'écrirais 42532: je dirais ensuite, la plus petite décimale énoncée est de l'ordre des *dix-millièmes*, mais les dixièmes forment le 1er ordre décimal, les centièmes le 2ème, les millièmes le 3ème, et les dix-millièmes le 4ème; il y aura donc en tout 4 chiffres décimaux, il faut donc séparer par la *virgule*, 4 chiffres décimaux sur la droite du nombre écrit 42532; ce qui donne, 4,2532. S'il fallait à présent, au lieu de dix-millièmes, écrire *quarante-deux mille cinq cent trente-deux*,

dix-millionièmes ; j'écrirais comme précédemment 42532 ; puis comptant sur mes doigts pour m'assurer de l'ordre de la plus petite décimale énoncée, qui est des *dix-millionièmes*, je verrais que les *dix-millionièmes* occupent le 7e *rang décimal*, et que parconséquent la virgule ne doit être placée qu'après 7 chiffres décimaux; mais le nombre écrit n'a que cinq chiffres, c'est donc deux zéros à poser entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, et comme on doit mettre un zéro avant la virgule pour tenir la place des unités simples, on voit que le nombre décimal 42532 dix-millionièmes, est exprimé par la fraction décimale.... 0,0042532.

Voici un autre procédé plus commode dans la pratique: *On écrit d'abord le nombre décimal énoncé, comme s'il exprimait des unités entières; pour déterminer la place de la* VIRGULE : *on prononce, unité sur le* 1er *chiffre à droite, dixième sur le* 2e, *centième sur le* 3ème, *et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au nom de la plus petite décimale énoncée ; on place la virgule sur la droite du chiffre correspondant, en ayant soin, s'il manque des chiffres, d'y suppléer par des zéros; le résultat donne l'écriture en chiffres du nombre décimal énoncé.* Cette méthode repose sur une observation très-simple. Afin de fixer les idées, nous considérerons le nombre.. 9,674. Si, commençant par la gauche, on énonce sur les chiffres 9, 6, 7, 4, les noms, unité dixième centième *millième*, de leurs unités respectives, on reconnaîtra que le chiffre 4 exprime des millièmes ; conséquemment, si nous prononçons les mêmes mots sur les chiffres pris dans un ordre inverse, comme le nombre des chiffres et celui des mots n'aura pas changé, il n'y aura qu'un simple changement d'ordre ; au lieu de prononcer, unité sur le chiffre 9 des unités et millième sur le chiffre 4 des millièmes, on prononcera unité sur le chiffre 4 des millièmes et millième sur le chiffre 9 des unités. Il en résulte que, pour faire exprimer des millièmes au chiffre 4, du nombre..... 9674, il suffit de commencer par la droite et de prononcer sur les chiffres 4, 7, 6, 4, les mots unité dixième centième *millième*, le chiffre 9, correspondant à *millième*, sera réellement le chiffre des unités ; on

devra donc mettre la virgule sur sa droite, comme on le voit ici. . . 9,674. Par la même raison; si l'on demandait la place que doit occuper la virgule pour que le chiffre 4, du nombre 32789546I exprime des *dix-millièmes*; on commencerait par le chiffre 4, et remontant vers la gauche, on prononcerait les mots *unité*, dixième, centième, millième, *dix-millième*, sur les chiffres 4, 5, 9, 8, 7; le chiffre 7, correspondant au mot *dix-millième*, est celui des unités; on doit donc mettre la virgule sur sa droite, et écrire 327,89546I. On voit que la virgule étant ainsi placée, le chiffre 4 exprime effectivement des *dix-millièmes*.

Cette méthode s'applique à tous les nombres; elle détermine la place que doit occuper la virgule, pour qu'un chiffre, pris à volonté dans un nombre, exprime des unités décimales d'un certain ordre. Il suffit, en allant de droite à gauche, de prononcer, unité sur le chiffre désigné, dixième sur le chiffre qui est à sa gauche, centième sur le chiffre suivant, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne au nom des unités décimales de l'ordre demandé; le chiffre correspondant, sera celui des unités; on devra donc mettre la virgule sur sa droite. Si le nombre donné ne contenait pas assez de chiffres pour arriver à la décimale énoncée, on y suppléerait par des zéros mis sur sa gauche.

Ainsi, par exemple; pour mettre en chiffres le nombre *trois mille six cent septante-deux, centièmes;* on écrira ce nombre comme s'il exprimait des unités entières, ce qui donnera 3672; le chiffre 2, devant exprimer des centièmes, on comptera: sur le 1[er] chiffre 2, le nom unité: sur le 2[ème] chiffre 7, le nom dixième sur le 3[ème] chiffre 6, le nom *centième;* et comme ce dernier nom est celui de la plus petite décimale énoncée, on mettra la virgule sur la droite du chiffre 6; le résultat 36,72 sera le nombre décimal demandé. S'il s'agissait de 47 *millionièmes;* on écrirait, suivant la règle, 47 : sur les deux chiffres 7 et 4 on prononcerait les noms, unité, dixième, et comme pour arriver aux *millionièmes*, il faut encore compter les 5 noms, centième, millième, dix-millième, cent-millième, *millionième;* on mettrait 5 zéros sur la gauche de 47, ce qui donnerait 0000047; posant

alors une virgule à droite du dernier zéro, sur lequel on a compté le nom *millionième*, de la plus petite décimale énoncée, le résultat 0,0000047 serait le nombre décimal demandé.

Voyons actuellement le second cas, celui où l'énoncé distingue les unités entières des unités décimales. Après avoir mis une VIRGULE *sur la droite du nombre des unités entières, on écrira le nombre des unités décimales, en laissant un petit espace entre la virgule et lui; pour connaître s'il doit se trouver des zéros entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, on comptera sur ses doigts les noms, dixième, centième, millième, etc. jusqu'au nom de l'espèce de décimale énoncée, cela fera connaître le nombre total des chiffres décimaux; la différence entre ce dernier nombre et celui des chiffres écrits à droite de la virgule, indiquera combien on doit mettre de zéros entre la virgule et le* 1er *chiffre décimal significatif.* Pour appliquer cettre règle, proposons-nous de mettre en chiffres le nombre décimal,

Cent-vingt-cinq unités trente-quatre, millionièmes.

Après avoir mis une virgule sur la droite du nombre 125, des unités entières, on écrira le nombre 34 des unités décimales, en laissant un espace entre la virgule et lui, comme on le voit ici... 125, 34; Pour connaître s'il doit se trouver des zéros entre la virgule et le 1er chiffre décimal significatif 3; on comptera sur ses doigts les noms, dixième, centième, etc., jusqu'au nom *millionième*, de l'espèce de décimale énoncée; cela fera connaître qu'il doit y avoir 6 chiffres décimaux; la différence 4, entre ce dernier nombre et le nombre 2, des chiffres écrits à droite de la virgule, indique qu'on doit mettre 4 zéros entre la virgule et le 1er chiffre décimal significatif 3; le nombre énoncé écrit en chiffres, est donc. . 125,000034. S'il fallait écrire en chiffres le nombre *cent vingt-cinq unités deux mille sept cent trente-quatre, dix-millièmes*, composé de 125 *unités* et de 2734 *dix-millièmes*; après avoir mis une virgule sur la droite du nombre 125, des unités entières, on écrira le nombre 2734 des unités décimales, en laissant un petit espace entre la virgule et lui, ce qui donnera 125, 2734; pour déterminer s'il doit se trouver des

zéros entre la virgule et le 1er chiffre décimal significatif 2; on comptera sur ses doigts, les noms dixième, centième, millième et *dix-millièmes*; ce quatrième nom étant celui de la décimale énoncée, on est certain que le nombre des chiffres décimaux est 4; la différence zéro, entre ce dernier nombre et le nombre 4, des chiffres décimaux écrits à droite de la virgule, indique qu'il ne doit pas se trouver de zéros entre la virgule et le 1er chiffre décimal significatif 2; le nombre énoncé est donc 125,2734. S'il fallait mettre en chiffres, 25 unités 46 *millionièmes*; on écrirait suivant la règle 25, 46; où l'on voit qu'on a séparé les deux parties par une virgule et qu'on a laissé un espace entre cette dernière et le 1er chiffre décimal significatif 4; pour déterminer sa position, on compterait par les noms dixième, centième... jusqu'à *millionième*, nom de l'espèce de la plus petite décimale énoncée; on verrait, par ce moyen, qu'elle occupe le 6ème rang: il faut donc 6 chiffres décimaux; mais on n'en a que deux, c'est donc 4 zéros à mettre entre la virgule et le 1er chiffre décimal significatif 4; le nombre décimal 25 entiers 46 millionièmes sera donc exprimé par 25,000046.

Comme on a besoin dans la pratique de moyens prompts et faciles, nous allons en présenter un qui semble réunir ces avantages. *Après avoir mis une* VIRGULE *sur la droite des unités entières, on écrira la partie décimale considérée comme exprimant des unités simples, en laissant un petit espace entre elle et la virgule. Commençant alors par le dernier chiffre à droite, on comptera successivement sur les chiffres décimaux, écrits à droite de la virgule, les noms dixième, centième, millième, etc., jusqu'au nom de l'espèce de décimale énoncée; si ce dernier nom correspond au premier chiffre décimal significatif à gauche, le nombre énoncé sera bien écrit: si le nombre des chiffres décimaux écrits ne suffit pas pour arriver au même nom, on y suppléera par des zéros placés entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif.* Pour mettre en chiffres le nombre, *cent vingt-cinq unités trente-quatre, millionièmes*; on écrira d'après la règle 125, 34; comme 34 doit exprimer des *millionièmes*, on comptera sur les chiffres 4 et 3 les noms, dixième

et centième; mais pour arriver aux *millioniemes*, il faut encore compter les 4 noms, millième, dix-millième, cent-millième, *millionieme* : on mettra donc 4 zéros entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif 3; ce qui donnera 125,000034.

Dans le 3ème cas, celui où l'énoncé désigne plusieurs espèces d'unités décimales ; on pourrait donner une règle abrégée, analogue aux deux précédentes ; mais son excesssive complication et son peu d'utilité dans la pratique, m'engagent à la passer sous silence ; la regle du nº 158 (page 167) est alors la plus simple, sous le double rapport de la théorie et de la pratique. Nous y reviendrons d'ailleurs dans le nº 165 (page 178), après avoir exposé l'addition des nombres décimaux.

160. Le double problême de la numération décimale étant complètement résolu, nous devons passer au calcul des nombres décimaux. Ce calcul ne peut offrir aucunes difficultés, car *la règle du nº 149 (page 158), donnant le moyen de convertir les nombres décimaux en fractions ; lorsque cette conversion sera faite, il ne s'agira plus que d'opérer sur des fractions ordinaires, ce qui s'exécutera d'après les règles données pour le calcul des fractions.* Appliquons ces principes à quelques exemples. S'il s'agit d'opérer sur les nombres décimaux 3,6 et 1,2; on leur substituera les fractions équivalentes $\frac{36}{10}$ et $\frac{12}{10}$; alors, la somme, $\frac{48}{10}$, de ces deux fractions, convertie en décimales, donnera 4,8 pour la somme des nombres décimaux 3,6 et 1,2 ; le produit $\frac{432}{100}$, de $\frac{36}{10}$ par $\frac{12}{10}$, converti en décimales, donnera 4,32 pour le produit des nombres décimaux 3,6 et 1,2; enfin la division de $\frac{36}{10}$ par $\frac{12}{10}$, donnera 3 pour le quotient exact de 3,6 par 1,2. De même ; si l'on substitue aux nombres décimaux 36,4 et 5,72, les fractions équivalentes $\frac{364}{10}$ et $\frac{572}{100}$; leur somme sera $\frac{4212}{100}$, ou 42,12 ; leur différence sera $\frac{3068}{100}$, ou 30,68; leur produit sera $\frac{208208}{1000}$, ou 208,208 ; enfin leur quotient sera exprimé par le nombre fractionnaire $\frac{3640}{572}$. En général, *le calcul des nombres décimaux se réduit à celui des fractions ordinaires qui les expriment.*

Cette méthode est sans doute la plus naturelle ; mais lorsqu'on substitue ainsi le calcul des fractions ordinaires à celui des nombres décimaux, on y perd sous tous les rapports, car en man-

quant le but qu'on s'était proposé dans le n° 144, on n'exerce pas le raisonnement sur des considérations nouvelles, et l'on substitue, à des opérations aussi simples que directes, des opérations indirectes excessivement compliquées. Nous devons donc chercher à découvrir s'il serait possible d'opérer directement sur les nombres décimaux. Le système de leur numération écrite, étant celui des nombres entiers, leur calcul doit être aussi simple. Développons ces idées, en les appliquant à la recherche des opérations directes de l'arithmétique sur les nombres décimaux. Ces opérations reposent sur quelques propriétés particulières que nous allons d'abord examiner.

161. 1°. *La valeur d'un nombre décimal n'est pas altérée quand on introduit ou quand on supprime un ou plusieurs zéros sur la droite de son dernier chiffre décimal significatif*, car les zéros ainsi introduits ou supprimés indiquent l'absence des unités décimales dont ils occupent la place, et les autres chiffres qui restent à même distance de la virgule expriment toujours le même nombre d'unités du même ordre. Par exemple; le nombre décimal 8,9400 est équivalent; à 8,94000 à 8,9400000 à 8,940 à 8,94; car en transformant ces nombres décimaux en fractions ordinaires, et supprimant les zéros communs aux deux termes de chacune d'elles, ce qui ne change pas leurs valeurs (n° 138), elles se réduisent toutes à $\frac{894}{100}$.

2°. *Après avoir placé une* VIRGULE *sur la droite du chiffre qui exprime les unités d'un nombre, on peut, sans altérer sa valeur, introduire ou supprimer un ou plusieurs zéros, tant sur la droite du dernier chiffre significatif à droite, que sur la gauche du dernier chiffre significatif à gauche*. En effet, la virgule ayant fixé la position des unités, les zéros introduits ou supprimés ne changent pas les distances des chiffres significatifs à la virgule, ces chiffres expriment donc toujours le même nombre d'unités du même ordre; mais ces zéros n'ont aucune valeur par eux-mêmes, les nombres décimaux restent donc composés d'un même nombre d'unités de même grandeur, leurs valeurs ne changent donc pas. Ainsi le nombre décimal 34,700 est équivalent; à 034,70; à 00034,700; à 34,7; pour s'en convaincre, il suffit

d'observer, que les chiffres significatifs 3, 4, 7 expriment toujours 3 dixièmes 4 unités et 7 dixièmes; que les zéros indiquent l'absence des unités de leur ordre, et que conséquemment chaque nombre a la même valeur 34,7.

3°. *La valeur d'un nombre décimal est altérée par le changement du nombre des zéros compris entre la* VIRGULE *et le premier chiffre décimal significatif;* car ce changement augmentant ou diminuant la distance des chiffres décimaux significatifs à la *virgule*, ces chiffres n'expriment plus des unités décimales du même ordre; la partie décimale change donc de valeur; mais la partie entière n'en change pas; le nombre décimal, composé de ces deux parties, change donc de valeur. Le calcul vient à l'appui du raisonnement précédent; les nombres décimaux 9,053; 9,0053; 9,53; qui ne diffèrent que par le nombre des zéros placés entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif 5, ont néanmoins des valeurs essentiellement différentes, car les fractions ordinaires $\frac{9053}{1000}$; $\frac{90053}{10000}$; $\frac{953}{100}$; qui les expriment, réduites au même dénominateur, deviennent.... $\frac{90530}{10000}$; $\frac{90053}{10000}$; $\frac{95300}{10000}$; on voit alors que leurs valeurs sont essentiellement différentes. J'observerai, à cette occasion, que *pour juger des grandeurs relatives de plusieurs fractions, il suffit de les réduire au même dénominateur, les fractions les plus grandes seront celles qui auront acquis les plus grands numérateurs;* s'il s'agissait, par exemple, de juger des grandeurs relatives des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, on les réduirait au même dénominateur, ce qui donnerait $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$; on voit alors que la 2ème fraction est la plus grande, et qu'elle surpasse la 1ère de $\frac{1}{12}$.

4°. *La valeur d'un nombre décimal est altérée par le changement du nombre des zéros compris entre des chiffres significatifs;* parceque la distance de ces derniers à la virgule, ne restant pas la même, ils n'expriment plus des unités du même ordre. Ainsi 8,507 n'a pas la même valeur que 8,57; car ces deux nombres se composent de la partie commune, 8 unités 5 dixièmes, et des parties différentes 7 millièmes et 7 centièmes.

162. Les propriétés que nous venons de faire connaître, et toutes celles relatives aux changemens qu'éprouve un nombre

lorsqu'on change le nombre de ses chiffres sans altérer ses chiffres significatifs, sont comprises dans les deux principes suivans, également applicables aux nombres entiers et aux nombres décimaux. 1°. *Un nombre ne change pas de valeur quand les zéros introduits ou supprimés ne tombent pas entre des chiffres significatifs (le chiffre des unités est toujours considéré comme un chiffre significatif);* parcequ'alors les chiffres significatifs, restant les mêmes et à même distance du chiffre des unités, expriment toujours le même nombre d'unités du même ordre. Ainsi 24,7 est équivalent à chacun des nombres 24,700, 024,700, etc.

2°. *Un nombre change de valeur quand les zéros introduits ou supprimés tombent entre des chiffres significatifs;* parcequ'alors la distance de ces derniers au chiffre des unités changeant, ils n'expriment plus des unités du même ordre; ainsi les nombres 2070,0045; 27,45; 207,405; quoique composés des mêmes chiffres significatifs 2, 7, 4, 5; ont cependant des valeurs différentes; cela est évident, et l'on peut d'ailleurs s'en convaincre en réduisant au même dénominateur les fractions ordinaires qui les expriment.

163. Les méthodes que nous avons données pour effectuer l'addition et la soustraction des nombres entiers, sont fondées sur ce qu'en allant de droite à gauche, dix unités d'un ordre quelconque en valent une de l'ordre suivant; mais les unités décimales sont soumises à cette même loi; on doit donc pouvoir leur appliquer les mêmes règles. Ainsi, *pour ajouter plusieurs nombres décimaux on les dispose les uns sous les autres, de manière que leurs unités du même ordre se trouvent dans les mêmes colonnes verticales*, comme on le voit ici....

Nombres	93,67	36,4	0,378	18,2005	593,4698	96,
à ajouter.	32,29	5,72	20,42	200,00007	342,8209	3,7
Sommes	125,96	42,12	20,798	218,20057	936,2907	99,7

effectuant alors chaque addition d'après la règle du n° 33 (page 31), on trouve les sommes ci-dessus. La simplicité du calcul m'engage à ne détailler que la première opération, dans laquelle il s'agit d'obtenir la somme des nombres décimaux 93,67 et 32,29; commençant par les plus petites unités, je dis; 9 centièmes

tièmes et 7 centièmes font 16 centièmes, qui valent 10 centièmes plus 6 centièmes, ou 1 dixième et 6 centièmes ; j'écris donc 6, au rang des centièmes du résultat, et je retiens un dixième pour le joindre aux 8 dixièmes contenus dans la colonne des dixièmes ; cela me donne 9 dixièmes ; j'écris donc 9 au rang des dixièmes du résultat ; passant aux colonnes suivantes, je dis ; 2 unités et 3 unités font 5 unités, que je pose ; 3 dixaines et 9 dixaines font 12 dixaines, ou 1 centaine et 2 dixaines : comme les chiffres des nombres à ajouter sont alors épuisés, j'écris 2 au rang des dixaines et 1 au rang des centaines, ce qui me donne 125,96 pour la somme demandée. Ici, comme pour les nombres entiers, on se dispense de répéter continuellement le nom de l'espèce d'unité sur laquelle on opère, on se rappelle seulement qu'en allant de droite à gauche, dix unités d'un certain ordre en valent une de l'ordre suivant ; ainsi, dans le premier exemple on dira ; 9 et 7 font 16, je pose 6 et je retiens 1 ; 1 de retenue et 2 font 3 et 6 font 9, que j'écris ; 2 et 3 font 5, je pose 5 ; 9 et 3 font 12, je pose 2 et j'avance 1 ; l'opération est terminée et j'ai 125,96 pour la somme demandée. Afin d'éviter des répétitions inutiles, je préviens que la même simplification s'applique à toutes les opérations sur les nombres décimaux. La méthode générale du n° 160 (page 173), eût conduit plus longuement au même résultat ; car les nombres décimaux 93,67 et 32,29 sont exprimés par les fractions ordinaires $\frac{9367}{100}$ et $\frac{3229}{100}$, dont la somme $\frac{12596}{100}$ est équivalente à 125,96. On peut faire les mêmes observations sur les autres exemples, et en général.

164. *Pour* ADDITIONNER *plusieurs nombres, décimaux et entiers ; il faut les placer les uns sous les autres, en ayant soin que leurs unités du même ordre se trouvent dans une même colonne verticale ; les unités sont alors sous les unites, les dixaines sous les dixaines, les dixièmes sous les dixièmes, etc. ; on place ensuite un trait sous ces nombres pour les séparer du résultat qu'on posera dessous. L'opération ainsi disposée ; pour l'exécuter, on fait une somme des nombres contenus dans la première colonne à droite ; si cette somme n'excède pas 9, on l'écrit au résultat sous la colonne qui l'a fournie, si elle surpasse 9, on*

n'écrit que ses unités, et l'on retient ses dixaines pour les joindre, comme des unités, à la colonne suivante, sur laquelle on opère de la même manière, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à la dernière colonne à gauche, dont on pose la somme telle qu'on la trouve. On met ensuite la VIRGULE, *au résultat, dans la colonne verticale qui renferme les virgules des nombres ajoutés, ce qui revient à séparer sur la droite du résultat autant de chiffres décimaux qu'il y en avait dans celui des nombres proposés qui en contenait le plus. L'opération est alors terminée. Lorsqu'une somme partielle ne contient que des dixaines sans unités, on a soin de mettre un zéro sous la colonne qui l'a fournie, pour tenir la place des unités de cette colonne, et conserver aux autres chiffres du résultat le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. On doit observer que la somme totale se compose de la réunion des sommes partielles des unités des différens ordres contenues dans les nombres donnés.* Si l'on compare cette règle à celle donnée pour l'addition des nombres entiers (n° 33, page 31), on verra qu'elle n'en diffère que dans la partie relative à la position de la *virgule* décimale.

165. On déduit de l'addition des nombres décimaux une règle directe pour mettre en chiffres un nombre décimal dont l'énoncé distingue les noms de différens ordres d'unités décimales; voici cette règle. *Pour mettre en chiffres un nombre décimal dont l'énoncé distingue plusieurs espèces d'unités entières et décimales; il faut d'abord écrire en chiffres, les nombres entiers énoncés, en les rapportant tous à l'unité simple; on écrit ensuite les fractions décimales énoncées, d'après les règles du n° 159; la somme des nombres ainsi écrits en chiffres, donne l'écriture en chiffres du nombre énoncé.* S'il s'agissait du nombre décimal, 36 *dixaines* 47 *dixièmes* 83 *millièmes*, on dirait; les 36 dixaines converties en unités simples, valent 360 unités; les 47 dixièmes valent 4,7; les 83 millièmes valent 0,083; le nombre énoncé est donc composé, de 360 unités de 4,7 et de 0,083; la somme de ces trois parties donne 364,783 pour l'écriture en chiffres du nombre énoncé. S'il s'agit du nombre 43 *centaines de mille*, 257 *centaines*, 8142 *centièmes*, 6 *millièmes*, 7985 *dix-millionièmes*,

on convertira d'abord en unités simples les nombres entiers, 43 centaines de mille et 257 centaines, ce qui donnera 4300000 unités et 25700 unités ; passant aux unités décimales, on dira ; les 8142 centièmes, valent 81,42 ; les 6 millièmes, valent 0,006 ; les 7985 dix millionièmes s'écrivent 0,0007985 ; le nombre énoncé est donc composé de 4300000 unités de 25700 unités, de 81,42 de 0,006 et de 0,0007985 ; la somme de ces parties donnera 4325781,4267985 pour l'écriture en chiffres du nombre énoncé.

Nous ferons ici une remarque analogue à celle du n° 36 ; on propose quelquefois d'écrire en chiffres des nombres décimaux dont les énoncés vicieux peuvent induire en erreur, lorsqu'on leur applique la règle du n° 159 (pag. 168). La règle actuelle lève toutes ces difficultés. Prenons pour exemple le nombre *douze mille douze cent douze, millièmes*. On dira ; les douze mille valent 12000 unités ; les douze cents, valent 1200 unités ; enfin douze, exprime 12 unités ; douze mille douze cent douze, composé de 12000 unités de 1200 unités et de 12 unités, vaut donc 12000 plus 1200 plus 12, c'est-à-dire 13212 ; le nombre énoncé est donc 13212 millièmes, ou 13,212. On serait fort embarrassé d'écrire en chiffres le nombre
trois cent vingt-sept unités cinq cent quarante-six, dixièmes ; car d'après la deuxième règle du n° 159, qui semble convenir à notre énoncé, on écrirait d'abord 327,546 ; remarquant ensuite que 546 doit exprimer des dixièmes, on reconnaîtrait qu'il ne doit y avoir qu'un chiffre décimal tandis qu'on en a déja trois ; pour lever cette difficulté, on appliquera la règle actuelle à notre énoncé ; on écrira donc successivement les parties, trois cent vingt-sept unités et cinq cent quarante-six, dixièmes ; ce qui donnera 327 unités et 54,6 : on dira alors ; les trois cent vingt-sept unités sont exprimées par 327 unités, les cinq cent quarante-six dixièmes, valent 546 dixièmes, ou 54,6 ; le nombre énoncé est donc composé de 327 unités et de 54,6 ; la somme de ces deux nombres donnera 381,6 pour l'écriture en chiffres du nombre énoncé ; ensorte que son véritable énoncé était 381 *unités*, 6 *dixièmes*.

166. La règle à suivre pour soustraire deux nombres déci-

maux l'un de l'autre, est analogue à celle relative aux nombres entiers; pour la commodité du calcul, on écrit sur la droite d'un des nombres proposés, autant de zéros qu'il en faut pour qu'il se trouve autant de décimales dans un nombre que dans l'autre. Cette préparation ne change pas la valeur des nombres décimaux sur lesquels on doit opérer (n° 161. 1°. page 174); elle les met seulement sous une forme qui facilite les soustractions partielles. Pour éviter des répétitions inutiles, nous détaillerons le calcul relatif à l'exemple suivant, qui réunit les principales difficultés que comporte la soustraction des nombres décimaux.

De........	6890,5	équivalant à	6890,5⌀⌀
ôtez........	37,847	égal à	37,847
Reste........................			6852,653

Pour obtenir la différence entre les nombres décimaux 6890,5 et 37,847; on a d'abord observé que le second nombre contenait deux chiffres décimaux de plus que le premier; on a mis en conséquence deux zéros sur la droite de 6890,5, ce qui a conduit à soustraire 37,847 de 6890,5⌀⌀; pour effectuer cette soustraction, on a écrit le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent verticalement; et commençant par la droite, on a dit; de 0 millièmes je ne puis ôter 7 millièmes, j'ai donc recours au premier chiffre significatif 5, sur lequel j'emprunte un dixième, que je décompose en 9 centièmes plus 10 millièmes; pour distribuer cet emprunt je laisse les 9 centièmes et les 10 millièmes sur les deux derniers zéros qui, dans le nombre supérieur 6890,5⌀⌀, occupent le rang des centièmes et des millièmes; ôtant alors, 7 millièmes de 10 millièmes, et 4 centièmes de 9 centièmes, j'ai les restes 3 millièmes et 5 centièmes; j'écris donc, 3 au rang des millièmes du résultat, et 5 au rang des centièmes; parvenu aux dixièmes, je me rappelle que j'ai emprunté un des 5 dixièmes du nombre supérieur, et que parconséquent je dois ôter 8 dixièmes de 4 dixièmes; comme cela ne se peut, j'emprunte une des 9 dixaines du 1er chiffre significatif 9; cette dixaine vaut 9 unités plus 10 dixièmes, je laisse donc 9 unités sur le zéro qui

occupe la place des unités, et je joins les 10 dixièmes aux 4 que j'avais déjà, ce qui me donne 14 dixièmes; j'en ôte les 8 dixièmes du nombre inférieur, il me reste 6 dixièmes; j'écris donc 6 au rang des dixièmes du résultat; passant aux colonnes suivantes, j'ôte 7 unités des 9 unités laissées sur le zéro, j'écris au-dessous le reste 2; enfin, comme dans les soustractions précédentes j'ai emprunté une des 9 dixaines du nombre supérieur, il n'en contient plus que 8, j'ôte donc 3 dixaines de 8 dixaines, il reste 5 dixaines; j'écris donc 5 au rang des dixaines du résultat; les chiffres du nombre inférieur étant épuisés, j'abaisse les chiffres supérieurs 8 et 6, qui n'ont point été employés; l'opération est alors terminée, et l'on a 6852,653 pour la différence entre les deux nombres donnés 6890,5 et 37,847; cette différence est exacte, car, ajoutée au plus petit nombre, elle donne le plus grand. Si l'on effectue le même calcul, en profitant des abréviations indiquées dans les n°s 46 et 47, on dira; de 10 ôtez 7, reste 3; de 9 ôtez 4, reste 5; de 15 ôtez, 8 plus 1, ou 9, reste 6; de 9 ôtez 7, reste 2; de 9 ôtez, 3 plus 1, ou 4, reste 5; abaissant à la suite des restes partiels 3, 5, 6, 2, 5, les chiffres 8, 6, qui n'ont point de chiffres inférieurs correspondans, on aura le reste total 6852,653.

167. En général : *Pour* **SOUSTRAIRE** *deux nombres décimaux l'un de l'autre; commencez par écrire sur la droite d'un des nombres proposés assez de zéros pour qu'il se trouve autant de chiffres décimaux dans un nombre que dans l'autre; cette préparation faite, disposez et effectuez le calcul comme s'il n'y avait pas de virgule, d'après la règle donnée (n° 45, page 42) pour la soustraction des nombres entiers; séparez ensuite, par la virgule, autant de chiffres décimaux sur la droite du reste, qu'il y en avait dans celui des deux nombres proposés qui en contenait le plus (cela revient à placer la virgule, dans le reste, sous les virgules des deux nombres donnés); le résultat sera le reste demandé. Si l'opération a été bien faite, ce reste ajouté au plus petit nombre, donnera le plus grand. Dans la pratique on se dispense d'ajouter des zéros sur la droite du nombre qui contient le moins de chiffres décimaux; mais on opère comme s'ils*

y etaient, en ayant soin de placer les unités du même ordre dans les mêmes colonnes verticales, *c'est-à-dire*, *les unités sous les unités, les dixièmes sous les dixièmes, etc.* Il sera utile d'appliquer cette règle aux exemples suivans, qui réunissent toutes les difficultés; dans les deux derniers on s'est dispensé de mettre des zéros sur la droite du nombre qui contenait le moins de chiffres décimaux, et en faisant la preuve on a omis les zéros qui se sont trouvés sur la droite des derniers chiffres significatifs 5 et 7.

De....	10009100,01102011197	1000000,0005	30405006,0007
ôtez..	9999999,88888988800	77777,2345789	3040050,6000078
Reste.	9100,12213022397	922222,7659211	27364955,4006922
Preuve.	16009100,01102011197	1000000,0005	30405006,0007

168. La multiplication ou la division d'un nombre entier par l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite s'est réduite à introduire ou supprimer un ou plusieurs zéros sur la droite du multiplicande ou du dividende, (n°s 68 et 94), ce qui ne produit d'autre effet que de changer les grandeurs des unités exprimées par chaque chiffre, sans changer leur nombre. Or les mêmes effets sont produits lorsqu'on change la position de la *virgule* dans un nombre décimal; la multiplication et la division d'un nombre décimal par l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, ne doit donc dépendre que du simple déplacement de la *virgule*. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner les effets produits, sur la valeur d'un nombre décimal, par le déplacement de la virgule.

1°. *Si dans un nombre décimal on avance la* VIRGULE, *d'un, deux, trois, etc., rangs vers la droite, on rend ce nombre, dix, cent, mille, etc. fois plus grand; conséquemment, pour multiplier un nombre décimal par, dix, cent, mille, etc. il suffit d'avancer la virgule, d'un, deux, trois, etc. rangs vers la droite.* Prenons pour exemple le nombre décimal 42,376. Si, avançant la virgule d'un rang vers la droite, on écrit 423,76; alors le chiffre 6, qui exprimait des millièmes, exprimera des centièmes, c'est-à-dire, des unités dix fois plus grandes : le chiffre 7, qui exprimait des centièmes, exprimera des dixièmes, c'est-à-dire, des unités dix fois plus grandes : le même effet a été produit sur les autres chiffres, car, 3 qui exprimait des dixièmes exprime

des unités, 2 qui exprimait des unités exprime des dixaines, enfin 4 qui exprimait des dixaines exprime des centaines : chaque partie du nombre proposé est donc devenue dix fois plus grande ; ce nombre est donc devenu dix fois plus grand. D'après cela ; la valeur du nombre 423,76 est dix fois plus grande que celle du nombre 42,376. On prouverait de la même manière qu'en avançant de nouveau la virgule d'un rang vers la droite du nombre 423,76, le nouveau nombre 4237,6, qui résulterait de ce déplacement, serait dix fois plus grand que 423,76, et comme celui-ci était déjà dix fois plus grand que le nombre proposé 42,376, on en conclurait que la valeur du nombre 4237,6 est cent fois plus grande que celle du nombre proposé 42,376 ; ensorte que l'avancement de la virgule de deux rangs vers la droite du nombre 42,376 lui a donné la valeur cent fois plus grande 4237,6. On peut aussi le démontrer directement, en observant que si dans le nombre 42,376 on avance la virgule de deux rangs vers la droite, on le rend 100 fois plus grand ; car le nombre 4237,6, qui résulte de ce déplacement, est tel que ses chiffres expriment des unités cent fois plus grandes qu'auparavant. Enfin, pour rendre 1000 fois plus grand le nombre 42,376 qui contient 3 chiffres décimaux, il suffit de supprimer la virgule après l'avoir avancée de 3 rangs vers la droite, car dans le nombre 42376 que l'on obtiendra, chaque chiffre exprimera des unités mille fois plus grandes qu'auparavant. La règle donnée pour la multiplication d'une fraction ordinaire par un nombre entier, conduit aux mêmes résultats ; en effet, la fraction ordinaire $\frac{42376}{1000}$, équivalente à 42,376, multipliée, par 10, par 100 et par 1000, donne les produits $\frac{42376}{100}$, $\frac{42376}{10}$, $\frac{42376}{1}$, qui sont équivalens aux nombres 423,76 ; 4237,6 ; 42376. Il est un cas qui pourrait embarrasser ; si l'on voulait multiplier par mille, le nombre décimal 3,7 ; il faudrait, d'après la règle, avancer la virgule de trois rangs vers la droite : pour rendre ce déplacement possible, on substituera à 3,7 le nombre équivalent 3,700 ; avançant alors la virgule de trois rangs vers la droite, le résultat 3700 exprimera le produit cherché de 3,7 par 1000 ; et en effet, la fraction $\frac{37}{10}$, équivalente à 3,7, multipliée par 1000

donne 3700 pour produit. On verra de la même manière, que pour multiplier le nombre 13,789 par 100 000, il faut d'abord le transformer en 13,78900 : reculant alors la virgule de cinq rangs vers la droite, le résultat 1378900 exprimera le produit demandé de 13,789 par 100000. En général; *lorsque le nombre décimal proposé ne contient pas assez de chiffres décimaux pour qu'on puisse avancer la virgule au rang convenable, on y supplée par des zéros placés sur leur droite.*

2°. *Si dans un nombre décimal, on avance la* VIRGULE *d'un, deux, trois, etc. rangs vers la gauche; on rend ce nombre, dix, cent, mille, etc. fois plus petit; conséquemment, pour diviser un nombre décimal par, dix, cent, mille, etc. il suffit d'avancer la virgule d'un, deux, trois, etc. rangs vers la gauche.* Prenons pour exemple le nombre 4237,6. Si, avançant la virgule d'un rang vers la gauche, on écrit 423,76; on verra que les chiffres 4, 2, 3, 7, 6, qui, dans le 1er nombre, exprimaient respectivement, des mille, des centaines, des dixaines, des unités, et des dixièmes, expriment dans le 2ème nombre des unités dix fois plus petites, c'est-à-dire, des centaines, des dixaines, des unités, des dixièmes et des centièmes; toutes les parties du 2ème nombre sont donc dix fois plus petites que celles du 1er, le 2ème nombre est donc dix fois plus petit que le 1er, la virgule avancée d'un rang vers la gauche a donc enfin rendu le 1er nombre dix fois plus petit. Si l'on voulait diviser le même nombre décimal 4237,6 par cent; comme il suffirait alors de rendre chacune de ses parties cent fois plus petite, sans changer leur nombre, on satisferait à ces conditions en avançant la virgule de deux rangs vers la gauche; car dans le nombre 42,376 qui en résulterait, chaque chiffre exprimerait des unités cent fois plus petites qu'auparavant. Si au lieu de diviser 4237,6 par 100, on voulait le diviser par 1000, au lieu d'avancer la virgule de 2 rangs vers la gauche, et d'écrire 42,376, on l'avancerait de 3 rangs, en écrivant 4,2376; ce dernier nombre est évidemment 1000 fois plus petit que le nombre proposé 4237,6, car ses chiffres expriment le même nombre d'unités mille fois plus petites. Les propriétés des fractions ordinaires conduisent aux mêmes résultats, car la fraction ordinaire $\frac{42376}{10}$,

équivalente à 4237,6, successivement divisée, par 10, par 100 et par 1000, donne les quotiens $\frac{42376}{100}$, $\frac{42376}{1000}$, $\frac{42376}{10000}$, qui sont équivalens aux nombres décimaux 423,76; 42,376; 4,2376. On verrait de la même manière, que pour diviser un nombre décimal par dix mille, par cent mille, etc. il suffit d'avancer la virgule de quatre, cinq, etc. rangs vers la gauche.

Il est un cas qui pourrait embarrasser, c'est celui où le nombre des chiffres ne suffirait pas pour opérer le déplacement de la virgule; on y suppléerait alors par des zéros placés sur la gauche du nombre. S'il s'agissait, par exemple, de diviser par 1000 le nombre 12,3 : comme la règle prescrit d'avancer la virgule de trois rangs vers la gauche, on observerait que 12,3 est équivalent à 0012,3; avançant alors la virgule de trois rangs vers la gauche, on aurait 0,0123 pour le quotient de 12,3 par 1000; et en effet, la fraction $\frac{123}{10}$, équivalente à 12,3, divisée par 1000, donne pour quotient la fraction $\frac{123}{10000}$, équivalente au quotient décimal 0,0123. S'il s'agissait de diviser le nombre décimal 0,003 par 10000 : comme la règle prescrit d'avancer la virgule de quatre places vers la gauche du dividende 0,003, on le transformerait à cet effet en 00000,003 : avançant alors la virgule de quatre places vers la gauche du dividende 00000,003, on aurait 0,0000003 pour le quotient demandé. L'exactitude de ce résultat est mise en évidence quand on observe que 0,0000003, ou $\frac{3}{10000000}$, est le quotient de 0,003, ou $\frac{3}{1000}$, par 10000.

169. Si l'on examine attentivement les effets produits sur la valeur d'un nombre décimal par le déplacement de la virgule, on en déduira cette règle générale : *Pour multiplier ou diviser un nombre décimal par l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, il suffit d'avancer la* VIRGULE *d'autant de rangs, vers la droite du multiplicande ou vers la gauche du dividende, qu'il y a de zéros sur la droite de l'unité, dans le nombre qui sert de multiplicateur ou de diviseur;* et comme le nombre des zéros qui suivent l'unité indique combien de fois dix est facteur dans le multiplicateur ou le diviseur (*), on peut encore dire, que :

(*) Lorsqu'on veut multiplier un nombre entier par 10 ou par 100 ou par 1000, etc. il suffit de mettre un ou deux ou trois, etc. zéros sur sa droite; con-

Pour multiplier ou diviser un nombre décimal par dix pris un certain nombre de fois facteur, il suffit d'avancer la* VIRGULE *d'autant de rangs, vers la droite du multiplicande ou vers la gauche du dividende, que dix est de fois facteur dans le multiplicateur ou le diviseur. Le déplacement de la virgule devient toujours possible, en ayant soin de suppléer par des zéros aux chiffres qui pourraient manquer. Par exemple, pour multiplier 2357,8914 par 1000; comme le multiplicateur 1000 est l'unité suivie de trois zéros, ou dix trois fois facteur, on avancera la virgule de trois rangs vers la droite du multiplicande 2357,8914, le résultat 2357891,4 sera le produit demandé. Si au lieu de vouloir multiplier le nombre décimal 2357,8914 par 1000, on voulait le diviser par 1000, au lieu d'avancer la virgule de trois rangs vers la droite du multiplicande, et décrire 2357891,4 pour le produit demandé, on avancerait la virgule de trois rangs vers la gauche du dividende 2357,8914; le résultat 2,3578914 exprimerait le quotient demandé. S'il s'agissait de multiplier 93,6 par 100000; comme le multiplicateur est l'unité suivie de cinq zéros, ou dix cinq fois facteur, la règle prescrit d'avancer la virgule de cinq rangs vers la droite du multiplicande 93,6; mais ce multiplicande ne contient qu'un chiffre décimal; on complétera donc les cinq chiffres décimaux, nécessaires au déplacement de la virgule, par quatre zéros placés sur la droite du multiplicande 93,6, ce qui le transformera en 93,60000; avançant alors la virgule de cinq rangs vers la droite, ce qui revient à la supprimer, on aura enfin le produit demandé 9360000. Pour diviser 10,007 par 1000 000 000; comme le diviseur est l'unité suivie de 9 zéros, ou dix, 9 fois facteur; après avoir mis huit zéros sur la gauche du dividende, ce qui le transforme

---

séquemment, pour multiplier l'unité par 10 ou par 100 ou par 1000, etc. il suffit de mettre un ou deux ou trois, etc. zéros sur sa droite; il en résulte que, *dans un nombre composé de l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, dix est autant de fois facteur qu'il y a de zéros.* Ainsi, par exemple, l'unité suivie de trois zéros vers la droite, est le nombre 1000, produit de 10 par 10 et par 10; le produit de quatre facteurs égaux à 10 est 10000, c'est-à-dire, l'unité suivie de quatre zéros vers la droite; etc.

en 000000010,007, on avancera la virgule de 9 rangs vers la gauche, le résultat 0,000000010007 exprimera le quotient demandé. Pour faire la preuve, on multipliera le quotient 0,000000010007 par le diviseur 1000 000 000, ce qui revient à avancer la virgule de neuf rangs vers la droite, le produit 000000010,007 est effectivement équivalent au dividende 10,007, car on peut supprimer les huit zéros qui ne tombent pas entre des chiffres significatifs (n° 162, page 175).

On voit, par ce qui précède, que *la multiplication et la division d'un nombre décimal, par* 10, *par* 100, *par* 1000, *et en général par l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, s'effectue par le simple déplacement de la virgule.* Il nous reste à examiner comment on doit opérer, quand le multiplicateur ou le diviseur est quelconque. Ce qui paraît le plus naturel, est de convertir les nombres décimaux en fractions ordinaires, d'après la règle du n° 149; alors leur multiplication, soit entr'eux, soit par des nombres entiers, s'effectuera au moyen des règles précédemment exposées pour les fractions ordinaires. Mais les comparaisons, du produit réduit en décimales, avec ses facteurs décimaux, et du quotient avec le dividende et le diviseur, fourniront des règles générales, au moyen desquelles on pourra opérer directement sur les nombres décimaux. Examinons successivement la multiplication et la division.

170. Soit proposé de multiplier 3,64 par 1,2 : on convertira d'abord chaque facteur en fraction ordinaire, ce qui réduira la question à multiplier $\frac{364}{100}$ par $\frac{12}{10}$: le produit, $\frac{4368}{1000}$, réduit en décimales, donnera 4,368 pour le produit demandé, de 3,64 par 1,2. On verra de la même manière, que le produit de 3,64 par 12 est équivalent à celui de $\frac{364}{100}$ par 12, qui est $\frac{4368}{100}$, ou 43,68; que le produit de 364 par 0,0000012 est équivalent à celui de 364 par $\frac{12}{10000000}$, qui est $\frac{4368}{10000000}$, ou 0,0004368. Si l'on examine avec soin les opérations précédentes, on reconnaîtra qu'il a toujours suffi de multiplier 364 par 12, ce qui revient à faire abstraction de la *virgule* dans le multiplicande et dans le multiplicateur, et de séparer sur la droite du produit 4368 autant de chiffres décimaux qu'en contenaient les deux facteurs réunis. En

effet : pour obtenir le produit 4,368, de 3,64 par 1,2, on a multiplié 364 par 12, ce qui revient à faire abstraction de la virgule dans chaque facteur, et l'on a ensuite séparé trois décimales sur la droite du produit 4368, c'est-à-dire autant qu'il s'en trouve dans les deux facteurs 3,64 et 1,2 : pour former le produit 43,68, de 3,64 par 12, on a d'abord fait abstraction de la virgule, en multipliant 364 par 12; on a ensuite séparé deux décimales sur la droite du produit 4368, c'est-à-dire autant qu'il s'en trouve dans les deux facteurs réunis 3,64 et 12; enfin, pour obtenir le produit, 0,0004368, de 364 par 0,0000012, il a suffi, après avoir fait abstraction de la virgule, de multiplier les deux parties significatives 364 et 12 l'une par l'autre, et de séparer ensuite sur la droite du produit 4368 autant de chiffres décimaux qu'en contenaient les deux facteurs 364 et 0,0000012, c'est-à-dire sept : comme le produit 4368 ne contenait pas assez de chiffres pour y séparer les sept décimales, on y a suppléé par des zéros placés sur sa gauche. Ces remarques ne sont point particulières aux exemples que nous avons choisis, et conséquemment nous pouvons établir cette règle générale.

Pour multiplier deux nombres décimaux l'un par l'autre, ou un nombre décimal par un nombre entier, ou enfin un nombre entier par un nombre décimal, il suffit d'effectuer la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule, d'après la règle du n° 65 (page 58), et de séparer ensuite, sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve dans les deux facteurs réunis. Si le produit ne contenait pas plus de chiffres, qu'il n'y a de décimales dans les deux facteurs réunis, on y suppléerait par des zéros placés sur sa gauche. Ainsi, pour former le produit de 345,729 par 2,27 : on opérera d'abord comme s'il n'y avait pas de virgule, en multipliant 345729 par 227, ce qui donnera 78480483 : séparant alors cinq chiffres décimaux sur la droite de ce produit, à cause des cinq chiffres décimaux contenus dans les deux facteurs 345,729 et 2,27, le résultat 784,80483 exprimera le produit cherché : de même, pour former les produits : de 23,47 par 25 : de 2347 par 0,025 : de 0,2347 par 0,0025; on fera d'abord abstraction de la vir-

gule, on multipliant 2347 par 25; sur la droite du prodnit 58675, on séparera autant de chiffres décimaux qu'en contenaient les deux facteurs réunis; les résultats 586,75; 58,675; 0,00058675; exprimeront les produits demandés. Les commençans pourront s'exercer sur les exemples qui suivent, où l'on s'est contenté d'indiquer les résultats, en omettant les produits partiels....

Multiplicandes	347,009	4,759	32,9849	87,9654
Multiplicateurs	4,759	347,009	87,9654	32,9849
Produits...	1651,415831	1651,415831	2901,52992246	1901,52992246.

171. On voit dans ces exemples que *les nombres décimaux jouissent, comme les nombres entiers, de cette propriété importante que le produit de deux facteurs ne change pas dans quelqu'ordre qu'on effectue leur multiplication;* cela devait nécessairement arriver, car le nombre des chiffres décimaux reste le même, et l'on multiplie les facteurs comme s'ils exprimaient des nombres entiers. Cela résulte aussi de ce que le produit de deux nombres décimaux est égal à celui de deux fractions ordinaires équivalentes, qui ne change pas dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication (n° 125, page 126).

172. *Pour obtenir le produit de plusieurs nombres décimaux et entiers; on effectue d'abord la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule, d'après la regle du n° 69, et l'on sépare ensuite, sur la droite du résultat, autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve dans les facteurs réunis.* S'il s'agit, par exemple, de former le produit des trois nombres 3,48; 2,7; 5,01; on effectuera d'abord la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule, et sur la droite du produit 4707396, on séparera les cinq chiffres décimaux déterminés par les cinq décimales contenues dans les trois facteurs réunis; le résultat 47,07396 exprimera le produit cherché; on l'eût aussi obtenu en substituant aux facteurs décimaux 3,48; 2,7; 5,01 les fractions ordinaires $\frac{348}{100}$, $\frac{27}{10}$, $\frac{501}{100}$, qui les expriment; le produit $\frac{4707396}{100000}$, de ces dernières, converti en décimales, eût donné également 47,07396 pour le produit demandé. Le changement d'ordre des

facteurs ne changerait pas ce produit. Pour obtenir le produit des quatre facteurs 0,0037 ; 0,4; 7,8; 3,45; on fera d'abord abstraction de la virgule ; la multiplication des nombres, 37, 4, 78, 345, effectuée dans un ordre quelconque donnera 3982680; les facteurs décimaux contenant huit décimales, on en séparera le même nombre sur la droite de 3982680; le résultat 0,03982680 exprimera le produit cherché. La conversion des facteurs décimaux 0,0037 ; 0,4; 7,8 ; 3,45, en fractions ordinaires eût donné les nouveaux facteurs $\frac{37}{10000}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{78}{10}$, $\frac{345}{100}$, dont le produit $\frac{3982680}{100000000}$, réduit en décimales, eût également donné 0,03982680 pour le produit demandé.

173. La division des nombres décimaux peut se déduire de la propriété dont jouit une fraction de ne point changer de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre (n° 113, page 112). Si l'on proposait, par exemple, de diviser 6,8 par 3,4 : on mettrait le quotient sous forme fractionnaire, en se rappelant qu'une fraction indique la division de son numérateur par son dénominateur (n° 110, page 109); le quotient demandé serait alors exprimé par la fraction $\frac{6,8}{3,4}$; la multiplication de ses deux termes par dix donnerait $\frac{68}{34}$; ensorte que le quotient de 6,8 par 3,4 est le même que celui de 68 par 34 ; cette dernière division effectuée donnera 2 pour le quotient demandé; il est exact, car la multiplication du diviseur 3,4 par le quotient 2, reproduit le dividende 6,8. On parviendrait au même résultat en substituant d'abord au dividende 6,8 et au diviseur 3,4 les fractions ordinaires $\frac{68}{10}$ et $\frac{34}{10}$ qui les expriment ; divisant alors $\frac{68}{10}$ par $\frac{34}{10}$, le quotient $\frac{68}{34}$, ou 2, serait celui demandé. On prouverait d'une manière analogue, que le quotient de 42,84 par 3,57 est le même que celui de 4284 par 357; le quotient 12 est celui demandé; le diviseur 3,57 multiplié par le quotient 12, reproduit le dividende 42,84. Le quotient de 4,152 par 0,012 est le même que celui de 4152 par 0012, ou que celui de 4152 par 12, qui est 346 ; le diviseur 0,012 multiplié par le quotient 346 reproduit le dividende 4,152.

Dans ces exemples, où le dividende et le diviseur contenaient

le même nombre de chiffres décimaux, il a suffi d'effectuer la division sans avoir égard à la virgule ; si le nombre des décimales n'était pas le même dans le dividende et le diviseur, on ramènerait ce cas au précédent, en mettant sur la droite de l'un des nombres proposés assez de zéros pour qu'il se trouve autant de chiffres décimaux dans un nombre que dans l'autre. Ainsi, pour diviser 41,7 par 3,475 : comme le diviseur contient deux chiffres décimaux de plus que le dividende, on mettra d'abord deux zéros sur la droite de ce dernier ; ce qui réduira la question à diviser 41,700 par 3,475 ; supprimant alors la virgule on divisera 41700 par 3475 ; le résultat 12 exprimera le quotient cherché ; et en effet le diviseur 3,475 multiplié par le quotient 12, donne pour produit le nombre 41,700 équivalent au dividende 41,7. S'il s'agissait de diviser 0,021 par 0,002625 : comme le diviseur contient trois décimales de plus que le dividende, on rétablirait l'égalité en mettant trois zéros sur la droite du dividende 0,021 et l'on aurait alors à diviser l'un par l'autre les deux nombres décimaux 0,021000 et 0,002625, qui contiennent le même nombre de chiffres décimaux, ce qui s'effectuerait, en faisant abstraction de la virgule, et divisant ensuite 0021000 par 0002625 ; la suppression des zéros placés sur la gauche de ces deux nombres n'altérant pas leur valeur (n° 162, page 175), il sera plus simple de diviser 21000 par 2625, le résultat 8 exprimera le quotient demandé de 0,021 par 0,002625 ; le diviseur 0,002625 multiplié par le quotient 8, donne pour produit le nombre 0,021000 équivalent au dividende 0,021.

On opérerait de la même manière si le dividende ou le diviseur était un nombre entier. Pour diviser, par exemple, le nombre entier 36 par le nombre décimal 1,2 ; après avoir mis une virgule sur la droite du chiffre 6 des unités, pour fixer sa position, on mettra un zéro sur sa droite, ce qui réduira la question à diviser les deux nombres décimaux 36,0 et 1,2 l'un par l'autre ; comme le nombre des décimales est le même dans le dividende et le diviseur, on fera abstraction de la virgule, ce qui revient à multiplier le dividende et le diviseur par dix, et l'on

divisera 360 par 12 ; le quotient 30 sera celui demandé ; le diviseur 1,2 multiplié par le quotient 30, donne pour produit le nombre 36,0 équivalent au dividende 36. Enfin le quotient du nombre décimal 36,72 par le nombre entier 6 est le même que celui de 36,72 par 6,00, ou que celui de 3672 par 600, qui est 6 unités $\frac{72}{600}$, ou 6 unités $\frac{12}{100}$, ou 6 unités 12 centièmes, ou 6,12 ; le quotient 6,12 multiplié par le diviseur 6 reproduit le dividende 36,72. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer peuvent s'appliquer à tous les nombres ; on trouve que le quotient de 7,3 par 1,2 est $\frac{73}{12}$, ou $6\frac{1}{12}$; que celui de 3,6 par 7 est $\frac{3{,}6}{7}$, ou $\frac{36}{70}$, ou $\frac{18}{35}$; que celui de 3 par 0,000017 est $\frac{3}{0{,}000017}$, ou $\frac{3{,}000\,000}{0{,}000\,017}$, ou $\frac{3\,000\,000}{0000017}$, ou $\frac{3\,000\,000}{17}$, ou $176470\frac{10}{17}$.

174. Nous conclurons de ces nombreux exemples, qu'en général ; *pour diviser deux nombres décimaux l'un par l'autre, ou un nombre décimal par un nombre entier, ou un nombre entier par un nombre décimal ; il faut mettre d'abord, sur la droite du nombre qui contient le moins de décimales, assez de zéros, pour que le nombre des chiffres décimaux soit le même dans le dividende et le diviseur ; cette préparation faite, on supprimera la virgule dans le dividende et le diviseur, après quoi on effectuera la division comme pour les nombres entiers, au moyen de la règle du n° 90 ; le résultat de cette derniere opération sera le quotient demandé.*

175. *Les opérations de l'arithmétique sur les nombres décimaux se vérifient de la même maniere que celles sur les nombres entiers.* Nous nous bornerons en conséquence à donner une preuve de chaque espèce.

Nombres à ajouter	89,78	De.....	6890,5
	987,94	ôtez.....	37,847
	908,7	Reste....	6852,653
Somme......	1986,42	Preuve...	6890,500
Retenues......	.111,10		

Pour s'assurer de l'exactitude de la somme 1986,42, on commencera l'addition par la gauche et l'on dira : 9 et 9 font 18, mais

mais on a posé 19 au résultat, la différence 1 exprime donc la retenue de dix unités de la colonne suivante, qui doit conséquemment avoir donné 18 : mais elle ne donne réellement que 8 *plus* 8, ou 16, la différence 2 est donc provenue de la retenue de 20 des unités de la colonne suivante, qui doit parconséquent avoir donné 26 : mais elle ne donne que 24 ; on avait donc retenu 2 dixaines, ou 20 unités, de la colonne suivante, qui doit conséquemment contenir 24 unités : mais elle n'en donne que 23, la différence 1, provient donc de la retenue d'une dixaine, ou dix unités, de la colonne suivante : on a posé 2 sous cette colonne, elle doit donc, si l'addition a été bien faite, donner 12, car n'étant suivie d'aucune autre colonne sur la droite, elle n'a pu être augmentée par aucune retenue ; cette dernière colonne à droite se compose de 8 et de 4, dont la somme est effectivement 12 : la retenue de la colonne suivante est donc zéro, la somme 1986,42 est donc effectivement celle des nombres proposés. On reconnaît que 6852,653 est la différence exacte entre 6890,5 et 37,847 à ce qu'ajoutée au plus petit nombre 37,847 elle donne une somme 6890,500 équivalente au plus grand nombre 6890,5 (n°98). Passons aux preuves de la multiplication et de la division.

Multiplication.	Preuve.	Division.		Preuve.
2,7	4,09	110,43	4,09	4,09
4,09	2,7	81 8	27	27
243	2863	28 63		2863
10800	818	28 63		8180
11,043	11,043	Reste... 0		110,43

Pour obtenir le *produit* de 2,7 par 4,09 ; on a effectué la multiplication en faisant abstraction de la virgule, et l'on a ensuite séparé sur la droite du produit 11043, trois chiffres décimaux, à cause des trois décimales contenues dans les deux facteurs réunis, ce qui a donné le produit demandé 11,043. Pour faire la preuve on a changé l'ordre des facteurs, en multipliant 4,09 par 2,7, le résultat 11,043 de cette 2e opération étant égal à celui de la 1re, on en a conclu qu'elle avait été bien faite (page 100, n°99). Il eût sans doute paru plus naturel de diviser le produit par l'un de ses facteurs, pour trouver l'autre, ce qui eût également assuré de

l'exactitude du résultat; mais comme cette preuve dépend de la réduction d'une fraction ordinaire en décimales, dont on n'a pas encore parlé, nous avons dû la rejeter. Pour trouver le *quotient* de 110,43 par 4,09; comme le dividende et le diviseur contiennent le même nombre de chiffres décimaux, nous avons fait abstraction de la virgule, en divisant 11043 par 409 ; le résultat 27, a exprimé le quotient demandé. On a fait la preuve en multipliant le diviseur 4,09 par le quotient 27 ; le produit 110,43 étant égal au dividende, on en a conclu que la division avait été bien faite (page 100, n° 100).

176. S'il s'agissait d'opérer sur des nombres décimaux combinés avec des nombres entiers et avec des fractions ordinaires, le procédé le plus général, serait de tout convertir en fractions ordinaires. Voici quelques exemples de chaque espèce. Pour obtenir la somme ou le produit des nombres $5\frac{2}{7}$; $3\frac{4}{7}$; 6; 9,002; 0,054; on les mettra sous forme fractionnaire; ils deviendront alors $\frac{37}{7}$; $\frac{25}{7}$; $\frac{6}{1}$; $\frac{9002}{1000}$; $\frac{54}{1000}$. L'addition de ces fractions donnera $\frac{157302}{7000}$ pour la somme des nombres proposés ; et la multiplication des mêmes fractions, effectuée d'après la règle du n° 127, donnera $\frac{2697899400}{49000000}$ pour le produit des nombres proposés. S'il s'agit de retrancher $4\frac{6}{7}$ de 12,074 : on substituera d'abord à ces deux nombres les fractions ordinaires $\frac{34}{7}$, $\frac{12074}{1000}$, qui les expriment ; la 1ère fraction retranchée de la 2e, donnera le reste cherché $\frac{50518}{7000}$. S'il s'agissait, de multiplier ou de diviser, $4\frac{6}{7}$ par 12,074 : on opérerait sur les fractions équivalentes $\frac{34}{7}$ et $\frac{12074}{1000}$; la multiplication de ces deux fractions l'une par l'autre donnerait $\frac{410516}{7000}$ pour le produit demandé ; divisant ensuite $\frac{34}{7}$ par $\frac{12074}{1000}$, le résultat $\frac{34000}{84518}$ exprimerait le quotient cherché. Ces exemples suffisent pour faire apercevoir comment on doit opérer dans tous les cas semblables.

En général : *Pour soumettre au calcul des nombres décimaux combinés, avec des nombres entiers et avec des fractions ordinaires ; on convertira d'abord les nombres décimaux en fractions ordinaires, au moyen de la règle du n° 149 (page 158). On n'aura plus alors à opérer que sur des nombres entiers combinés avec des fractions ordinaires, ce qui s'exécutera d'après les mé-*

thodes abrégées indiquées dans les n°s 132, 133, 134, *et* 135. Si l'on applique cette règle aux nombres 0,007 ; $3\frac{2}{3}$; 4 ; $2\frac{3}{4}$; 4,5 ; on trouvera que leur somme est $\frac{1790840}{120000}$, et que leur produit est $\frac{152460}{120000}$, ou $1\frac{3246}{12000}$.

177. Ce qui précède confirme l'exactitude des observations du n° 144 ; on y reconnaît que le calcul des nombres décimaux est aussi simple et aussi direct que celui des nombres entiers ; ensorte que les opérations de l'arithmétique sur les fractions décimales, sont infiniment plus simples et plus directes que celles sur les fractions ordinaires ; cela tient, comme nous l'avons déjà dit, à ce que dans les premières l'unité est subdivisée d'une manière uniforme en parties de dix en dix fois plus petites, ce qui forme une suite non interrompue du système de numération des nombres entiers, tandis que dans les secondes, les subdivisions de l'unité ne sont assujéties à aucune loi constante. Il est donc de la plus grande importance de chercher à convertir les fractions ordinaires en fractions décimales, car alors le calcul des fractions ordinaires, ainsi réduites, n'offrira pas plus de difficultés que celui des nombres entiers, ce qui sera avantageux sous le double rapport de la théorie et de la pratique. Nous allons faire voir en conséquence comment on peut convertir une fraction ordinaire en fraction décimale ; nous verrons ensuite comment on peut revenir de la fraction décimale à la fraction ordinaire dont elle est le développement.

178. *La réduction d'une fraction ordinaire en décimales offre* TROIS CAS *que nous allons successivement examiner. Le* PREMIER CAS *est celui où le dénominateur de la fraction ordinaire proposée est l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros vers la droite ; la règle du n°* 148, *donne l'expression décimale de la fraction ordinaire proposée.* C'est ainsi que les fractions ordinaires,

$$\frac{36785}{1000};\quad \frac{345}{100};\quad \frac{236}{1000};\quad \frac{4564}{10000};\quad \frac{45}{100000};\quad \frac{7365}{1000000}$$

ont pour expressions décimales

36,785 ; 3,45 ; 0,236 ; 0,4564 ; 0,00045 ; 0,007365.

Le SECOND CAS *est celui où le dénominateur de la fraction*

2

qu'il s'agit de réduire en décimales n'étant pas l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, la division du numérateur par le dénominateur conduit encore à un quotient décimal exact. Pour en donner un exemple, proposons-nous de convertir la fraction $\frac{3}{8}$ en décimales. Toute fraction pouvant être considérée comme indiquant le quotient de son numérateur par son dénominateur, (n° 110 page 109) ; la question se réduit à diviser 3 par 8 ; le quotient exprimera la valeur de la fraction $\frac{3}{8}$. On disposera l'opération de la manière suivante.....

3	8
30.... dixièmes.	0,375.
60... centièmes.	
40.. millièmes.	
0.. dernier reste.	

Pour effectuer cette division ; on observera que se proposant d'obtenir au quotient des dixièmes, des centièmes, des millièmes, etc. on doit à cet effet convertir les dividendes partiels, en dixièmes, centièmes, millièmes, etc. ; car on a vu (page 76, n° 80) que *chaque chiffre du quotient est de la nature du dividende partiel qui l'a fourni.* Cela posé ; la division de 3 par 8 ne donnant pas d'unités au quotient, on mettra un zéro pour tenir leur place ; on convertira ensuite le dividende 3, en 30 dixièmes, et l'on aura alors 30 dixièmes à diviser par 8, ce qui donnera 3 dixièmes au quotient et 6 dixièmes de reste ; on écrira donc 3 au rang des dixièmes du résultat, et pour continuer la division, on convertira le reste 6 dixièmes en 60 centièmes ; la division de 60 centièmes par 8, donnera 7 centièmes au quotient et 4 centièmes de reste ; on écrira donc 7 au rang des centièmes du résultat ; enfin le reste 4 centièmes, converti en 40 millièmes, et divisé par le diviseur 8, donnera le quotient exact 5 millièmes avec le reste zéro : on écrira donc 5 au rang des millièmes du résultat. La division est alors terminée, et l'on a.... 0,375 pour la valeur exacte, du quotient de 3 par 8, ou de la fraction $\frac{3}{8}$. L'exactitude de ce résultat est facile à vérifier, car la fraction décimale 0,375 est équivalente à la fraction ordinaire $\frac{375}{1000}$ qui se réduit à $\frac{3}{8}$, en divisant ses deux termes 375 et 1000, par leur plus grand commun diviseur 125.

179. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer,

pouvant s'appliquer à tout autre exemple, nous établirons cette règle générale. *Pour réduire en décimales une fraction ordinaire, plus grande ou plus petite que l'unité, il faut diviser son numérateur par son dénominateur, en ayant soin, lorsqu'on a obtenu les unités du quotient, de mettre une* VIRGULE *sur leur droite, et de convertir les restes successifs en dixièmes, centièmes, millièmes, etc. Pour effectuer ces conversions, il suffit de placer un zéro sur la droite de chaque reste; les chiffres qu'on obtient à la suite des unités du quotient expriment les, dixièmes, centièmes, millièmes etc., du nombre décimal équivalent à la fraction proposée. On doit avoir grand soin de placer la* VIRGULE *sur la droite du chiffre du quotient qui exprime les unités entières, aussitôt qu'on aura trouvé ce chiffre; car, sans cette précaution, on risquerait de commettre de grandes erreurs, en confondant les unités entières avec les unités décimales.* Si l'on applique cette règle aux fractions ordinaires...

$\frac{7}{8}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{400}$, $\frac{117}{5}$, $\frac{9601}{200}$, $\frac{37}{64}$, $\frac{53}{625}$,

on trouvera qu'elles sont exprimées par les nombres décimaux

0,875; 0,85; 0,75; 0,0075; 23,4; 48,005; 0,578125; 0,0848.

Pour se convaincre de l'exactitude de ces résultats, il suffit d'observer que ces nombres décimaux sont équivalens aux fractions ordinaires

$\frac{875}{1000}$; $\frac{85}{100}$; $\frac{75}{100}$; $\frac{75}{10000}$; $\frac{234}{10}$; $\frac{48005}{1000}$; $\frac{578125}{1000000}$; $\frac{848}{10000}$;

qui se réduisent aux fractions proposées,

$\frac{7}{8}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{400}$, $\frac{117}{5}$, $\frac{9601}{200}$, $\frac{37}{64}$, $\frac{53}{625}$,

en divisant successivement les deux termes de chacune d'elles, par leurs plus grands communs diviseurs respectifs,

125; 5; 25; 25; 2; 5; 15625; 16.

180. *Le* TROISIEME CAS *est celui où le dénominateur de la fraction qu'il s'agit de réduire en décimales, n'étant pas l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, le quotient du numérateur par le dénominateur ne peut pas être exprimé exactement en décimales : la division se prolonge alors à l'infini, sans jamais conduire à un reste zéro.* Pour en donner un exemple; proposons-nous de convertir en décimales la fraction ordinaire $\frac{3}{11}$; d'après le procédé indiqué dans le n° 179, il faut diviser le

numérateur 3 par le dénominateur 11, en ayant soin de convertir les restes successifs en dixièmes, centièmes etc., au moyen d'un zéro abaissé sur la droite de chaque reste, ce qui s'exécute de la manière suivante :

1er dividende.....3 unités	11 diviseur.
2eme.............30 dixièmes	1er quotient partiel 0 unités.
3eme..............80 centièmes	2eme............. 2 dixièmes.
4eme..............30 millièmes.	3eme............. 7 centièmes.
5eme:..............80 dix-milliém.	4eme............. 2 millièmes.
etc. etc.	5eme............. 7 dix-millièmes
	etc. etc.
	quotient total..... 0,2727 etc.

Le dividende 3 ne contenant pas une fois le diviseur 11, on est certain que le quotient est plus petit que l'unité; on posera donc un zéro, qui tiendra la place des unités du quotient; pour obtenir ses chiffres décimaux, on convertira le dividende 3 unités, en 30 dixièmes; ce 2ème dividende partiel, divisé par le diviseur 11, donnera le 2ème quotient partiel 2 dixièmes avec le reste 8 dixièmes; ce reste, converti en 80 centièmes, et divisé par 11, donnera 7 centièmes au quotient et 3 centièmes de reste; la conversion du reste en millièmes, donnera 30 millièmes pour 4ème dividende partiel; la comparaison de ce 4ème dividende partiel avec le 2ème, offre une circonstance remarquable; elle montre que les chiffres 2 et 7 obtenus au quotient, doivent se reproduire à l'infini, et dans le même ordre; en effet, comme la position des chiffres du quotient assigne à leurs unités le rang qu'elles doivent occuper, nous pouvons abréger la démonstration, en ne considérant que le nombre des unités décimales, sans désigner leur espèce; nous dirons donc : le 2ème dividende partiel 30 a donné les chiffres 2 et 7 au quotient, avec le reste 3; le 4ème dividende partiel 30, donnera donc nécessairement les mêmes chiffres 2 et 7 au quotient, avec le même reste 3, et ainsi de suite à l'infini. Les restes alternatifs 3 et 8, se reproduisant continuellement, on ne pourra jamais parvenir à un reste zéro, et conséquemment, le quotient de 3 par 11, qui donne la valeur décimale de la fraction $\frac{3}{11}$, ne pourra jamais être exprimé exactement en décimales.

Il faut bien observer que *plus on mettra de chiffres décimaux au quotient, plus on approchera de la valeur exacte de la fraction* $\frac{3}{11}$; en effet, les restes alternatifs 8 et 3, diminuent très-rapidement de valeur, car ils représentent successivement, des dixièmes, centièmes, millièmes etc.; et comme il faut les diviser par le diviseur 11, pour avoir ce qui manque au quotient obtenu pour être exact, on pourra toujours prendre assez de chiffres décimaux au quotient pour que la valeur de la fraction décimale qui en résulte diffère d'aussi peu que l'on voudra de la fraction ordinaire $\frac{3}{11}$.

Si l'on applique les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer aux fractions ordinaires;

$$\frac{16}{33};\ \frac{12}{37};\ \frac{1}{1111};\ \frac{1}{7};\ \frac{23}{44};\ \frac{349}{10101};\ \frac{2450989}{9995000};\ \frac{4}{130};$$

on trouvera qu'elles sont exprimées par les fractions décimales...

0,48 48 etc.; 0,324 324 etc.; 0,0009 0009 etc.; 0,142857 142857 etc.; 0,52 27 27 etc.; 0,03 4554 4554 etc.; 0,245 1234 1234 etc.; 0,0 307692 etc.

181. Les fractions décimales de cette espèce, dans lesquelles un certain nombre de chiffres décimaux se reproduisent *périodiquement* dans le même ordre et à l'infini, ont reçu à cause de cette propriété le nom de *fractions décimales périodiques*; la partie du quotient qui se reproduit continuellement s'appelle la *période*. Pour plus de clarté, on a laissé des espaces entre les périodes; on aura toujours la même attention. D'après cela; l'expression 0,48 48 etc., est une *fraction décimale périodique*, dont la période est 48. De même 0009 est la période de la fraction décimale périodique 0,0009 0009 etc.; l'expression 0,245 1234 1234 etc., a 1234 pour période; et ainsi de suite. La période n'a quelquefois qu'un seul chiffre; cela arriverait si l'on réduisait en décimales les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{116}{9}$; on trouverait qu'elles sont exprimées par les fractions décimales 0,66666 etc.; 0,77777 etc; 12,888 etc.; dont les périodes respectives sont les nombres d'un seul chiffre, 6, 7, 8. Pour distinguer les fractions décimales périodiques, dont la période commence au premier chiffre décimal, de celles où la période ne commence pas au premier chiffre décimal; nous consacrerons le nom de *frac-*

tions décimales périodiques aux premières ; et comme les secondes ne sont qu'en partie périodiques, nous les nommerons, *fractions décimales périodiques* MIXTES. En vertu de ces conventions ; dans les expressions décimales du n° 180, pag. 199, toutes celles de la 1ère ligne sont des fractions décimales périodiques, tandis que celles de la 2e ligne sont des fractions décimales périodiques mixtes. Ainsi : 0,48 48 etc., est une *fraction décimale périodique*, 0,52 27 27 etc., est une *fraction décimale périodique mixte.*

182. Les trois cas que nous venons d'examiner, donnent le moyen de réduire les fractions ordinaires en décimales, d'une manière exacte ou approchée ; passons à la solution du problême inverse, qui consiste à *convertir une fraction décimale en fraction ordinaire.* La règle du n° 149 (page 158), donne le moyen de convertir un nombre décimal, plus grand ou plus petit que l'unité, en fraction ordinaire ; nous n'avons donc plus qu'à nous occuper, des fractions décimales périodiques et des fractions décimales périodiques mixtes. Afin de procéder selon l'ordre des difficultés, nous chercherons d'abord comment on peut remonter d'une fraction décimale périodique à la fraction ordinaire dont elle est le développement ; la valeur d'une fraction décimale périodique mixte en fraction ordinaire s'en déduira très-facilement.

183. Pour fixer les idées, nous nous proposerons d'abord de trouver la fraction ordinaire qui a engendré la fraction décimale périodique 0,27 27 27 etc., dont la période est 27. Si l'on réfléchit sur l'origine des fractions décimales périodiques, on verra qu'il s'agit ici de découvrir la relation qui doit exister entre les deux termes de la fraction ordinaire cherchée, pour que le quotient de son numérateur par son dénominateur, converti en décimales, engendre la fraction décimale périodique 0,27 27 etc. Cette relation est assez difficile à saisir ; on y parviendra cependant au moyen des considérations suivantes, qui méritent toute l'attention du lecteur.

184. Si l'on négligeait d'abord tout ce qui suit la première période de la proposée 0,27 27 etc. ; il resterait une fraction déci-

male 0,27, dont la valeur exacte serait la fraction ordinaire $\frac{27}{100}$; cela nous apprend que la division de 27 par 100 doit donner le quotient exact 0,27 avec le reste zéro ; 27 doit donc être composé, de 100 fois 27 centièmes, ou de 99 fois 27 centièmes plus 1 fois 27 centièmes. Cela démontre que....

27 doit être égal, au produit de 99 par 27 centièmes, plus 27 centièmes.

Mais on a vu (n° 137, pag. 139) que dans toute division,

le divid^e *est égal au produit du* divisr. *par les* unités du quot. *plus le* reste. (*)

Comparant les termes correspondans de ces deux expressions de même forme, on reconnaîtra facilement que si l'on considère, 27 comme *dividende* et 99 comme *diviseur*, les *unités du quotient* seront 27 centièmes et le *reste* 27 centièmes, car en faisant la preuve de cette division, le dividende 27 sera effectivement égal au produit du diviseur 99 par les unités du quotient, qui sont 27 centièmes, plus le reste 27 centièmes. Cette observation lève la difficulté, en effet; si pour abréger le discours on fait abstraction de l'espèce d'unité que chaque nombre représente, on verra que la division de 27 par 99 doit donner au quotient les chiffres décimaux 2 et 7 avec un reste 27 égal au dividende primitif 27 ; conséquemment, si pour continuer la division on divisait le reste 27 par le même diviseur 99, on devrait nécessairement retrouver au quotient les mêmes chiffres *décimaux* 2 et 7 avec le même reste 27, et ainsi de suite à l'infini, sans que le quotient pût jamais se terminer; le quotient décimal de 27 par 99, doit donc avoir donné naissance à la fraction décimale périodique proposée 0,27 27 etc., qui doit conséquemment être exprimée par la fraction ordinaire $\frac{27}{99}$. Le calcul vient ici à l'appui du raisonnement, car la division de 27 par 99, effectuée d'après la règle du n° 179 (page 197), donne pour quotient la fraction décimale périodique 0,27 27 etc. La comparaison des deux expressions équivalentes 0,27 27 etc, et $\frac{27}{99}$, laisse apercevoir une re-

(*) Les unités décimales étant soumises à la même loi que les unités entières, *on peut comprendre sous la dénomination générique d'*UNITÉS, *les unités de dix en dix fois, plus grandes ou plus petites que l'unité simple, c'est-à-dire, les dixaines, les centaines, les mille etc., les dixièmes, les centièmes, les millièmes etc.*

lation remarquable entre la fraction décimale périodique 0,27 27 etc., et sa valeur $\frac{27}{99}$; elle est telle que *la fraction décimale périodique* 0,27 27 *etc.*, *est exprimée par une fraction ordinaire* $\frac{27}{99}$, *dont le numérateur est la période* 27 *et dont le dénominateur est un nombre* 99, *composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période* 27.

Si l'on médite sur les raisonnemens qui nous ont conduits à déduire $\frac{27}{99}$ de 0,27 27 etc., on reconnaîtra qu'ils sont indépendans des nombres particuliers que nous n'avons considérés que pour mieux fixer les idées, et que parconséquent la propriété que nous venons de reconnaître, sur un exemple particulier, subsiste pour toutes les fractions périodiques. On peut d'ailleurs s'en convaincre, en appliquant les mêmes raisonnemens à la recherche de la fraction ordinaire, qui exprime la fraction décimale périodique 0,378 378 etc. Si, sans changer les raisonnemens précédens, on substitue à la période 27, de la fraction décimale périodique 0,27 27 etc., la période 378, de notre fraction décimale périodique 0,378 378 etc. ; au lieu de trouver $\frac{27}{99}$, on trouvera $\frac{378}{999}$. En effet, les raisonnemens du n° 184 prennent alors la forme suivante......

185. Si l'on négligeait d'abord tout ce qui suit la première période de la proposée 0,378 378 etc. ; il resterait une fraction décimale 0,378 dont la valeur exacte serait la fraction ordinaire $\frac{378}{1000}$; cela nous apprend que la division de 378 par 1000, doit donner le quotient exact 0,378 avec le reste zéro ; 378 doit donc être composé, de 1000 fois 378 millièmes, ou de 999 fois 378 millièmes plus une fois 378 millièmes. Cela démontre que...

378 *doit être égal au produit de* 999 *par* 378 *millièmes plus* 378 *millièmes*.

Mais on a vu (n° 137) que dans toute division

le divid^{e} *est égal au produit du* divis^{r} *par les* unités du quot. *plus le* reste.

Comparant les termes correspondans de ces deux expressions de même forme, on reconnaîtra facilement que si l'on considère 378 comme *dividende* et 999 comme *diviseur*, les *unités du quotient* seront 378 millièmes et le *reste* 378 millièmes ; car en faisant la preuve de cette division, le dividende 378 sera effective-

ment égal au produit du diviseur 999 par les unités du quotient, qui sont 378 millièmes, plus le reste 378 millièmes. Cette observation lève la difficulté, en effet; si pour abréger on fait abstraction de l'espèce d'unités que chaque nombre représente, on verra que la division de 378 par 999 doit donner au quotient les chiffres décimaux 3, 7, 8, avec un reste 378 égal au dividende primitif 378; conséquemment, si pour continuer la division on divisait le reste 378 par le même diviseur 999; on devrait nécessairement retrouver au quotient, les mêmes chiffres décimaux 3, 7, 8, avec le même reste 378, et ainsi de suite à l'infini, sans que le quotient pût jamais se terminer; le quotient décimal, de 378 par 999, doit donc avoir donné naissance à la fraction décimale périodique proposée 0,378 378 etc., qui doit conséquemment être exprimée par la fraction ordinaire $\frac{378}{999}$. Le calcul vient ici à l'appui du raisonnement, car la division de 378 par 999, donne pour quotient la fraction décimale périodique 0,378 378 etc. La comparaison des deux expressions équivalentes 0,378 378 etc., et $\frac{378}{999}$, laisse apercevoir une relation remarquable entre la fraction décimale périodique 0,378 378 etc., et sa valeur $\frac{378}{999}$; elle est telle, que *la fraction décimale périodique* 0,378 378 *etc., est exprimée par une fraction ordinaire* $\frac{378}{999}$, *dont le numérateur est la période* 378 *et dont le dénominateur* 999 *est un nombre composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période* 378.

Si l'on compare les raisonnemens précédens avec ceux du n° 184, on reconnaîtra leur *identité*, car les nombres seuls sont différens. Puisque la substitution d'autres nombres n'a pas changé les raisonnemens qui ont servi à déduire d'une fraction décimale périodique, sa valeur en fraction ordinaire, on est certain que la forme du résultat est indépendante des nombres particuliers que l'on a considérés, ensorte que la relation observée, dans les n°s 184 et 185, entre les fractions décimales périodiques 0,27 27 etc., 0,378 378 etc., et leurs valeurs $\frac{27}{99}$, $\frac{378}{999}$, doit subsister pour toutes les fractions décimales périodiques; ce qui nous fournit cette règle générale.....

186. *Toute fraction décimale* PÉRIODIQUE, *plus petite que*

l'unité, dont la période commence au premier chiffre décimal; est exprimée par une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période. En appliquant cette règle aux fractions décimales périodiques.

0,666 etc; 0,777 etc; 0,4848 etc; 0,324324 etc; 0,00090009 etc; 0,142857 142857 etc; 0,307692 307692 etc.; 0,040500405 040500405 etc.; 0,001002003 001002003 etc.; dont les périodes respectives sont . . . . . .

6; 7; 48; 324; 0009; 142857; 307692; 040500405; 001002003.

On trouvera qu'elles sont exprimées par les fractions ordinaires. . . . .

$\frac{6}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{48}{99}$; $\frac{324}{999}$; $\frac{0009}{9999}$; $\frac{142857}{999999}$; $\frac{307692}{999999}$; $\frac{040500405}{999999999}$; $\frac{001002003}{999999999}$,

qui se réduisent à . . . .

$\frac{2}{3}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{16}{33}$; $\frac{12}{37}$; $\frac{1}{1111}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{4}{13}$; $\frac{500005}{12345679}$; $\frac{334001}{333333333}$.

187. *Si la fraction décimale* PÉRIODIQUE *proposée était plus grande que l'unité, on ajouterait à ses unités entières la fraction irréductible équivalente à la fraction ordinaire qui exprime sa partie décimale* PÉRIODIQUE. *Le résultat serait le nombre fractionnaire équivalent à la fraction proposée (ce nombre fractionnaire serait réduit à sa plus simple expression).* D'après cette règle; la fraction décimale périodique 3,27 27 etc., composée de 3 unités et de 0,27 27 etc., qui équivaut à $\frac{27}{99}$ (n°. 186), ou à $\frac{3}{11}$, a pour valeur 3 plus $\frac{3}{11}$, ou $\frac{36}{11}$; la division de 36 par 11 donne effectivement pour quotient 3,27 27 etc. Par la même raison; 15,36 36 etc., a pour valeur 15 plus 0,36 36 etc., ou 15 plus $\frac{36}{99}$, ou 15 plus $\frac{4}{11}$, ou enfin $\frac{169}{11}$; la fraction décimale périodique 17,17 17 etc., dont la période est 17, se compose, de 17 unités plus 0,17 17 etc., ou de 17 plus $\frac{17}{99}$, ou de $\frac{1700}{99}$; ce résultat pouvait s'obtenir plus directement, car 0,17 17 17 etc., valant $\frac{17}{99}$, la quantité 17,17 17 etc., cent fois plus grande que 0,17 17 17 etc. doit valoir 100 fois $\frac{17}{99}$, ou $\frac{1700}{99}$.

188. La *conversion d'une fraction décimale périodique* MIXTE *en fraction ordinaire* se déduit aisément de ce qui précède; il suffit de transporter la *virgule* sur la droite de la 1re période;

Ainsi, pour exprimer en fraction ordinaire la fraction décimale périodique mixte 0,341 27 27 etc., dont la période 27 ne commence qu'après les trois premiers chiffres décimaux 3, 4, 1 ; on avancera la virgule de trois rangs vers la droite, c'est-à-dire sur la gauche de la 1ère période, ce qui multipliera la valeur de la proposée par 1000 (n° 168, 1°; page 182); le résultat 341,27 27 etc. composé du nombre entier 341 et de la fraction périodique 0,27 27 etc., dont la valeur est $\frac{27}{99}$ ou $\frac{3}{11}$, vaut 341 unités plus $\frac{3}{11}$, c'est-à-dire $\frac{3754}{11}$; ce nombre fractionnaire exprimant le nombre décimal 341,2727 etc., mille fois plus grand que la proposée 0,341 27 27 etc., on doit en conclure que cette proposée a pour valeur, la millième partie de $\frac{3754}{11}$, qui est $\frac{3754}{11000}$. La division de 3754 par 11000, donne effectivement pour quotient la fraction décimale périodique mixte 0,34127 27 etc. Si la fraction décimale périodique mixte était 9,9 81 81 81 etc.; comme la période 81 ne commence qu'après le premier chiffre décimal 9, on avancerait la virgule d'un rang vers la droite, c'est-à-dire sur la gauche de la 1ère période, ce qui multiplie la valeur de la proposée par dix (n° 168); le résultat 99,8 181 etc composé du nombre entier 99 et de la fraction périodique 0,81 81 etc., dont la valeur est $\frac{81}{99}$, ou $\frac{9}{11}$, vaut 99 unités plus $\frac{9}{11}$, c'est-à-dire $\frac{1098}{11}$; mais ce nombre fractionnaire, exprime le nombre décimal 99,81 81 etc., dix fois plus grand que la proposée 9,9 81 81 etc.; celle-ci a donc pour valeur la dixième partie de $\frac{1098}{11}$, qui est $\frac{1098}{110}$; la division de 1098 par 110 donne effectivement au quotient la fraction décimale périodique mixte proposée 9,9 81 81 etc.

L'examen attentif du calcul effectué dans les deux exemples précédens, pour convertir une fraction décimale périodique mixte en fraction ordinaire, conduit à une règle fort simple. En effet; dans le 1er exemple, pour remonter de la fraction décimale périodique mixte 0,341 27 27 etc., à la fraction ordinaire $\frac{3754}{11000}$ dont elle est le développement décimal; au nombre 341, qui est la partie non périodique considérée comme un entier, on a ajouté la fraction irréductible $\frac{3}{11}$, équivalente à la fraction $\frac{27}{99}$, dont le numérateur 27 est la période, et dont le dénomina-

teur 99 est un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période 27; sur la droite du dénominateur 11, de la somme $\frac{3754}{11}$, on a mis 3 zéros, c'est-à-dire autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux entre la *virgule* et la 1ere période 27; le résultat $\frac{3754}{11000}$ a exprimé la proposée 0,341 27 27 etc. On a opéré d'une manière absolument semblable dans le 2e exemple, où il s'agissait de revenir de la fraction décimale périodique mixte 9,9 81 81 etc., à la fraction ordinaire $\frac{1098}{110}$ qui l'exprime; car à 99, qui est la partie non périodique considérée comme un nombre entier, on a ajouté la fraction irréductible $\frac{9}{11}$, équivalente à la fraction $\frac{81}{99}$, dont le numérateur 81 est la période, et dont le dénominateur 99 est un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période 81; sur la droite du dénominateur 11 de la somme $\frac{1098}{11}$, on a mis un zéro, parce qu'il n'y avait qu'un chiffre décimal entre la virgule et la 1ere *période* 81; le résultat $\frac{1008}{110}$, a exprimé la proposée 9,9 81 81 etc. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer, pouvant s'adapter à toutes les fractions décimales périodiques mixtes, nous en conclurons cette règle générale.

189. *Pour convertir en fraction ordinaire, une fraction décimale périodique* MIXTE, *plus grande ou plus petite que l'unité, dont la période ne commence pas au premier chiffre décimal; à la partie non périodique, considérée comme un nombre entier, ajoutez la fraction irréductible équivalente à la fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période; sur la droite du dénominateur de la somme, mettez autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux entre la virgule et la 1ere période; le résultat sera la fraction ordinaire équivalente à la fraction décimale périodique mixte proposée.* Ainsi, par exemple; pour convertir en fraction ordinaire la fraction décimale périodique mixte..... 36,785 2409 2409 etc., dont la 1ere période 2409, est précédée de la partie non périodique 36,785; à 36 785, qui est la partie non périodique considérée comme un nombre entier, on ajoutera la fraction irréductible $\frac{73}{303}$, équivalente à la fraction $\frac{2409}{9999}$, qui a pour numérateur la

période 2409 et pour dénominateur un nombre 9999 composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période ; la somme sera le nombre fractionnaire $\frac{11\,145\,928}{303}$; mettant sur la droite de son dénominateur 303, les trois zéros déterminés par les trois chiffres décimaux 7, 8, 5, compris entre la virgule et la 1[ère] période 2409 de la proposée 36,785 2409 2409 etc., le résultat $\frac{11\,145\,928}{303\,000}$, sera la fraction ordinaire équivalente à cette proposée. La division de 11 145 928 par 303000, effectuée d'après la règle du n° 179 (page 197), reproduit effectivement la fraction décimale périodique mixte 36,785 2409 2409 etc. Pour convertir en fraction ordinaire, la fraction décimale périodique mixte 3,15 7777 etc., dont la période 7 est précédée de la partie non périodique 3,15 ; à 315, qui est la partie non périodique considérée comme un nombre entier, on ajoutera la fraction $\frac{7}{9}$, dont le numérateur est la période 7 et le dénominateur le nombre 9 composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période 7 ; la somme, composée de 315 unités et de $\frac{7}{9}$, sera le nombre fractionnaire $\frac{2842}{9}$; mettant deux zéros sur la droite du dénominateur 9, à cause des deux chiffres décimaux 1 et 5 placés entre la virgule et la première période 7, on aura $\frac{2842}{900}$ pour l'expression fractionnaire de la quantité 3,15 777 etc.

Cette règle s'applique également aux fractions décimales périodiques mixtes dont la partie non périodique n'est composée que de zéros. S'il s'agissait, par exemple, de la fraction décimale périodique mixte 0,0000 17 17 etc. ; comme la 1[ère] période 17, n'est précédée d'aucuns chiffres significatifs, la partie non périodique, considérée comme un nombre entier, serait 00000, ou zéro, et conséquemment en appliquant la règle du n° 189 ; à zéro, qui est la partie non périodique considérée comme un nombre entier, on ajouterait la fraction irréductible $\frac{17}{99}$, dont le numérateur 17 est la période, et dont le dénominateur 99 est un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période ; sur la droite du dénominateur 99, de la somme $\frac{17}{99}$, on mettrait les quatre zéros placés entre la virgule et la 1[ère] période de la proposée, le résultat $\frac{17}{990000}$, serait la fraction ordinaire équivalente à la proposée 0,0000 17 17 etc. La division du numérateur 17

par le dénominateur 990000, reproduit effectivement la proposée 0,0000 17 17 etc. Voici un raisonnement, indépendant de la règle du n° 189, qui conduit plus directement au même résultat; lorsqu'on avance la virgule de quatre rangs vers la droite de la proposée 0,0000 17 17 etc., on multiplie sa valeur par 10000 (n° 168, 1°.; page 182); le résultat est la fraction périodique 0,17 17 etc., équivalente à la fraction ordinaire $\frac{17}{99}$; la proposée, qui est 10000 fois plus petite, a donc pour valeur la dix-millième partie de $\frac{17}{99}$, qui est $\frac{17}{990000}$. On voit que la fraction décimale périodique mixte... 0,0000 17 17 etc., dont la 1ère période n'est précédée d'aucuns chiffres significatifs, a pour valeur la fraction ordinaire... $\frac{17}{990000}$, dont le numérateur est la période 17 et dont le dénominateur 990000 s'obtient, en écrivant d'abord un nombre 99, composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période 17, et mettant ensuite sur sa droite les quatre zéros compris entre la virgule et la 1ère période. Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à toutes les fractions périodiques mixtes dont la partie non périodique est nulle, nous en déduirons cette règle abrégée.

190. *Pour convertir en fraction ordinaire, une fraction décimale périodique* MIXTE, *dont la partie non périodique ne contient aucuns chiffres significatifs; il suffit de prendre la fraction ordinaire dont le numérateur est la période, et dont le dénominateur s'obtient en mettant sur la droite d'un nombre, composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, les zéros compris entre la virgule et la 1ère période.* D'après cette règle; la fraction décimale périodique mixte 0,00 113 113 etc., dont la 1ère période 113 n'est précédée d'aucuns chiffres significatifs, a pour valeur la fraction ordinaire $\frac{113}{99900}$, dont le numérateur 113 est la période et dont le dénominateur 99900 s'obtient en écrivant sur la droite du nombre 999, composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, les deux zéros compris entre la virgule et la 1ère période. Si l'on applique les règles des n°s 189 et 190 aux fractions décimales périodiques mixtes 10,30 110 110 etc.; 12,245 990 990 etc.; 0,0010 36 36 etc.; 0,02 142857 142857 etc.; 0,039 772 772 etc.; 0,00 990 990 etc.

On

on trouvera qu'elles sont exprimées par les fractions irréductibles

$\frac{11454}{4995}$; $\frac{271851}{2200}$; $\frac{57}{1100}$; $\frac{15873}{740740}$; $\frac{39733}{999000}$; $\frac{1}{110}$;

191. *Les fractions décimales périodiques, étant composées d'une infinité de chiffres décimaux, compliquent les opérations, et conduisent souvent à des résultats peu exacts. On doit en conséquence effectuer les calculs sur les fractions irréductibles équivalentes aux fractions décimales périodiques proposées; le résultat converti en décimales est celui demandé. Lorsqu'il s'agit de l'addition ou de la soustraction, il est plus simple d'opérer sur les nombres donnés; mais dans la multiplication, comme dans la division, il est indispensable d'effectuer la conversion des fractions décimales periodiques en fractions ordinaires.* Si l'on proposait, par exemple, de déterminer la somme des fractions décimales périodiques

0,285714 285714 etc.; 0,2142857 2142857 etc;

on leur substituerait les fractions irréductibles équivalentes, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{14}$; la somme $\frac{1}{2}$, de ces fractions, convertie en décimales, donne 0,5 pour la valeur exacte du résultat cherché; on eût été conduit au même résultat, en opérant directement sur les fractions décimales proposées, car leur somme 0,4999 etc., convertie en fraction ordinaire, d'après la règle du n° 189, est $\frac{5}{10}$, ou 0,5. Pour trouver la différence entre les fractions décimales 0,806 81 81 etc. et 0,18 18 etc., dont les périodes respectives sont 81 et 18; on substituera aux proposées les fractions irréductibles $\frac{71}{88}$ et $\frac{2}{11}$, qui les expriment, leur différence $\frac{55}{88}$, ou $\frac{5}{8}$, convertie en décimales, donnera 0,625 pour le reste cherché; ce reste est exact; car ajouté au plus petit nombre 0, 18 18 18 etc. il donne le plus grand. On est conduit plus directement au même résultat, en opérant directement sur les nombres donnés. S'il s'agissait de multiplier 1,571428 571428 etc., par 0,39 772 772 etc.; on substituerait d'abord à ces facteurs les fractions irréductibles, $\frac{11}{7}$ et $\frac{35}{88}$, qui les expriment; le produit $\frac{385}{616}$ de ces dernières, converti en décimales, donnerait 0,625 pour le produit demandé. Si l'on eût effectué la multiplication des facteurs proposés, en ne conservant que six décimales dans chacun, ce

qui eût conduit à multiplier 1,571428 par 0,397727 ; on eût trouvé 0,624999354156 ; ce produit est plus faible que le véritable 0,625 ; cela devait nécessairement arriver, car on a négligé dans chaque facteur les chiffres décimaux qui suivaient le sixième. La division est sujette aux mêmes inconvéniens, lorsqu'on veut opérer directement sur les fractions périodiques proposées ; parceque le nombre des chiffres décimaux du dividende et du diviseur étant infini, on est obligé de négliger une portion du dividende et du diviseur, ce qui doit nécessairement conduire à un quotient inexact. Le calcul confirme la vérité de ces observations ; si on effectuait la division de 0,39 772 772 etc., par 0,63 63 63 etc. ; en conservant six décimales dans le dividende et le diviseur, ce qui conduirait à diviser 0,397727 par 0,636363 ; le quotient 0,625000196428 etc. serait inexact, car en substituant au dividende et au diviseur les fractions équivalentes $\frac{35}{88}$ et $\frac{7}{11}$, on reconnaît que le quotient demandé a pour valeur exacte, celui de $\frac{35}{88}$ par $\frac{7}{11}$, qui est $\frac{385}{616}$, ou $\frac{5}{8}$, ou enfin 0,625 ; le quotient 0,625000196428 etc. est donc trop grand. Ces exemples suffisent pour convaincre de l'utilité de la règle que nous avons donnée au commencement de cet article, elle prévient toutes les erreurs.

192. Si l'on applique la règle du n° 186 à la fraction décimale périodique 0,999 etc., dont la période est 9 ; on trouvera que sa valeur est $\frac{9}{9}$, ou 1 ; ce résultat doit paraître singulier, car on n'aperçoit pas comment l'unité a pu donner naissance au quotient périodique 0,999 etc. L'unité ne pouvant pas conduire à une division, nous lui restituerons sa forme primitive $\frac{9}{9}$, qui semble plus propre à engendrer un quotient ; si l'on effectuait la division comme à l'ordinaire, on retomberait sur l'unité, et non sur 0,999 etc. ; pour donner naissance au quotient périodique, nous modifierons la règle du n° 179, en ayant soin de mettre à chaque division partielle un quotient trop faible d'une unité. Voici le détail du calcul ainsi effectué...

9 unités, ou 90 dixièmes................	9
81 dixièmes................	
9 dixièmes, ou 90 centièmes	0,99999 etc.
etc. etc.	

Pour convertir la fraction $\frac{9}{9}$ en décimales, on a dit : le quotient 1, de 9 par 9, diminué d'un, donne 0, que l'on a écrit au rang des unités du résultat ; retranchant 9 fois 0, ou 0, de 9 ; il est resté 9, ou 90 dixièmes ; le quotient 10 dixièmes, de 90 dixièmes par 9, diminué d'un, a donné 9 dixièmes ; on a écrit 9 au rang des dixièmes du résultat ; retranchant 9 fois 9 dixièmes, ou 81 dixièmes, de 90 dixièmes, le reste 9 dixièmes, converti en centièmes, a donné le nouveau dividende partiel 90 centièmes ; cette manière d'opérer, continuée indéfiniment, engendrerait évidemment le quotient périodique 0,999 etc. On voit donc, que la fraction décimale périodique 0,9999 etc., dont la valeur exacte est l'unité, ne tire pas son origine d'une division ordinaire ; elle résulte d'une division mal effectuée, dans laquelle on a mis à chaque division partielle un quotient trop faible d'une unité. L'expression 0,999 etc. ayant pour valeur exacte l'unité ; si l'on divise 0,999 etc. par 10, par 100 etc., les quotiens, 0,0999 etc., 0,00999 etc., auront pour valeurs : $\frac{1}{10}$, ou 0,1 : $\frac{1}{100}$, ou 0,01 : etc. ; la règle du n° 190, confirme l'exactitude de ces résultats, elle donne $\frac{9}{90}$, ou $\frac{1}{10}$, ou 0,1, pour la valeur de 0,0999 etc. : $\frac{9}{900}$ ou $\frac{1}{100}$ ou 1,01 pour la valeur de 0,00999 etc. D'après cela : 2,5 999 etc., composé de 2,5 et de 0,099 etc., qui vaut 0,1, a pour valeur 2,5 plus 0,1, ou 2,6 ; de même, 23,17 999 etc. vaut 23,17 plus 0,0099 etc., ou 23,17 plus 0,01, ou 23,18 ; la règle du n° 189 conduirait aux mêmes résultats. Des décompositions analogues aux précédentes, ou l'application immédiate de la règle du n° 189, montreront que les fractions décimales périodiques mixtes

12,5 999999 etc. ; 279,34 99999 etc. ; 0,000 9999 etc.

ont pour valeurs exactes,

$\frac{126}{10}$ ou 12,6 ; $\frac{27935}{100}$ ou 279,35 ; $\frac{1}{1000}$ ou 0,001.

193. Si l'on compare chaque fraction décimale périodique mixte, avec sa valeur, en fraction ordinaire et en nombre décimal, on en déduira ces deux règles générales. 1°. *Toute fraction décimale périodique mixte, dont la période est 9, est équivalente à une fraction ordinaire, dont le numérateur est la partie*

2

non périodique, considérée comme exprimant des unités simples, et augmentée d'un, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéros vers la droite, qu'il y a de chiffres décimaux dans la partie non périodique ; 2°. *Tout nombre décimal dont la partie périodique est composée d'une infinité de 9, a pour valeur exacte le nombre décimal qu'on obtient en supprimant tous ces 9 et augmentant d'un le dernier chiffre décimal conservé.* D'après la 1re règle, la fraction décimale périodique mixte 97,895 999 etc., dont la période est 9, a pour valeur la fraction ordinaire $\frac{97896}{1000}$, dont le numérateur 97 896 est la partie non périodique 97,895 considérée comme exprimant des unités simples et augmentée d'un, et dont le dénominateur 1000 est l'unité suivie des 3 zéros déterminés par les 3 chiffres décimaux de la partie non périodique 97,895 ; d'après la 2e règle, le nombre décimal 97,895 999 etc., dont la période est 9, a pour valeur exacte le nombre décimal 97,896, que l'on obtient en supprimant la série de 9, et augmentant d'un le chiffre 5 qui est le dernier chiffre décimal conservé. La 2e règle est la plus utile dans la pratique ; elle nous apprend que les nombres décimaux ; 8,700999 etc. ; 17,008090999 etc. ; ont pour valeurs exactes 8,701 ; 17,008091.

194. *Lorsqu'un nombre n'est pas composé d'une infinité de décimales, ou lorsqu'étant périodique la période n'est pas 9, il est impossible de l'exprimer exactement avec un plus petit nombre de chiffres décimaux ;* mais dans beaucoup de circonstances, on se contente d'approcher de sa valeur à un dixième près, à un centième près, etc. On peut faire alors usage de la méthode suivante, qui n'est qu'une simple conséquence de la 2e règle du n° 193. *Pour obtenir la valeur d'un nombre, à moins d'une unité décimale de tel ordre déterminé qu'on voudra ; il suffit de supprimer les chiffres qui expriment des unités inférieures à l'ordre déterminé. Le résultat est un peu trop petit, mais si on l'augmentait d'une unité décimale de l'ordre déterminé, il deviendrait trop grand ; ensorte que l'erreur commise, par la suppression des décimales inférieures à l'ordre déterminé, est toujours plus petite qu'une unité de ce dernier ordre.* (*On suppose*

que la partie supprimée n'est pas composée d'une infinité de 9). En effet ; si la partie supprimée était composée d'une infinité de 9, elle vaudrait une unité du dernier ordre conservé ; mais par hypothèse elle contient des chiffres moindres que 9, elle a donc une valeur moindre qu'une unité du dernier ordre conservé. Ainsi ; *pour approcher de la valeur d'un nombre décimal, à un dixième d'unité près, ou à un centième, ou à un millième, etc.; il suffit de conserver, une décimale, ou 2 décimales, ou 3 décimales, etc.* Par exemple ; la valeur du nombre 3,754348, à un centième d'unité près, est 3,75 ; en effet, la partie supprimée 0,004348 est évidemment plus petite que la fraction décimale périodique mixte 0,009999 etc. dont la valeur exacte est 0,01, ou un centième ; on reconnaîtra de la même manière que les valeurs approchées du nombre 24,48076999, à un dixième ou à un centième d'unité près, sont 24,4 ou 24,48. S'il s'agissait de la fraction décimale périodique mixte 2,356 9999 etc., dont la période est 9 ; sa valeur exacte étant 2,357, ses valeurs approchées, à un dixième ou à un centième d'unité près, sont 2,3 ou 2,35. En général : *la totalité des chiffres supprimés sur la droite d'un nombre ne peut jamais valoir plus d'une unité du dernier chiffre conservé*, car lors même que la partie supprimée se compose d'une infinité de 9, elle ne vaut qu'une unité du dernier ordre conservé.

195. Quand les valeurs approchées sont assujéties à être moindres que la valeur exacte, la règle du n° 194 donne la plus grande approximation possible. Mais comme on se propose ordinairement d'approcher le plus possible de la valeur exacte, sans s'assujétir à rester au-dessous de cette valeur, on doit alors faire usage de la règle suivante. *Pour approcher le plus possible de la valeur exacte d'un nombre, en supprimant plusieurs chiffres décimaux sur sa droite ; il faut distinguer trois cas ; 1°. si le 1er chiffre décimal à supprimer est moindre que 5, on doit le supprimer avec ceux qui le suivent, en conservant les chiffres placés sur sa gauche ; 2°. si le 1er chiffre décimal à supprimer est plus grand que 5, ou si étant égal à 5, il est suivi d'autres chiffres significatifs, on doit augmenter d'un le dernier chiffre*

décimal conservé; 3°. si le 1er chiffre décimal à supprimer, étant égal à 5, n'est suivi d'aucuns chiffres significatifs, il est indifférent de laisser le dernier chiffre décimal à conserver tel qu'il est, ou de l'augmenter d'un. Dans le 1er cas, où le 1er chiffre supprimé est moindre que 5, la valeur approchée est plus petite que la valeur exacte, mais la partie négligée ne peut excéder une demi-unité du dernier ordre décimal conservé; dans le 2ème cas, la valeur approchée surpasse la valeur exacte, mais l'erreur commise est moindre qu'une demi-unité du dernier ordre conservé; enfin, dans le 3ème cas, l'erreur commise, en plus ou en moins, est égale à une demi-unité décimale du dernier ordre conservé. L'erreur commise en plus ou en moins, ne peut donc jamais excéder une demi-unité décimale du dernier ordre conservé. Ainsi; suivant qu'on s'arrête aux dixièmes, ou aux centièmes, ou aux millièmes, etc., on approche de la valeur exacte, à un demi-dixième, à un demi-centième, à un demi-millième, etc. d'unité, c'est-à-dire, à un vingtième, ou à un deux-centième, ou à un deux-millième, etc., d'unité. Cette méthode n'est encore qu'une simple conséquence de la 2ème règle du n° 193; en effet : comme une unité d'un ordre quelconque en vaut dix de l'ordre immédiatement inférieur, une demi-unité du dernier ordre conservé vaut toujours 5 unités du 1er ordre supprimé ; il suffit donc de prouver que l'erreur commise, en plus ou en moins, n'excède jamais 5 unités du 1er ordre supprimé ; cela est évident ; car, 1°. si le 1er chiffre supprimé est moindre que 5, il est tout au plus égal à 4 : mais les chiffres qui le suivent ne peuvent jamais valoir plus d'une de ses unités : la partie supprimée ne peut donc pas excéder 5 unités du 1er ordre supprimé, ou une demi-unité du dernier ordre conservé; 2°. si la 1ère décimale supprimée excède 5, ou si étant égale à 5, elle est suivie d'autres décimales, la partie supprimée vaut plus que 5 unités du 1er ordre supprimé, il faudrait donc lui ajouter moins que 5 de ces unités, pour qu'elle valût dix unités du 1er ordre supprimé, ou une unité du dernier ordre conservé, ce qui augmenterait d'un la dernière décimale conservée : l'erreur commise en augmentant d'un la dernière

décimale conservée est donc effectivement moindre, que 5 unités du 1er ordre supprimé, ou qu'une demi-unité du dernier ordre conservé; 3°. si la partie supprimée est un 5, il suffirait de lui ajouter 5, pour qu'elle valût une unité du dernier chiffre conservé; il est donc indifférent de laisser ce dernier chiffre tel qu'il est, ou de l'augmenter d'un; car dans le 1er cas on néglige 5 unités de l'ordre supprimé, et dans le 2ème, on prend de trop 5 unités du même ordre. Les raisonnemens précédens démontrant l'exactitude des diverses parties de la règle énoncée au commencement de cet article, appliquons-la à quelques exemples. S'il s'agit, par exemple, d'approcher le plus possible de la valeur exacte du nombre 3,42759, en conservant, une décimale, ou 2 décimales, ou 3 décimales; on écrira, d'après la règle, 3,4, ou 3,43, ou 3,428; il est aisé de s'assurer que l'erreur commise est moindre qu'une demi-unité décimale du dernier ordre conservé; en effet: *dans le 1er cas*, où l'on s'arrête aux *dixièmes*, la partie supprimée 0,02759 est moindre que la fraction décimale périodique mixte 0,04999 etc., dont la valeur exacte est 0,05, ou $\frac{5}{100}$, ou $\frac{1}{20}$, ou un *demi-dixième : dans le 2ème cas*, où l'on a écrit 3,43 au lieu de 3,42759; l'erreur commise est moindre qu'un demi-centième, ou que 5 millièmes, ou que 0,005; car la valeur exacte 3,42759, augmentée de 0,005 devenant 3,43259; si l'on écrivait 3,43259, on prendrait de trop 0,005; mais on n'écrit que 3,43, on ne prend donc pas 5 millièmes de trop, l'erreur commise est donc moindre que 5 millièmes, ou qu'une demi-unité décimale du dernier ordre conservé; l'erreur serait plus forte si l'on écrivait 3,42 au lieu de 3,42759; car la partie négligée 0,00759 serait plus grande que 0,005, ou que 5 millièmes, ou qu'un demi-centième; on voit donc, qu'ayant la valeur exacte 3,42759, l'erreur commise en écrivant 3,43 est moindre que celle que l'on commettrait en écrivant 3,42; c'est par cette raison que la règle prescrit d'augmenter d'un le dernier chiffre conservé, lorsque le 1er chiffre supprimé surpasse 5 : *dans le 3ème cas*, où l'on a écrit 3,428 au lieu de 3,42759, l'erreur est moindre qu'un demi-millième, ou que 5 dix-millièmes, ou que 0,0005; car la valeur exacte 3,42759,

4

augmentée de 0,0005, devient 3,42809, et l'on n'a écrit que 3,428. S'il s'agissait d'approcher le plus possible de la valeur exacte de 7,35, en conservant une seule décimale, il serait indifférent d'écrire 7,3 ou 7,4, car dans ces deux cas, l'erreur commise, en moins ou en plus, est de 5 centièmes, ou d'un demi-dixième. Les mêmes raisonnemens s'appliqueraient à tous les nombres. Soit la fraction décimale périodique mixte 3,427 9999 etc., dont la valeur exacte est 3,428 ; si l'on veut conserver une seule décimale, comme le 1er chiffre supprimé est moindre que 5, on doit écrire 3,4, en ne changeant pas le dernier chiffre conservé 4; la partie négligée 0,028 est moindre que 0,05, ou qu'un demi dixième ; si l'on veut conserver deux décimales, comme le chiffre supprimé 8 est plus grand que 5, on augmentera d'un le dernier chiffre conservé 2, et l'on écrira 3,43 ; l'erreur commise est moindre qu'un demi centième, ou que 0,005 ; car il suffit d'ajouter 0,002 à la valeur exacte 3,428, pour obtenir 3,43. On reconnaîtra de la même manière, que les valeurs approchées du nombre 0,365080505, a moins d'une demi-unité décimale du dernier ordre conservé, sont............

0,4 ; 0,37 ; 0,365 ; 0,3651 ; 0,36508 ; 0,365081 ; 0,3650806 ;

196. La conversion d'une fraction ordinaire en décimales, donnant quelquefois naissance à un grand nombre de chiffres décimaux, on se décide assez ordinairement à n'en conserver qu'une partie ; le nombre des chiffres décimaux à conserver dépend du degré d'exactitude que l'on veut obtenir. On doit alors opérer de la manière suivante. *Pour réduire une fraction ordinaire en décimales et trouver sa valeur à moins d'une unité décimale de tel ordre déterminé qu'on voudra ; effectuez la division du numérateur par le dénominateur, en convertissant les restes successifs en, dixièmes centièmes millièmes etc., au moyen d'un zéro abaissé sur la droite de chacun d'eux, comme le prescrit la règle du n° 179. Quand la valeur approchée doit être plus petite que celle de la fraction, il suffit de calculer au quotient le nombre des chiffres décimaux déterminé par l'approximation demandée : si le reste correspondant est zéro, le quotient obtenu sera la valeur exacte de la fraction proposée :*

si ce reste n'est pas zéro, le quotient obtenu sera la valeur approchée de la fraction, à moins d'une unité décimale du dernier chiffre du quotient. Quand on a pour but d'approcher le plus possible de la valeur exacte de la fraction proposée, il faut alors calculer au quotient une décimale de plus qu'on n'en veut conserver ; si cette décimale est moindre que 5, on doit la négliger, les chiffres précédens sont ceux demandés; si elle égale ou surpasse 5, on doit augmenter d'un le dernier chiffre décimal à conserver; dans ces deux cas, l'erreur commise, en plus ou en moins, ne peut jamais excéder une demi unité décimale du dernier chiffre conservé au quotient; ainsi, les erreurs commises en s'arrêtant, aux dixièmes, ou aux centièmes, ou aux millièmes, etc., ne peuvent jamais excéder un demi-dixième, ou un demi-centième, ou un demi-millième, etc. Cette règle est une conséquence immédiate des règles des nos 194 et 195. Prenons pour exemple la fraction ordinaire $\frac{2}{7}$; en lui appliquant la règle du n° 179, on trouverait que sa valeur exacte est la fraction décimale périodique 0,285714 285714 etc. ; si l'on demande sa valeur à un *millième* d'unité près, on calculera seulement les trois chiffres décimaux 2, 8, 5, dont le dernier exprime des *millièmes*, ce qui donnera 0,285; mais si l'on voulait approcher le plus possible de la valeur de la fraction $\frac{2}{7}$, en ne conservant encore que 3 décimales au quotient, on calculerait la 4e décimale, que l'on trouverait égale à 7; comme elle surpasse 5, on augmenterait d'un la 3e décimale, et l'on écrirait 0,286; cette valeur est plus grande que celle de la fraction $\frac{2}{7}$, mais elle ne la surpasse pas d'un demi-millième. On trouvera de la même manière que les nombres décimaux 0,181, 0,1818, sont les valeurs de la fraction $\frac{2}{11}$ à moins, d'un millième près, d'un dix-millième près, etc.; tandis que les valeurs les plus approchées de cette même fraction, en conservant, 3 décimales, ou 4 décimales, ou 5 décimales, sont 0,182, ou 0,1818, ou 0,18182.

197. La règle que nous avons donnée (n° 170), pour former le produit de deux nombres décimaux, conduit à des calculs excessivement longs lorsque chaque facteur contient beaucoup de décimales; dans ce cas, les derniers chiffres à droite du pro-

duit expriment des unités qui sont si petites relativement à l'unité principale, qu'on peut souvent les négliger sans aucune erreur sensible. Nous allons faire connaître en conséquence, de quelle simplification la méthode générale est susceptible, lorsqu'on n'a besoin que d'une valeur approchée du résultat. Le procédé le plus naturel serait sans doute de former le produit exact, et de supprimer ensuite les unités décimales inférieures à celles qu'on veut conserver (n° 195). Ainsi, par exemple; ayant trouvé 42,674060205 pour le produit exact de 3,456789 par 12,345; on en déduirait, d'après la règle du n° 195, que les valeurs les plus approchées de ce produit lorsqu'on s'arrête, aux dixièmes, aux centièmes, aux millièmes, sont respectivement 42,7; 42,67; 42,674. Mais il est une voie beaucoup plus abrégée pour obtenir l'approximation qu'on desire, sans être obligé de multiplier la totalité du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur. L'utilité de cette méthode abrégée, doit attirer toute l'attention du lecteur sur la démonstration que nous allons en donner. S'il s'agit, par exemple, d'effectuer la multiplication de deux nombres décimaux, en poussant l'exactitude du produit jusqu'aux *dixièmes* de l'unité principale du multiplicande; on observera qu'on doit négliger, dans les multiplications partielles, les unités décimales qui ne peuvent pas influer sur les *dixièmes* du résultat; or dans l'addition des produits partiels, la réunion des centièmes donne assez ordinairement une retenue de dixièmes, et quelquefois même la somme des millièmes, donne une retenue des centièmes, qui se joignant à la colonne des centièmes, peut influer sur les dixièmes du résultat; mais il est facile d'apercevoir que l'addition des unités inférieures aux millièmes, ne doit pas influer sensiblement sur les dixièmes; on peut donc, lorsque l'approximation demandée frappe sur les *dixièmes*, négliger dans chaque produit partiel les unités décimales inférieures aux *millièmes*, c'est-à-dire les unités de deux rangs au-dessous de celles qu'on veut conserver au résultat; car les millièmes sont de deux rangs au-dessous des dixièmes. La question se trouve ainsi réduite à découvrir comment on doit effectuer la multiplication, pour éviter le calcul des unités inférieures aux millièmes. Or les

produits, de $\frac{1}{1000}$ par 1, de $\frac{1}{10000}$ par 10, de $\frac{1}{100000}$ par 100 etc.; et ceux, de $\frac{1}{100}$ par $\frac{1}{10}$, de $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$, de 1 par $\frac{1}{1000}$ etc.; se réduisent tous à $\frac{1}{1000}$, ou à un *millième ;* on est donc certain que les produits, des MILLIÈMES par les *unités*, des DIX-MILLIÈMES par les *dixaines*, des CENT-MILLIÈMES par les *centaines*, etc.; et ceux, des CENTIÈMES par les *dixièmes*, des DIXIÈMES par les *centièmes*, des UNITÉS par les *millièmes* etc., expriment tous des *millièmes*. Conséquemment; pour que le 1er chiffre à droite, de chaque produit partiel, exprime constamment des *millièmes*, il suffit, lorsqu'on multiplie par les unités simples du multiplicateur, de commencer aux millièmes du multiplicande, en négligeant les unités inférieures; et alors, pour les multiplicateurs partiels qui expriment des unités de dix en dix fois plus grandes ou plus petites que les unités simples du multiplicateur, on doit commencer aux chiffres du multiplicande qui expriment des unités de dix en dix fois plus petites ou plus grandes que celles qui ont d'abord été multipliées par les unités simples du multiplicateur, en négligeant les chiffres inférieurs du multiplicande. Cela posé; si, profitant de ces remarques, on dispose sous le multiplicande les chiffres du multiplicateur, de manière que chacun d'eux se trouve sous le chiffre du multiplicande où l'on doit commencer la multiplication, pour que le 1er chiffre à droite de chaque produit partiel exprime des *millièmes*, on formera ce tableau :

Multiplicande.....	dixaines	unités	*dixièm.*	centièm.	millièm.	dix-millièm.	etc.
Multiplicatr.	dix-millièm.	millièm.	centièm.	dixièm.	*unités*	dixaines.	etc.

L'examen attentif de ce tableau, fournit les observations suivantes; 1°. les *unités* simples du multiplicateur se trouvent sous les millièmes du multiplicande, c'est-à-dire sous les unités du multiplicande de deux rangs au-dessous des *dixièmes*, que l'on veut conserver au produit; 2°. le produit d'une unité quelconque de la 1ère ligne par l'unité correspondante de la 2e ligne est constamment un millième; par exemple, les centièmes multipliés par les dixièmes donnent des millièmes, car le produit de $\frac{1}{100}$ par $\frac{1}{10}$ est $\frac{1}{1000}$; 3°. les unités des différens ordres du multiplicateur se succèdent dans l'ordre inverse de celui des chiffres, car en

allant de droite à gauche les unités de la 2ème ligne deviennent de dix en dix fois plus grandes, tandis qu'au contraire dans le multiplicateur écrit en chiffres les unités prises dans le même sens deviennent de dix en dix fois plus petites ; par exemple, si le multiplicateur était 12,3456, ses chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, écrits dans l'ordre indiqué par la 2ème ligne se succéderaient ainsi 6,5,4,3,2,1 ; on dit en conséquence que dans la 2ème ligne, les chiffres du multiplicateur sont renversés ; d'après cela, pour renverser les nombres 37, 987, 3475, il suffit d'écrire 73, 789, 5743 ; 4°. pour que le 1er chiffre à droite de chaque produit partiel exprime des *millièmes*, il suffit de commencer chaque multiplication partielle aux unités du multiplicande qui se trouvent immédiatement au-dessus du multiplicateur partiel que l'on considère ; on doit négliger les unités inférieures du multiplicande, parce-qu'elles donneraient des unités inférieures aux millièmes ; ainsi, par exemple, lorsqu'on veut obtenir le produit partiel correspondant aux centièmes du multiplicateur, on doit commencer la multiplication aux dixièmes du multiplicande, qui se trouvent immédiatement au-dessus, ensorte qu'on multiplie, les dixièmes les unités et les dixaines du multiplicande, par les centièmes du multiplicateur, on néglige les produits des centièmes millièmes, etc. du multiplicande par les centièmes du multiplicateur, parce-que ces produits donneraient des unités inférieures aux millièmes ; 5°. comme le 1er chiffre à droite, de chaque produit partiel ainsi déterminé, exprime des millièmes ; on doit écrire les produits partiels les uns sous les autres, de manière que leurs premiers chiffres à droite se trouvent dans la même colonne verticale ; 6°. la somme des produits partiels ainsi disposés exprime des millièmes ; mais on ne veut conserver que les *dixièmes*, on doit donc supprimer les deux derniers chiffres à droite de la somme, d'après la règle du n° 195 ; le résultat exprimant des dixièmes, on séparera, par la *virgule*, un chiffre décimal sur sa droite, ce qui donnera la valeur du produit, à un *dixième* d'unité près.

198. La démonstration précédente pouvant s'appliquer aux cas où l'on voudrait obtenir la valeur approchée du produit

avec 2, 3, 4, etc. décimales, nous établirons cette règle générale.

Pour multiplier deux nombres decimaux l'un par l'autre, en ne conservant au produit que les unités décimales d'un ordre déterminé ; renversez d'abord l'ordre des chiffres du multiplicateur, et posez ce multiplicateur ainsi renversé sous le multiplicande, de manière que le chiffre qui occupait le rang des unités simples dans le multiplicateur, se trouve sous un chiffre du multiplicande, de deux rangs au-dessous des unités décimales que vous voulez conserver. Pour fixer avec plus de facilité la position des chiffres du multiplicateur; BARREZ *dans le multiplicande le chiffre décimal de deux rangs au-dessous des unités que vous voulez conserver; barrez ensuite le chiffre des unités simples du multiplicateur, et écrivez le multiplicateur renversé sous le multiplicande, de manière que les deux chiffres barrés se trouvent l'un sous l'autre. L'opération ainsi disposée, multipliez le multiplicande par les chiffres du multiplicateur renversé, en ayant soin de ne commencer chaque multiplication partielle qu'au chiffre du multiplicande immédiatement au-dessus de celui du multiplicateur par lequel vous multipliez, et de disposer les produits partiels les uns sous les autres, de manière que leurs premiers chiffres à droite se trouvent dans les mêmes colonnes verticales. La somme des produits partiels ainsi disposés, donnera la valeur approchée du produit total, avec deux décimales de plus que n'en exige l'approximation demandée; vous supprimerez les deux derniers chiffres à droite, d'après la règle du n° 195 (page 213); séparant ensuite, au moyen de la* VIRGULE, *les chiffres décimaux déterminés par l'approximation exigée, le résultat sera le produit demandé. Si le multiplicande n'avait pas assez de chiffres, pour qu'on pût leur faire correspondre convenablement les chiffres du multiplicateur renversé; on y suppléerait en mettant des zéros sur la droite du multiplicande. Observez bien aussi, lorsque les derniers chiffres à droite du multiplicateur renversé, n'ont pas de chiffres supérieurs correspondans, d'y suppléer par des zéros mis sur la droite du multiplicande; avec ces attentions, le dernier chiffre à droite du multiplicateur renversé ne dépassera*

jamais le dernier chiffre à droite du multiplicande. Pour appliquer cette règle à un exemple, proposons-nous de multiplier 71532,9 par 314,000 000 108 568, en poussant l'exactitude du produit jusqu'aux *millièmes*, c'est-à-dire, jusqu'à la 3ème décimale ; la règle prescrit de *barrer* dans le multiplicande la décimale de deux rangs au-dessous de l'approximation demandée, c'est-à-dire, la 5ème, mais le multiplicande ne contient qu'une décimale, on doit donc mettre 4 zéros sur sa droite, et écrire 71532,90000̸; barrant dans le multiplicateur le chiffre 4 des unités simples, et renversant l'ordre des chiffres, le multiplicateur renversé sera 86580100000004̸13 ; si l'on écrit ce multiplicateur, ainsi préparé, sous le multiplicande, en faisant correspondre les chiffres barrés; les deux chiffres 1 et 3, placés sur la droite du 4̸, ne trouveront pas de chiffres supérieurs correspondans; on doit donc mettre encore deux zéros sur la droite du multiplicande, qui devient alors 71532,90000̸00; si l'on écrit au-dessous le multiplicateur renversé 86580100000004̸13, en faisant correspondre les chiffres barrés, l'opération se trouvera disposée comme on le voit ici ....

Pour obtenir le produit demandé, on a commencé chaque multiplication partielle au chiffre du multiplicande immédiatement au-dessus du chiffre qui sert de multiplicateur; commençant donc par la droite, on a successivement multiplié : 715 329 000 0̸00 par 3, ...

	715	32,9	000	0̸00
865	801	00 0	000	4̸13
2	145	98 7	000	000
	71	53 2	900	000
	28	61 3	160	000
				715
				56
2	246	13 3	060	771

71532 900 00̸0 par 1 : 715329000̸ par 4̸, 715 par 1, enfin 7 par 8 ; on a mis dans la même colonne verticale le 1er chiffre à droite de chaque produit, et la somme des produits partiels ainsi disposés, a donné 2 2461330,60771 pour la valeur approchée du produit total, avec deux décimales de plus que n'en exige l'approximation demandée, c'est-à-dire avec 5 décimales ; suppprimant les deux dernières décimales 7 et 1, d'après la règle du n° 195 (page 213), on aura 22 461 330,608, pour la valeur du produit demandé, à moins d'un *demi-millième* d'unité

près ; et en effet, si on effectue le produit exact de......... 314,000 000 108 568 7 par 71532,9, on trouvera......... 22 461 330,607 766 233 960 23 ; la valeur la plus approchée possible de ce produit, en ne conservant que trois décimales, est effectivement 22 461 330,608. On peut observer, dans cet exemple, que les chiffres 8, 6, 5, du multiplicateur renversé, qui n'ont pas de chiffres supérieurs correspondans dans le multiplicande, ne concourent nullement à la formation du produit, ensorte qu'on peut les supprimer.

199. Si l'on examine attentivement la règle du n° 198, et les calculs relatifs à l'exemple précédent, on en déduira cette règle très-abrégée. *Pour multiplier deux nombres décimaux l'un par l'autre, en ne conservant au produit que les unités décimales d'un ordre déterminé ; commencez par fixer le nombre des chiffres décimaux de chaque facteur. A cet effet ; au nombre des décimales que vous voulez conserver dans le produit, ajoutez le nombre des chiffres placés sur la gauche de la* VIRGULE DÉCIMALE *du multiplicateur, la somme augmentée d'un indiquera combien le multiplicande doit contenir de chiffres décimaux ; de même, au nombre des décimales que doit contenir le produit, ajoutez le nombre des chiffres placés sur la gauche de la virgule décimale du multiplicande, la somme augmentée d'un marquera combien le multiplicateur doit contenir de décimales ; le nombre des chiffres décimaux du multiplicande et du multiplicateur étant ainsi déterminé, on supprimera les décimales inutiles, d'après la règle du n°* 195 (*page* 213), *et l'on suppléera par des zéros à celles qui pourraient manquer ; chaque facteur contiendra alors le même nombre de chiffres ; on renversera l'ordre des chiffres du multiplicateur, et l'on écrira ce multiplicateur ainsi renversé sous le multiplicande, de manière que le* 1er *chiffre à gauche du multiplicateur renversé se trouvant sous celui du multiplicande, les autres chiffres se correspondent. L'opération ainsi disposée, pour l'effectuer ; multipliez le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur renversé, en ayant soin de ne commencer chaque multiplication partielle qu'au chiffre du multiplicande, immédiatement au-*

dessus de celui du multiplicateur par lequel vous multipliez, et de disposer les produits partiels les uns sous les autres, de manière que leurs premiers chiffres à droite se trouvent dans la même colonne verticale. Sur la droite de la somme des produits partiels ainsi disposés, séparez deux décimales de plus que n'en exige l'approximation demandée ; supprimant alors les deux derniers chiffres décimaux, d'après la règle du n° 195, le résultat sera le produit demandé. Pour convaincre de l'exactitude de cette règle, nous l'appliquerons à l'exemple du n° 198, où il s'agissait de multiplier 71532,9 par 314,0000001085687, en poussant l'exactitude du produit jusqu'aux *millièmes*, c'est-à-dire jusqu'à la 3ᵉ décimale ; afin de déterminer combien chaque facteur doit contenir de décimales ; au nombre 3, des décimales qu'on veut conserver dans le produit, on ajoutera le nombre 3, des chiffres placés sur la gauche de la *virgule* du multiplicateur, la somme 6, augmentée d'un, donnera 7, pour le nombre des chiffres décimaux du multiplicande ; le multiplicande préparé est donc 71532,900 0000 ; de même, au nombre 3, des décimales du produit, on ajoutera le nombre 5, des chiffres placés sur la gauche de la *virgule* du multiplicande, la somme 8, augmentée d'un, donnera 9, pour le nombre des chiffres décimaux qu'on doit conserver dans le multiplicateur ; supprimant donc les décimales inutiles, et observant que la 1ʳᵉ décimale à supprimer étant 5, on doit augmenter d'un la dernière décimale conservée, qui est un 8, on trouvera que le multiplicateur est 314,000 000 109 ; chaque facteur contient alors le même nombre de chiffres; si l'on écrit sous le multiplicande 71532,9000000, les chiffres du multiplicateur pris dans un ordre inverse, l'opération sera disposée comme on le voit ici....

	715	32,9	000	000
	901	00 0	000	413
2	145	98 7	000	000
	71	53 2	900	000
	28	61 3	160	000
				715
				63
2	246	13 3	0,60	778

Pour former le produit ; on a multiplié le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, en commençant chaque multiplication partielle au chiffre du multiplicande immédiatement au-dessus de celui qui sert de multiplicateur, et disposant dans la même colonne verticale

cale le premier chiffre à droite de chaque produit partiel; sur la droite de la somme, des produits partiels ainsi disposés, on a séparé deux décimales de plus que n'en exige l'approximation demandée, c'est-à-dire 5 décimales, ce qui a donné 2 246 1 33 0,60 778; supprimant alors les deux derniers chiffres 7 et 8, d'après la règle du n° 195, qui prescrit d'augmenter d'un le dernier chiffre conservé lorsque le 1er chiffre supprimé surpasse 5, on aura 2 246 1 33 0,608, pour le produit demandé, à moins d'un millième d'unité près; ce résultat s'accorde avec celui obtenu dans l'exemple du n° 198. S'il s'agit de multiplier l'une par l'autre les fractions décimales périodiques mixtes

32,9416152333, etc. et 5544,7333 etc.

En poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 3ème décimale; on commencera par déterminer le nombre des chiffres décimaux qu'il suffit de conserver dans le multiplicande et le multiplicateur; pour y parvenir: au nombre 3, des décimales que l'on veut conserver dans le produit, on ajoutera séparément les nombres 4 et 2, qui expriment combien il y a de chiffres sur la gauche de la *virgule*, dans le multiplicateur et dans le multiplicande; les sommes 7 et 5, augmentées d'un, donneront 8 et 6 pour les nombres de décimales à conserver; ensorte que le multiplicande et le multiplicateur préparés, sont 32,94161523 et 5544,733333; si l'on écrit sous le multiplicande, le multiplicateur renversé 3333374455, de manière que les chiffres se correspondent; le calcul sera disposé comme on le voit ici. . . .

Multiplicande préparé................ 3294161523
Multiplicateur préparé et renversé..... 3333374455

On trouvera, en effectuant le calcul comme dans l'exemple précédent, que la valeur du produit demandé, à un millième d'unité près, est 182652,472. Pour mettre en évidence l'exactitude de ce résultat, on effectuera la multiplication sur les fractions ordinaires équivalentes aux fractions décimales périodiques mixtes proposées; la fraction produit, convertie en décimales, d'après la règle du n° 196, donnera 182652,472 pour la valeur la plus approchée du produit demandé, lorsqu'on ne conserve que trois décimales. On trouvera de la même manière:

que le produit de 3,456789 par 12,345, à un demi-dixième d'unité près, est 42,7; que celui de 576,2486395 par 269,457, à un demi-millième d'unité près, est 155274,229; que celui de 36,345678,9658 par 2,4676589, à un demi-cent-millième d'unité près, est 89,68874. Si l'on compare dans chaque exemple, la composition du produit exact, avec le calcul où conduit la règle abrégée, il ne restera aucuns doutes sur son exactitude; on verra qu'elle ne sert qu'à éviter la formation des produits partiels qui ne peuvent pas influer sur les décimales que l'on veut conserver dans le produit. L'utilité de cette règle doit engager les commençans à l'appliquer à un grand nombre d'exemples. Je pourrais donner une règle analogue à la précédente, pour calculer la valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux l'un par l'autre; mais la complication de cette règle et son peu d'utilité dans la pratique, m'engagent à n'en pas parler.

Ce qui précède offre une théorie complète des NOMBRES ABSTRAITS. *On peut y observer que les calculs relatifs, aux fractions, aux fractions de fractions, aux nombres décimaux, aux fractions décimales périodiques, et aux fractions décimales périodiques mixtes, ne dépendent jamais que du calcul des nombres entiers abstraits.* La théorie des nombres abstraits servant de base à toute l'arithmétique, j'ai fait mes efforts pour la présenter avec le soin que mérite son importance. Nous allons voir dans la deuxième partie de l'Arithmétique, que *le calcul des* NOMBRES CONCRETS *de toute espèce, dépend de celui des nombres abstraits.* J'engage donc les commençans à s'exercer sur un grand nombre d'exemples, avant de passer à la 2ème partie; leur attention, ne se portant plus sur le *mécanisme du calcul*, pourra se livrer toute entière à l'esprit des démonstrations.

Fin de la première Partie.

ARITHMÉTIQUE.

SECONDE PARTIE.

NOMBRES CONCRETS.

200. LES nombres composés, d'unités *entières* de même grandeur, ou d'une seule espèce de subdivision de l'unité entière, ont reçu le nom de *nombres incomplexes*, par opposition aux nombres composés d'unités de grandeur différente, et de fractions d'unités, qui s'appellent *nombres complexes*. Ces nombres sont *concrets* ou *abstraits*, suivant qu'on désigne ou qu'on ne désigne pas l'espèce de leurs unités. D'après ces conventions : 13, 17, 13 fois, 17 fois etc., sont des *nombres entiers abstraits et incomplexes ;* ils sont *entiers*, comme exprimant la collection d'unités entières ; ils sont *abstraits*, car l'espèce de leurs unités n'est pas déterminée ; enfin ils sont incomplexes, parceque chacun d'eux est composé d'unités de même grandeur. $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$, etc., expriment des *fractions abstraites ;* on doit les classer parmi les nombres incomplexes, car chacune n'est composée que d'une seule espèce de subdivision de l'unité abstraite ; $\frac{3}{5}$, par exemple, se compose de trois subdivisions de l'unité dont chacune vaut la cinquième partie de l'unité ; ainsi, en considérant le cinquième de l'unité principale comme une nouvelle unité, l'expression $\frac{3}{5}$ est l'assemblage de trois de ces nouvelles unités ; sous ce dernier aspect, $\frac{3}{5}$ devient un nombre entier, 3 cinquièmes, composé de trois unités cinq fois plus petites que l'unité principale. De même $\frac{7}{4}$ vaut 7 fois un quart, etc. $13\frac{3}{5}$, $17\frac{3}{4}$, 13 fois plus $\frac{3}{5}$ fois, etc., représentent des *nombres abstraits et complexes ;* ils sont *abstraits*, car l'espèce de leurs unités n'est pas désignée ; ils sont *complexes*, car chacun d'eux renferme des unités entières et des fractions d'unité ; $13\frac{3}{6}$, par

exemple, se compose de 13 unités abstraites et de 3 parties égales à la cinquième partie de l'unité abstraite du nombre 13; de même $17\frac{3}{4}$, est l'assemblage de 17 unités abstraites et de 3 parties égales au quart de cette unité abstraite.

Les observations précédentes subsistent pour les *nombres concrets*, *incomplexes et complexes*, seulement l'unité, au lieu d'être abstraite est concrète. Ainsi, 13 *toises*, 17 *livres* etc., sont des *nombres entiers*, *concrets et incomplexes*; car chacun d'eux est composé d'unités concrètes de même grandeur; 13 toises, par exemple, exprime la collection de 13 unités concrètes, dont chacune vaut une toise; 17 heures valent 17 fois une heure, etc. $\frac{3 \text{ toises}}{5}$, $\frac{7 \text{ heures}}{4}$, etc., sont des *fractions concrètes;* on doit les classer parmi les nombres incomplexes, car chacune n'est composée que d'une seule espèce de subdivision de l'unité concrète; ainsi, $\frac{3 \text{ toises}}{5}$ exprime trois fois un cinquième de toise; $\frac{7 \text{ heures}}{4}$ se compose de 7 unités égales à un *quart d'heure*, *etc.*; 12 *livres* 5 *sous* 7 *deniers;* 7 *toises* 4 *pieds* 5 *pouces* $\frac{2}{7}$ *de pouce*, etc. sont des *nombres concrets et complexes*, car chacun d'eux contient plusieurs espèces de subdivisions de la même unité concrète (*Voyez* pour toute la suite de la théorie des nombres concrets, le tableau du n° 216). Par exemple, 12 *livres* 5 *sous* 7 *deniers*, est un nombre concret complexe, composé d'unités de trois grandeurs différentes; en effet, la livre étant prise pour unité principale, le sou est une unité vingt fois plus petite que la livre, et le denier est une autre unité, douze fois plus petite que le sou, ou 240 fois plus petite que la livre. 7 *toises* 4 *pieds* 5 *pouces* $\frac{2}{7}$ de *pouce*, est un nombre concret complexe composé de trois espèces d'unités entières, la toise le pied le pouce, et d'une fraction de pouce.

Nombres concrets incomplexes.

201. *Toutes les opérations de l'arithmétique sur les nombres concrets, ne dépendent que du calcul des nombres abstraits.* Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que la connaissance du

résultat, auquel doit conduire la solution d'un problême quelconque, ne dépend jamais que de la nature de ses unités et de leur nombre, qui est essentiellement abstrait; l'état de la question détermine la nature des unités du résultat, ensorte que le seul but du calcul est de faire connaître le nombre abstrait de ces unités; ce dernier nombre doit évidemment s'obtenir en opérant sur des nombres abstraits. Ainsi par exemple; lorsqu'on propose de déterminer la *somme* des nombres concrets, 5 toises et 3 toises; l'état de la question montre que le résultat sera des toises; le seul but du calcul est donc de déterminer leur nombre, qui sera évidemment exprimé par la somme 8, des nombres abstraits 5 et 3; la somme cherchée est donc 8 toises. Le calcul serait le même, si l'on proposait d'ajouter 5 heures à 3 heures; le résultat serait des heures, et leur nombre serait marqué par la somme 8, des nombres abstraits 5 et 3. Si l'on proposait d'òter 5 toises de 8 toises, le reste serait composé de toises, et leur nombre serait déterminé par la *différence* 3, entre les nombres abstraits 8 et 5. La *multiplication* du nombre concret 4 toises, par le nombre abstrait 3, n'offrirait pas plus de difficulté, car cette multiplication se réduisant à former la somme de 3 nombres égaux à 4 toises, on sait d'avance que le résultat doit être composé de toises; le seul but du calcul est donc de trouver leur nombre, qui est évidemment 3 fois 4, ou 12. Le produit de 4 heures par 3, sera des heures; leur nombre sera 3 fois 4, ou 12; ainsi le résultat demandé est 12 heures. Enfin, comme le produit de 4 toises par 3, est 12 toises; on en déduit, par la décomposition de ce produit, qu'en divisant l'un par l'autre les deux nombres concrets de même nature, 12 toises et 4 toises, on obtient pour quotient le nombre abstrait 3; tandis que le quotient du nombre concret 12 toises par le nombre abstrait 3, est le nombre concret 4 toises.

202. *D'après la nature de l'*ADDITION *et de la* SOUSTRACTION, *il est impossible d'ajouter ou de soustraire des nombres d'espèce différente (nos 26 et 37). On ne saurait ajouter 7 toises à 8 heures, ou retrancher 18 livres de 52 pieds.*

203. *Le multiplicateur est essentiellement abstrait* (n° 50,

3

page 48). Il serait donc absurde de chercher le produit de $2^{\#}$ par $3^{\#}$; pour s'en convaincre, il suffit d'observer que si le produit de $2^{\#}$ par $3^{\#}$ pouvait être 6 celui des facteurs équivalens, 40^{s} et 60^{s}, devrait être équivalent à $6^{\#}$, ou à 120^{s} ; chose absurde. De même, si le produit de 2 toises par 3 toises pouvait être 6 toises ; celui des facteurs équivalens, 12 pieds et 18 pieds, serait équivalent à 6 toises ou à 36 pieds ; chose absurde ; car le produit de 36 pieds par 12 pieds ne peut être 36 pieds. Je crois que ces exemples ne doivent laisser aucun doute sur l'impossibilité de former un produit avec un multiplicateur concret ; et conséquemment, *le produit de deux nombres concrets l'un par l'autre ne peut pas exister.* Ce principe est de la plus grande importance : il montre la fausseté de plusieurs théories données dans certains ouvrages.

204. *Le dividende étant un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs ; il est impossible de diviser un nombre abstrait par un nombre concret ;* car dans ce cas, le dividende ne saurait avoir pour facteurs le diviseur et le quotient. Si, par exemple, le quotient du nombre abstrait 12, par le nombre concret 3 toises, pouvait exister : il faudrait que le dividende abstrait 12 fût égal au produit concret, du diviseur 3 toises par le quotient, chose absurde. Si le quotient de 24 par 4 toises, pouvait être 6, alors le nombre concret 6 fois 4 toises, ou 24 toises, serait égal au nombre abstrait 24 ; ce qui est impossible. On voit également qu'*on ne saurait diviser un nombre concret par un nombre concret de nature différente ;* on ne saurait diviser 24 toises par 4 heures, car si le quotient pouvait être 6, comme quelques auteurs l'ont prétendu, 6 fois 4 heures, ou 24 heures, serait égal au dividende 24 toises, chose évidemment absurde. Dans la plupart des Traités sur l'Arithmétique, on paraît effectuer les opérations dont nous venons de démontrer l'absurdité ; nous expliquerons bientôt comment on doit interpréter leurs résultats ; on reconnaîtra que l'erreur vient de ce qu'*on a confondu les nombres sur lesquels on opère, avec ceux qui ne servent qu'à les déterminer.*

205. Si l'on réunit ce qui précède, on en déduira qu'en gé-

néral : *avant de soumettre des nombres au calcul; on doit examiner s'ils satisfont aux conditions qui leur sont imposées par la nature de chaque règle ; lorsque ces conditions sont remplies, on peut opérer sur les nombres, en faisant abstraction de l'espèce de leurs unités; le nombre abstrait que l'on obtient, exprime de combien d'unités le résultat cherché se compose. L'espèce de ces unités est déterminée par l'état de la question. Ainsi, dans l'*ADDITION *comme dans la* SOUSTRACTION, *les nombres concrets incomplexes sur lesquels on opère, doivent être composés d'unités concrètes de même grandeur, et la nature des unités du résultat est la même que celle des unités des nombres sur lesquels on a opéré. Dans la* MULTIPLICATION, *le multiplicateur est essentiellement abstrait, et les unités du produit sont de même grandeur que celles du multiplicande. Dans la* DIVISION : *lorsque le dividende et le diviseur sont composés d'unités concrètes de même espèce, le quotient est un nombre abstrait, qui indique combien de fois le dividende contient le diviseur : lorsque le diviseur est abstrait, le quotient est de la nature du dividende ; ce quotient n'indique plus combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, mais multiplié par le diviseur, il reproduit le dividende. Il serait absurde : d'ajouter ou de soustraire des nombres concrets de différente nature : de multiplier deux nombres concrets l'un par l'autre : de diviser l'un par l'autre, deux nombres concrets de nature différente, ou un nombre abstrait par un nombre concret.*
Ces principes comprenant toutes les règles relatives au calcul des nombres concrets incomplexes, je pourrais passer aux nombres complexes ; mais je crois rendre service aux élèves, en donnant quelques développemens à ce qui précède.

206. L'ADDITION *des nombres concrets incomplexes, rapportés à la même unité, s'effectue d'après la règle du n° 33 (page 31), en opérant sur les nombres abstraits qui expriment de combien d'unités concrètes chaque nombre concret est composé ; le résultat, qui est abstrait, indique combien la somme cherchée renferme d'unités concrètes ; ces unités sont de même grandeur que celles des nombres ajoutés. La* PREUVE *s'effectue*

d'après la règle du n° 97 (page 77). Appliquons cette règle aux exemples suivans....

	9 897 986 toises	9 897 986 pieds	9 673 278 009 livres.
	976 879 toises	976 879 pieds	89 732 568 livres.
	9 980 987 toises	9 980 987 pieds	9 789 762 569 livres.
Sommes...	20 855 852 toises	20 855 852 pieds	19 552 773 146 livres.
Preuves...	2 212 220 toises	2 212 220 pieds	1 221 111 120 livres.

Dans le 1er exemple, où l'unité concrète est la *toise*, on est certain que la somme sera composée de toises et que leur nombre s'obtiendra en ajoutant les nombres abstraits 9897986, 976879, 9980987, qui expriment de combien de toises chaque nombre concret est composé; l'addition de ces nombres abstraits donne 20855852; et conséquemment le résultat cherché, composé de 20 855 852 unités de toise, est 20 855 852 toises; la preuve s'effectue d'après la règle du n° 97; on reconnaît qu'il n'y a point eu d'erreur de calcul, à ce que la retenue placée sous la colonne des unités est zéro toise. *Dans le 2e exemple*, où l'unité concrète est la *livre*, on est certain que la somme exprimera des livres, dont le nombre sera 20855852, car les nombres abstraits que l'on doit ajouter sont ceux du 1er exemple. Le calcul relatif au 3e *exemple*, a été effectué d'après les mêmes principes. On opérerait de la même manière s'il s'agissait de fractions concrètes, rapportées à la même unité; par exemple, pour ajouter $\frac{3 \text{ toises}}{7}$ avec $\frac{2 \text{ toises}}{7}$, on observera que ces fractions expriment respectivement les $\frac{3}{7}$ d'une toise et les $\frac{2}{7}$ d'une toise, le résultat sera donc une fraction de toise déterminée par la somme $\frac{5}{7}$, des fractions abstraites $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{7}$; ainsi $\frac{3 \text{ toises}}{7}$ plus $\frac{2 \text{ toises}}{7}$ valent $\frac{5}{7}$ de toise, ou $\frac{5 \text{ toises}}{7}$; la même somme $\frac{5 \text{ toises}}{7}$ eût été obtenue, en appliquant la règle du n° 112, car on eût divisé la somme 5 toises, des numérateurs 3 toises et 2 toises, par le dénominateur commun 7, ce qui eût donné absolument le même résultat; pour s'en rendre compte, il suffit de considérer chaque septième de toise, comme une unité concrète 7 fois plus petite que la toise; alors $\frac{3 \text{ toises}}{7}$ plus $\frac{2 \text{ toises}}{7}$, vaudront 3 septiè-

mes de toise plus 2 septièmes de toise, c'est-à-dire 5 septièmes de toise, ou $\frac{5\text{ toises}}{7}$. Par une raison absolument semblable; $\frac{9}{17}\#$ plus $\frac{4}{17}\#$, valent $\frac{13}{17}\#$; on voit que cette somme est une fraction dont le numérateur $13^{\#}$ est la somme des numérateurs $9^{\#}$ et $4^{\#}$, et dont le dénominateur 17 est celui des fractions proposées.

207. Engénéral : *pour ajouter plusieurs fractions d'une même unité concrète; il suffit, lorsqu'elles ont le même dénominateur, de diviser la somme des numérateurs par le dénominateur commun. Si les fractions proposées avaient des dénominateurs différens, on les réduirait d'abord au même dénominateur en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres (n° 215); la somme des nouveaux numérateurs divisée par le dénominateur commun, exprimerait la somme cherchée.* D'après cela; pour obtenir la somme des quatre fractions concrètes.. $\frac{2}{3}\#$; $\frac{5}{7}\#$; $\frac{4}{5}\#$; $\frac{3}{4}\#$; on multipliera les deux termes de chacune d'elles, par le produit des dénominateurs des trois autres, ce qui donnera les fractions équivalentes.. $\frac{280}{420}\#$, $\frac{300}{420}\#$, $\frac{336}{420}\#$, $\frac{315}{420}\#$; la somme $1231^{\#}$, des nouveaux numérateurs, affectée du dénominateur commun 420, donnera $\frac{1231}{420}\#$, pour la somme cherchée.

208. *Pour* SOUSTRAIRE *l'un de l'autre, deux nombres concrets incomplexes, rapportés à la même unité, il suffit d'opérer sur les nombres abstraits qui expriment de combien d'unités concrètes chaque nombre concret est composé; le résultat, qui est abstrait, exprime le nombre d'unités concrètes du reste demandé. Ces unités sont de même grandeur que celles des nombres donnés. La soustraction des nombres abstraits s'effectue d'après la règle du n° 45 (page 42). Si l'on n'a pas commis d'erreur de calcul, le reste ajouté au plus petit nombre donnera le plus grand* (98). Voici quelques exempless.

De.....	98 765 toises	De....	300 400 700#	De....	1000 456 pintes.
ôtez...	32 451 toises	ôtez...	89 123 874#	ôtez...	7 567 pintes.
Reste...	66 314 toises	Reste..	211 276 826#	Reste.	992 889 pintes.
Preuve..	98 765 toises.	Preuve.	300 400 700#	Preuve	1000 456 pintes.

Dans le 1er exemple, où l'unité concrète est la toise, on est certain que le reste sera composé de toises, dont le nombre sera

déterminé par la différence 66314, entre les nombres abstraits, 98765 et 32451, qui expriment de combien de toises chaque nombre concret est composé. Pour s'assurer de l'exactitude du reste 66314 toises, on l'a ajouté au plus petit nombre 32451 toises, la somme s'étant trouvée égale au plus grand nombre 98765 toises, on en a conclu que la soustraction avait été bien faite. Le calcul relatif aux deux autres exemples, a été effectué d'après les mêmes principes.

209. *Pour soustraire, l'une de l'autre, deux fractions d'une même unité concrète, il suffit, lorsqu'elles ont le même dénominateur, de diviser la différence des numérateurs par le dénominateur commun. Si les fractions proposées avaient des denominateurs différens, on les réduirait d'abord au même dénominateur; la différence des nouveaux numérateurs, divisée par le dénominateur commun, exprimerait le reste cherché. Si l'opération a été bien faite, le reste ajouté à la plus petite fraction, doit donner une somme équivalente à la plus grande.* D'après cette règle: pour soustraire $\frac{2}{13}$# de $\frac{7}{13}$#; on divisera la différence 5#, des numérateurs 2# et 7#, par le dénominateur commun 13, le résultat $\frac{5}{13}$# exprime le reste cherché; ce reste est exact, car ajouté à la plus petite fraction, il donne la plus grande. Pour soustraire $\frac{2}{7}$# de $\frac{3}{4}$#; on réduira ces fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de la 1ere par 4 et ceux de la 2e par 7, ce qui donnera les fractions équivalentes, $\frac{8}{28}$# et $\frac{21}{28}$#, la différence 13#, des nouveaux numérateurs, divisée par le dénominateur commun 28, donnera le reste cherché $\frac{13}{28}$#; ce reste est exact, car ajouté à la plus petite fraction $\frac{2}{7}$#, ou $\frac{8}{28}$#, il donne la fraction $\frac{21}{28}$# équivalente à la plus grande fraction $\frac{3}{4}$#. Si l'on proposait de soustraire $\frac{4}{5}$# de $\frac{2}{3}$#; on réduirait ces fractions au même dénominateur, ce qui donnerait $\frac{12}{15}$# et $\frac{10}{15}$#; on voit alors que la soustraction proposée est impossible, car la fraction à soustraire est la plus grande.

210. Le but de la MULTIPLICATION étant de répéter un nombre autant de fois que l'indique un autre, le multiplicateur est essentiellement abstrait, et le produit, composé de plusieurs nombres égaux au multiplicande, est conséquemment de la na-

ture du multiplicande. *Il est donc absurde de chercher à former le produit de deux nombres concrets l'un par l'autre.* D'après ces observations :

211. *Si l'on veut obtenir le produit d'un nombre concret incomplexe, par un nombre abstrait, il suffira de multiplier le nombre abstrait des unités concrètes du multiplicande par le multiplicateur ; le résultat exprimera le nombre des unités concrètes du produit ; ces unités seront égales à celles du multiplicande. Dans la formation du produit des deux nombres abstraits l'un par l'autre, on doit choisir pour multiplicateur celui qui contient le moins de chiffres significatifs* (*page* 61, *n*° 67). Par exemple ; pour multiplier 5 toises par 7, on observera, que des toises répétées un certain nombre de fois, donnent nécessairement des toises, et que leur nombre sera déterminé par le produit 35 des nombres abstraits 5 et 7 ; le résultat cherché est donc 35 toises. On trouvera, avec la même facilité : que 5 fois 3#, valent 15# ; que 7 fois 9 heures, font 63 heures. S'il s'agissait du produit de 2348 toises par 347, on multiplierait le nombre abstrait 2348, des unités de toise du multiplicande, par le multiplicateur 347 ; le résultat 814 756 exprimerait le nombre abstrait des unités de toise du produit cherché, qui est parconséquent 814 756 toises. Pour obtenir le nombre de toises du produit de 12 toises par 123 456 789 ; au lieu de multiplier 12 par 123 456 789, ce qui exigerait un très-long calcul, on changera l'ordre des facteurs, et l'on multipliera 123 456 789 par 12 ; le résultat 1 481 481 468 exprimera le nombre de toises du produit cherché, qui est conséquemment 1 481 481 468 toises. Par la même raison ; dans la formation du produit de 7 heures par 9 872 004 567, on choisira le nombre 7 pour multiplicateur, et l'on trouvera que le produit cherché est 69 104 031 969 heures.

La règle précédente s'applique également à la multiplication d'un nombre concret, entier ou fractionnaire, par un nombre abstrait, entier ou fractionnaire. Le produit de 4 toises par $\frac{3}{5}$, sera des toises, dont le nombre sera les $\frac{3}{5}$ de 4, ou $\frac{12}{5}$; le résultat demandé est donc $\frac{12 \text{ toises}}{5}$. La multiplication de $\frac{4}{5}$# par 7, donnera

des livres, leur nombre sera 7 fois $\frac{4}{5}$, ou $\frac{28}{5}$; le produit demandé est donc $\frac{28}{5}$# ; et en effet, la somme de sept fractions égales au multiplicande $\frac{4}{5}$#, est $\frac{28}{5}$#. Enfin, le produit de $\frac{3}{4}$# par $\frac{5}{7}$, se composera d'une fraction de livre exprimée par les $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire par $\frac{15}{28}$; le produit demandé est donc $\frac{15}{28}$#. On verrait de la même manière, que le produit de $\frac{7}{23}$# par 23 est 7#, que celui de $\frac{13}{17}$# par 17 est 13#, etc.

212. La DIVISION enseignant à décomposer un produit lorsqu'on connaît un de ses facteurs ; le procédé de la division doit se déduire de celui de la multiplication : et en effet, comme le multiplicande est un produit dont les deux facteurs sont le diviseur et le quotient : lorsque le dividende est abstrait, le diviseur et le quotient le sont également, car si l'un d'eux était concret, multiplié par l'autre, il donnerait un nombre concret qui devrait être égal au dividende abstrait, ce qui est absurde : lorsque le dividende est concret, le diviseur ou le quotient est abstrait, et l'autre facteur est un nombre concret de la nature du dividende, car dans ce cas la multiplication du facteur concret, de l'espèce du dividende, par le facteur abstrait, reproduira le dividende. Nous établirons donc cette règle générale.

213. *Dans la* DIVISION ; *on effectue le calcul sur les nombres abstraits qui expriment de combien d'unités, concrètes ou abstraites, le dividende et le diviseur sont composés ; le résultat abstrait exprime le nombre d'unités, concrètes ou abstraites, du quotient. La nature de ces unités est déterminée par l'état de la question. Ainsi ; lorsque le dividende est abstrait, le diviseur et le quotient sont également abstraits ; lorsque le dividende et le diviseur sont composés d'unités concrètes de même grandeur, le quotient est nécessairement abstrait ; enfin, lorsque le dividende étant concret, le diviseur est abstrait, le quotient est un nombre concret de la nature du dividende. Nous verrons* (n° 263, 2°.) *comment on doit opérer quand le dividende et le diviseur étant de même nature sont composés d'unités concrètes de grandeur différente. Dans tous les autres cas il est impossible d'effectuer la division.* Appliquons les diverses parties de cette règle à la décomposition des produits formés dans le n° 211.

Pour diviser l'un par l'autre, les nombres 35 toises et 5 toises, composés d'unités concrètes de même grandeur; on effectuera la division sur les nombres abstraits 35 et 5, qui expriment de combien d'unités concrètes le dividende et le diviseur sont composés; le résultat abstrait 7, exprime le nombre d'unités du quotient : pour déterminer la nature de ces unités, on observera que le dividende et le diviseur étant tous deux composés de toises, c'est-à-dire d'unités concrètes de même grandeur, le quotient demandé est abstrait, il est donc 7. Changeons l'ordre des facteurs et proposons-nous de diviser le nombre concret 35 toises par le nombre abstrait 7; d'après la règle, on divisera 35 par 7, ce qui donnera 5; pour déterminer la nature des unités du nombre 5, on observe que le dividende 35 toises étant concret et le diviseur 7 abstrait, le quotient est composé d'unités concrètes égales à celles du dividende, c'est-à-dire de toises; le quotient demandé composé de 5 unités de toise, est conséquemment 5 toises. On trouvera de la même manière; que le quotient de 15# par 3# est 5; que celui de 15# par 5 est 3#; que celui de 63 heures par 9 heures est 7. Le quotient de 35# par 5# peut s'obtenir en divisant 35 par 5; en effet, ce quotient est exprimé par la fraction $\frac{35\#}{5\#}$, équivalente à $\frac{35 \text{ fois } 1\#}{5 \text{ fois } 1\#}$; divisant les deux termes de cette dernière par leur facteur commun 1#, elle ne changera pas de valeur et deviendra $\frac{35}{5}$; le quotient de 35# par 5# est donc effectivement le même que celui de 35 par 5.

214. En général; *pour diviser l'un par l'autre deux nombres concrets rapportés à la même unité, il suffit d'effectuer le calcul sur les nombres abstraits qui expriment de combien d'unités concrètes chaque nombre concret est composé; le quotient est celui demandé.* Cette règle est fort commode dans la pratique. Par exemple; pour diviser 814756# par 2348#, comme le dividende et le diviseur sont composés d'unités égales, il suffit de diviser les deux nombres abstraits 814756 et 2348, l'un par l'autre, le quotient 347, est celui demandé.

Les règles précédentes s'appliquent également aux fractions; pour diviser l'une par l'autre les deux fractions concrètes 2#/[illegible] et $\frac{4\#}{5}$,

on effectuera le calcul sur les fractions abstraites $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, le quotient $\frac{10}{12}$, ou $\frac{5}{6}$, sera celui demandé ; le diviseur $\frac{4}{5}$#, multiplié par le quotient $\frac{5}{6}$, donne la fraction $\frac{20}{30}$#, équivalente au dividende $\frac{2}{3}$#. Si, changeant l'ordre des facteurs, on demande le quotient de la fraction concrète $\frac{2}{3}$# par la fraction abstraite $\frac{5}{6}$; on divisera $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{6}$, ce qui donnera $\frac{12}{15}$, ou $\frac{4}{5}$; or le quotient d'un nombre concret par un nombre abstrait est de la nature du dividende, celui de $\frac{2}{3}$# par $\frac{5}{6}$ est donc $\frac{4}{5}$#. On trouvera de la même manière ; que le quotient, de $\frac{3}{5}$# par $\frac{4}{7}$# est $\frac{21}{20}$; que celui de $\frac{3}{5}$# par 7 est $\frac{3}{35}$# ; que celui de $\frac{3}{7}$ par $\frac{5}{7}$ est $\frac{3}{5}$# ; que celui de $\frac{3}{11}$# par $\frac{3}{17}$ est $\frac{17}{11}$# ; que celui de 1# par $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$#, etc.

215. La règle du nº 142 (page 150), s'applique aux fractions concrètes ; *pour réduire une fraction concrète à sa plus simple expression ; on cherche d'abord le plus grand commun diviseur entre ses deux termes, considérés comme abstraits ; on divise ensuite les deux termes de la fraction par leur plus grand commun diviseur abstrait, les quotiens sont les deux termes de la fraction irréductible équivalente à la proposée.* Ainsi, pour réduire à sa plus simple expression la fraction concrète $\frac{330}{462}$# ; on cherchera le plus grand commun diviseur 66, entre les nombres abstraits 330 et 462 ; la division des deux termes 330# et 462, de la fraction proposée, par leur plus grand commun diviseur abstrait 66 ; donnera pour quotient les deux termes 5# et 7 de la fraction irréductible $\frac{5}{7}$#, équivalente à la proposée.

Les méthodes que nous venons d'exposer donnent le moyen d'effectuer les diverses opérations de l'Arithmétique sur les nombres concrets incomplexes ; on voit que ces opérations ne dépendent que du calcul des nombres abstraits. Nous allons en faire l'application à la résolution de quelques problêmes faciles.

1°. *On demande quelle est la totalité de l'ouvrage exécuté par deux ouvriers dont le* 1er *a fait* 46 *toises et le second* 57 *toises.* Il est évident que la somme des ouvrages faits par chaque ouvrier, exprimera l'ouvrage total ; ajoutant donc 46 toises à 57 toises, le résultat, 103 toises, sera celui demandé : 2°. *l'ouvrage exécuté par deux ouvriers est* 103 *toises, le* 1er *a fait* 57 *toises, on demande l'ouvrage du* 2ème. Si de l'ouvrage 103 toises des

deux ouvriers, on retranche celui, 57 toises, du premier, le reste 46 toises exprimera nécessairement l'ouvrage du second. 3°. *On demande le prix de 125 toises d'ouvrage, à raison de 8# la toise.* Comme une toise coûte 8#; les 125 toises coûteront 125 fois 8#, c'est-à-dire 1000#. On doit bien observer qu'il serait absurde de considérer le nombre concret 125 toises, comme multiplicateur, car on a réellement obtenu le prix cherché en multipliant 8# par le nombre abstrait 125, qui exprime le nombre de toises de l'ouvrage; ensorte que le nombre concret 125 toises, ne sert qu'à déterminer le multiplicateur abstrait 125. Cette observation est de la plus grande importance, elle s'applique à toutes les questions qui paraissent conduire à multiplier par un nombre concret; en les analysant avec soin, on reconnaîtra que dans toutes les multiplications, le vrai multiplicateur est abstrait. *Un problême dont la solution dépendrait de la multiplication par un nombre concret, serait nécessairement absurde.*

4°. *On a payé 1000# pour un certain nombre de toises d'ouvrage, à raison de 8# la toise, il faut découvrir quel est ce nombre de toises.* Si le nombre de toises était connu, en multipliant 8#, prix d'une toise, par ce nombre de toises, on devrait obtenir le prix total 1000#; 1000# peut donc être considéré comme le produit de 8#, par le nombre de toises inconnu; mais la division d'un produit par l'un de ses facteurs donne l'autre; la division de 1000# par 8#, donnera donc le nombre de toises cherché. Or 1000#, divisé par 8#, donne le quotient abstrait 125; le nombre de toises cherché est donc 125; la réponse à la question est donc enfin 125 toises; et en effet; à 8# la toise, 125 toises valent 125 fois 8#, ou 1000#. On commettrait une faute grossière, en disant que le quotient de 1000# par 8# est 125 toises; car si cela était, le diviseur 8# multiplié par le quotient 125 toises, donnerait le dividende 1000#, ce qui est évidemment absurde. 5°. *Une pièce de drap a coûté 53# à raison de 12# l'aune; on veut savoir de combien d'aunes la pièce était composée.* Un raisonnement analogue à celui de l'exemple précédent, montrera que le nombre d'aunes cherché est exprimé par le quotient de 53 par 12, qui est $4\frac{5}{12}$; la ré-

ponse à la question est donc 4 aunes $\frac{5}{12}$ d'aune ; pour vérifier l'exactitude de ce résultat, on observera que le prix d'une aune de drap étant 12#, celui de 4 aunes est 4 fois 12#, ou 48# ; celui d'un douzième d'aune est 1#, celui de $\frac{5}{12}$ d'aune est 5#; ensorte que les 5 aunes $\frac{5}{12}$ d'aune, ont dû coûter 48# plus 5#, ou 53#. Les nombres concrets 53# et 12#, ont servi à déterminer la division de 53 par 12; et le quotient abstrait 4 $\frac{5}{12}$ a exprimé de combien d'aunes la pièce de drap était composée. 6°. *On a payé* 1000# *pour* 125 *toises d'un certain ouvrage; on demande le prix de la toise.* Comme 125 toises ont coûté 1000# ; le prix d'une toise est évidemment la 125ème partie de 1000# ; on obtiendra donc ce prix, en divisant 1000# par le nombre abstrait 125, ce qui donnera 8#, pour la réponse à la question. On doit bien observer que le nombre concret 125 toises, n'a servi qu'à déterminer le diviseur abstrait 125 ; si l'on considérait 1000# comme dividende, et 125 toises comme diviseur; lorsqu'on ferait la preuve de la division, le diviseur 125 toises, multiplié par le quotient 8#, devrait reproduire le dividende 1000#, ce qui est impossible. Ainsi, quoique dans la question actuelle, les nombres 1000# et 125 toises, qui déterminent le dividende et le diviseur, soient composés d'unités concrètes de nature différente, un raisonnement exact nous a démontré que le vrai diviseur est le nombre abstrait 125, et que le quotient 8# est de la nature du dividende 1000 livres. 7°. *On a loué un ouvrier à condition de lui donner* 3# *chaque jour qu'il travaillera, et de lui retenir* 2# *pour chaque jour qu'il ne travaillera pas ; lorsqu'on veut faire son compte, au bout de* 24 *jours, on s'aperçoit qu'il n'a travaillé que pendant* 18 *jours. Il faut découvrir ce qui lui est dû.* L'ouvrier gagne 3# pour chaque jour de travail, et perd 2# pour chaque jour où il ne travaille pas ; conséquemment il lui est dû pour ses 18 jours de travail, 18 fois 3#, ou 54# ; mais comme il est resté 6 jours sans travailler, on doit lui retenir 6 fois 2#, ou 12#; puisque l'ouvrier a gagné 54#, et perdu 12#, il ne lui reste dû que 54# moins 12#, c'est-à-dire 42#, ou 42 livres. 8°. *Un particulier achète deux lingots : le* 1er, *qui pèse* 12 *livres, est un alliage dont les deux tiers sont*

en

en fer et le tiers en étain : le 2e, du poids de 20 livres, est un alliage dont les trois quarts sont en plomb et le quart en cuivre. Le prix d'une livre de chaque métal est, pour le fer 24 sous, pour l'étain 30 sous, pour le plomb 6 sous, pour le cuivre 50 sous. On demande le prix de chaque lingot. Le 1er lingot pèse 12 livres; ses deux tiers, 8 livres, sont en fer; et le reste 4 livres, est en étain; le 1er lingot est donc composé de 8 livres de fer et de 4 livres d'étain; mais une livre de fer coûte 24^{s}, les 8 livres de fer valent donc 8 fois 24^{s}, ou 192^{s}; une livre d'étain coûte 30^{s}, les 4 livres d'étain valent donc 4 fois 30^{s}, c'est-à-dire 120^{s}; le prix du 1er lingot est donc, 192^{s} plus 120^{s}, ou 312^{s}. On trouvera de même, que le prix du 2ème lingot est 610 sous. 9°. *Un particulier achète deux lingots; le 1er pèse $\frac{23}{7}$℔; ses deux tiers sont en fer, et le reste en étain; le 2ème pèse $\frac{15}{4}$℔, ses trois quarts sont en plomb, et le reste en cuivre. Une livre de chaque métal coûte; pour le fer $\frac{3}{5}$#, pour l'étain $\frac{11}{3}$#, pour le plomb $\frac{15}{2}$#, pour le cuivre, $\frac{19}{2}$#. On demande le prix de chaque lingot.* Le 1er lingot pesant $\frac{23}{7}$℔, et ayant ses $\frac{2}{3}$ en fer, contient une quantité de fer exprimée par les $\frac{2}{3}$ de $\frac{23}{7}$℔, ou par $\frac{46}{21}$℔, et comme une livre de fer coûte $\frac{3}{5}$#, les $\frac{46}{21}$ d'une livre de fer coûtent les $\frac{46}{21}$ de $\frac{3}{5}$#, c'est-à-dire $\frac{138}{105}$#; on trouvera de même que le 1er lingot contient $\frac{23}{21}$℔ d'étain, dont le prix est les $\frac{23}{21}$ de $\frac{11}{3}$#, ou $\frac{253}{63}$#; le prix du 1er lingot sera donc, $\frac{138}{105}$# plus $\frac{253}{63}$#, c'est-à-dire 5# $\frac{728}{220}$#. Opérant d'une manière absolument semblable sur le 2ème lingot, on trouvera qu'il contient, d'une part $\frac{45}{16}$℔ de plomb, qui, à raison de $\frac{19}{2}$# la livre, coûteront $\frac{675}{32}$#; de l'autre $\frac{15}{16}$℔ de cuivre qui, à raison de $\frac{19}{2}$# la livre, coûteront $\frac{285}{32}$#; la somme de ces deux prix donnera 30# pour le prix du 2ème lingot.

Si l'on a bien compris les raisonnemens employés dans les exemples précédens, on sera en état de résoudre tous les *problêmes* dont les solutions ne dépendent que du calcul des nombres concrets incomplexes; les calculs pourront bien être plus longs, mais comme ils seront toujours dirigés par les mêmes raisonnemens, l'élève qui ne s'abandonnera pas aveuglément au *mécanisme du calcul*, ne rencontrera pas de nouvelles dif-

ficultés ; il verra que les nombres compris dans l'énoncé d'un problême, ne sont souvent destinés qu'à déterminer ceux qui doivent entrer dans le calcul ; enfin, il demeurera convaincu que les questions de l'arithmétique ne peuvent jamais conduire à des opérations différentes de celles que nous avons indiquées. La *théorie des nombres complexes*, que nous allons exposer, confirmera l'exactitude de ces observations.

Nombres concrets complexes.

216. *Les nombres complexes embrassent ;* 1°. *Les* MONNAIES ; 2°. *la mesure du* TEMPS ; 3°. *les* POIDS ; 4°. *les* LONGUEURS *en ligne droite ;* 5°. *les longueurs* CIRCULAIRES ; 6°. *les* SURFACES, *ou étendues en longueur et largeur ;* 7°. *les* VOLUMES *ou* SOLIDITÉS, *qui mesurent les trois dimensions de l'étendue, c'est-à-dire l'étendue en longueur largeur et épaisseur.* Les nombres complexes des trois dernières espèces, dépendent de la *Géométrie* et de la *Trigonométrie ;* nous les renvoyons en conséquence au *supplément*, qui contient les calculs numériques, relatifs à ces deux sciences. Nous ne parlerons donc ici que des monnaies, du temps, des poids et des longueurs en ligne droite. Voici un tableau des rapports de grandeur de leurs subdivisions principales, et des *signes* adoptés pour abréger leur écriture :

1°. MONNAIES...	Une *pistole* vaut *dix livres tournois*, ou 10₶.
	Une *livre tournois*, ou 1₶, vaut 20 *sous*, ou 20ſ.
	Un *sou*, ou 1ſ, vaut 12 *deniers*, ou 12₰.
2°. TEMPS......	Un *siècle*.......... vaut 100 *années*.
	Une *année*, ou 1^{a}, vaut 12 *mois*, ou 12^{m}.
	Un *mois*... ou 1^{m}, vaut 30 *jours*, ou 30^{j}.
	Un *jour*.... ou 1^{j}, vaut 24 *heures*, ou 24^{h}.
	Une *heure*, ou 1^{h}, vaut 60 *minutes*, ou $60'$.
	Une *minute*, ou $1'$, vaut 60 *secondes*, ou $60''$.
3°. POIDS	Une *livre poids*, ou 1℔, vaut 2 *marcs*, ou 2^{m}.
	Un *marc*....... ou 1^{m}, vaut 8 *onces*, ou 8°.
	Une *once*....... ou 1°, vaut 8 *Gros*, ou 8ʒ.
	Un *Gros*........ ou 1ʒ, vaut 3 *deniers*, ou 3^{d}.
	Un *denier*..... ou 1^{d}, vaut 24 *grains*, ou 24^{g}.

4°. LONGUEURS.

Une *toise*, ou 1^{t}, vaut 6 *pieds*, ou 6^{pi}.
Un *pied*, ou 1^{pi}, vaut 12 *pouces*, ou 12^{po}.
Un *pouce*, ou 1^{po}, vaut 12 *lignes*, ou 12^{li}.
Une *ligne*, ou 1^{li}, vaut 12 *points*, ou 12^{pt}.
Une AUNE, ou 1^{a}, vaut 3 pieds 7 pouces 10 lignes 10 points, ou $3^{pi}\,7^{po}\,10^{li}\,10^{pt}$.
Le *degré* terrestre, qui exprime la 360*eme* partie de la circonférence de la terre, vaut 25 *petites lieues*. Une *petite lieue* vaut environ 2280 toises, et une *grande lieue* vaut 3000 toises. Le pas ordinaire est estimé de 2 pieds 6 pouces; le pas géométrique, ou la brasse, est de 5 pieds.

Ces tables contiennent les rapports des mesures les plus usitées. La connaissance complète, des mesures des différens pays, de leurs noms et de leurs rapports, exigerait à elle seule, un ouvrage fort étendu; chaque ville a ses mesures particulières, essentiellement différentes de celles des villes voisines; une mesure de même nom, exprime des quantités différentes; dans le même lieu, chaque profession a ses mesures particulières; enfin la multitude des mesures, met dans l'impossibilité de les retenir, ce qui ouvre un vaste champ aux fripons de toute espèce. Nous verrons bientôt que le *système des nouvelles mesures*, fait disparaître ces inconvéniens. Nous nous contenterons ici de faire quelques réflexions sur les *mesures anciennes* les plus usitées. Les mesures relatives au temps exigent quelques observations. L'année, déterminée par le cours du soleil, est composée de 365 jours, 5 heures, 49 minutes, 12 secondes (*). Pour plus de com-

(*) La durée de l'année, déterminée par le cours du soleil, et qui pour cela est appelée indifféremment *solaire astronomique ou tropique*, n'a pas été fixée invariablement par les anciens astronomes. L'année des Égyptiens était composée de 12 mois de chacun 30 jours, à la fin desquels on ajoutait cinq jours nommés *épagomènes*, pour faire le nombre 365; mais comme il restait au bout de chaque année environ 6 heures qu'on négligeait, il arrivait de là que tous les 4 ans chaque mois rétrogradait d'un jour, de manière que dans l'espace de 1461 ans, après avoir parcouru l'un après l'autre toutes les saisons, ils se retrouvaient au même point où ils étaient au commencement, avec la différence d'une année entière sur le total.

Jules-César fut le premier qui entreprit la réformation du calendrier romain, 30 ans avant l'ère vulgaire. SOSIGÈNE, astronome célèbre, qu'il chargea

modité, on néglige les heures les minutes et les secondes, et l'on compte 365 jours dans *l'année commune*. La somme des heures minutes et secondes négligées, s'élève à 23 heures 16 minutes 48″ tous les 4 ans, ce qui fait un jour moins 43 minutes 12 secondes; on corrige donc une partie de l'erreur, en comptant *à chaque* révolution de 4 ans, un jour de plus dans l'année, que l'on appelle *bissextile;* et pour corriger l'erreur occasionnée par les 43 minutes 12″ qui manquent tous les 4 ans au jour que l'on ajoute, on est convenu que les années *séculaires* ne seraient bissextiles que tous les 400 ans; ainsi, *l'année commune est de* 365 *jours*, *l'année* BISSEXTILE *est de* 366 *jours*. Le second mois de l'année commune est de 28 jours, celui de l'année bissextile est de 29 jours. Les noms des anciens mois sont connus de tout le

---

de cette commission, fixa l'équinoxe du printemps au 25 mars, et la durée de l'année solaire à 365 jours 6 heures : les six heures qui restaient au bout de chaque année, formèrent tous les 4 ans un jour de plus qui fut ajouté par Jules-César au mois de février qui, n'en ayant que 28 les années communes, en eut 29 à chaque révolution de 4 ans; cette quatrième année fut nommée *bissextile*. A-peu-près dans le même temps, et à l'imitation de Jules-César, les astronomes d'Alexandrie ajoutèrent tous les quatre ans un *épagomène* à leur année.

Mais l'erreur ne disparut pas entièrement. La durée de l'année solaire ayant plusieurs minutes de moins que 365 jours 6 heures, comme nous le verrons ci-après, l'equinoxe du printemps fixée au 25 de mars, devait précéder de quelques jours après une révolution de quelques siècles; en effet; vers la fin du premier siècle de l'ère vulgaire, différens astronomes observèrent que l'équinoxe du printemps devançait déjà d'un jour l'époque fixée par SOSIGÈNE, mais toutes ces observations furent sans succès jusqu'en l'an 325, époque du premier concile de Nicée. Les pères de ce concile, sans chercher de remède à la cause de la précession des équinoxes, qu'ils ignoraient sans doute, fixèrent à leur tour l'equinoxe du printemps au 21 mars au lieu du 25. Le mal continua comme par le passé, et l'erreur se perpétua, malgré une foule de réclamations, jusqu'en l'an 1582 que GRÉGOIRE XIII, alors souverain pontife, publia un nouveau calendrier, qui depuis a été appelé *Calendrier Grégorien*. Les plus célèbres astronomes furent appelés à Rome pour travailler à cette réforme; le souverain pontife avait employé dix ans à discuter les formules qui lui furent présentées : celle des frères *Aloysio* et *Antonio Lilio*, qu'il adopta, fixe la durée de l'année solaire, à 365 jours 5 heures 49 minutes 12 secondes. 1257 ans s'étaient écoulés depuis la fixation de l'équinoxe du printemps au 21 mars par le concile de Nicée; la précession était de dix jours; pour

monde ; ils se succèdent ainsi : 1er, *janvier* ; 2ème, *février* ; 3ème, *mars* ; 4ème, *avril* ; 5ème, *mai* ; 6ème, *juin* ; 7ème, *juillet* ; 8ème, *août* ; 9ème, *septembre* ; 10ème, *octobre* ; 11ème, *novembre* ; 12ème, *décembre*. Ces mois ne sont pas composés du même nombre de jours ; mais afin de simplifier les calculs ordinaires, on compte 30 jours dans un mois, ensorte que l'année n'est comptée que pour 360 jours. L'augmentation progressive des monnaies a fait disparaître les pièces d'un denier et d'une *obole* ; le denier valait 2 oboles ; le liard vaut 3 deniers. Les pièces qui existaient avant la révolution, étaient ; pour les *monnaies d'or*, le *double louis*, valant 48# ; le *louis*, de 24# ; le *demi-louis*, de 12#. Pour les *monnaies d'argent* ; *l'écu* de 6#, le *petit écu* de 3# ; les

---

y remédier, on retrancha dix jours de l'année 1582, en comptant le 15 octobre au lieu du 5 ; et pour anéantir cette cause d'erreur, on a fixé les années *bissextiles* tous les 4 ans comme auparavant, excepté les années séculaires qui ne sont *bissextiles* que tous les 400 ans ; ainsi, à dater de 1582, époque de la réforme, les années 1600, 1700, 1800 n'ont point été *bissextiles*. L'an 1900 n'aura pareillement que 365 jours ; mais l'an 2000 sera *bissextil*, et ainsi de 4 en 4 siècles : cette nouvelle computation rendra les erreurs plus rares, mais elle n'en tarit pas la source.

En effet, il est prouvé par une longue suite d'observations modernes comparées aux anciennes, que la durée de l'année solaire est de 365 jours 5 heures 48 minutes 45 secondes ; mais le calendrier Grégorien suppose 49′ 12″ au lieu de 48′ 45″, il diffère donc de 27 secondes en plus, ce qui donnera un jour de plus après une révolution de 3200 ans, l'erreur n'est donc pas détruite.

Puisque la durée de l'année solaire est fixée d'après les observations constantes des astronomes modernes, à 365j 5h 48′ 45″, un raisonnement simple va nous conduire, à l'aide du calcul, à fixer irrévocablement le retour constant des équinoxes du printemps au 21 mars de chaque année. En effet, supposons pour un instant que la durée de l'année solaire soit de 365 jours 6 heures, ces 6 heures en plus formeront tous les 4 ans 24 heures, ou 1 jour ; mais au lieu de six heures, il n'y a réellement que 5 heures 48′ 45″, c'est-à-dire 11′ 15″ en moins. Cette quantité, répétée 4 fois, donne 45′ ; le jour que l'on ajoute à chaque année *bissextile*, tous les 4 ans, n'a donc que 23h 15′ au lieu de 24 heures, c'est-à-dire 45′ en moins : or 45′ répétées 32 fois, ou, ce qui est la même chose, 11′ 15″ répétées 128 fois, donnent 1440′, ou 24 fois 60′, ou 24 heures ; d'où il suit qu'en ne donnant à chaque 128ème année que 365 jours, l'équinoxe du printemps reviendra au même instant où elle était 128 ans auparavant, ce qui arrivera ainsi à chaque révolution de 128 ans, qui pour cet effet pourrait être appelée CYCLE ÉQUINOXIAL.

pièces, de 24^s, de 12^s et de 6^s. Pour la *monnaie de cuivre*, ou *billion ;* la pièce de 2^s, le sou qui vaut 4 liards ; les pièces de six liards, ou de 18 deniers, etc. Dans les comptes, on calcule encore par livres sous et deniers ; *six-blancs* valent deux sous et demi. Les *livres de poids*, offrent beaucoup de variétés ; la livre de Paris est de 16 onces ; mais dans d'autres villes, elle est de 14 onces et de 12 onces, particulièrement pour les objets de *pharmacie*.

Nous avons dit (n° 132), qu'on est convenu de supprimer le mot *plus*, lorsqu'il est destiné à indiquer l'addition d'une fraction à un entier ; ensorte que $2\frac{3}{5}$, exprime 2 *plus* $\frac{3}{5}$; on a étendu la même abréviation aux nombres concrets complexes, en omettant le mot *plus*, qui devrait séparer leurs différentes parties ; on a également omis le *signe*, ou le nom, de l'espèce d'unité exprimée par la fraction ordinaire qui peut faire partie d'un nombre complexe ; ensorte que *la fraction ordinaire qui peut terminer un nombre complexe, exprime toujours une fraction de la plus petite espèce d'unité énoncée*. Ainsi, par exemple ; $18^{\#}\ 4^s\ 6^d\ \frac{2}{3}$, est une expression abrégée qui signifie, 18 livres tournois plus 4 sous plus 6 deniers plus $\frac{2}{3}$ de denier ; de même, $16^t\ 3^{pi}\ \frac{7}{5}$, valent 16 toises plus 3 pieds plus $\frac{7}{5}$ de pied ; 4 aunes $\frac{5}{8}$ expriment 4 aunes plus les $\frac{5}{8}$ d'une aune ; $2^{\#}\ 0^s\ 0^d\ \frac{2}{3}$, expriment, 2 livres tournois plus deux tiers de denier ; $2^{\#}\ \frac{2}{3}$ expriment $2^{\#}$ plus $\frac{2}{3}$ de livre ; etc. Ces observations sont utiles pour prévenir les erreurs causées par l'obscurité des *signes*.

217. La *conversion des nombres complexes en nombres incomplexes* faisant dépendre le calcul des premiers nombres de celui des seconds, que l'on connaît, il est de la plus grande importance de donner une méthode générale pour passer des uns aux autres. Cette méthode repose sur quelques principes que nous allons d'abord établir. Dans les usages ordinaires, on soumet au calcul, les *monnaies*, le *temps*, les *poids*, et les *longueurs* ; 1°. *pour les monnaies ;* la *livre tournois* est considérée comme *unité principale ;* elle se divise en 20^s, et le sou en 12^d ; ensorte que l'unité principale étant $1^{\#}$, sa 1ère subdivision est 1^s, et sa 2ème subdivision est 1^d. Le sou valant 12^d, la livre composée de

20^s, vaut 20 fois 12^d, ou 240 deniers : 2°. *pour les temps;* l'année est prise ordinairement pour *unité principale*, elle se divise en 12 mois, le *mois* en 30^j, le jour en 24 *heures*, l'heure en 60 minutes, et la *minute* en 60 *secondes ;* on s'arrête aux secondes; le mois étant compté pour 30 jours, l'année de 12 mois se compte pour, 12 fois 30^j, ou 360^j. Lorsqu'on veut un peu plus d'exactitude on compte l'année de 365^j; enfin lorsqu'on veut pousser l'exactitude jusqu'aux secondes, on compte l'année pour 365^j 5^h 49$'$ 12$''$. Nous établirons nos calculs en comptant 360^j dans l'année ; on en déduira facilement comment on devrait opérer dans les deux autres hypothèses; ainsi l'unité principale sera 1^a, sa 1ère subdivision sera 1^m, sa 2ème 1^j, sa 3ème 1^h, sa 4ème 1$'$, sa 5ème 1$''$. Comme 1^j vaut 24^h, l'année, de 360^j, vaut 360 fois 24^h, ou 8640^h; mais 1^h vaut 60$'$, les 8640^h de l'année se composent donc, de 8640 fois 60$'$, ou de 518400 minutes; or 1$'$ se divise en 60$''$, les 518400$'$ de l'année valent donc 518400 fois 60$''$, ou 31104000 secondes ; on néglige souvent les secondes ; 3°. *pour les poids*, l'unité principale est la *livre poids*, et ses subdivisions se succèdent ainsi, *marcs*, *onces*, *gros*, *deniers*, *grains*. 1^m vaut 8°, la livre composée de 2^m, vaut donc 16°; mais 1° contient 8 gros ; une livre de 16° contient donc, 16 fois 8 gros, ou 128 gros ; le gros se divise en 3 deniers, la livre de 128 gros vaut donc, 128 fois 3^d, ou 384 deniers; enfin comme 1^d vaut 24 grains, une livre composée de 384 deniers, vaut 384 fois 24 grains, ou 9216^g : 4°. *pour les longueurs;* la *toise* étant prise comme unité principale, ses subdivisions sont, le *pied*, le *pouce*, la *ligne*, et le *point;* on s'arrête ordinairement aux lignes. 1^{pi} valant 12^{po}, une toise, de 6^{pi}, contient 6 fois 12^{po}, ou 72^{po}; or 1^{po} se divise en 12^{li}, la toise, de 72^{po}, vaut donc 72 fois 12^{li}, ou 864^{li}; enfin, comme une ligne contient 12 points, une toise, de 864 lignes, vaut 864 fois 12 points, ou 10368 points. Si l'on réunit ce qui précède, on verra, que les rapports des subdivisions principales de chaque espèce d'unité concrète, sont compris dans le tableau suivant :

1°. MONNAIES.. 1^{tt} vaut 20^s ; 1^s vaut 12^d ; 1^{tt} est équivalente à 20^s, ou à 240^d

2°. TEMPS. { 1^a vaut 12^m ; 1^m vaut 30^j ; 1^j vaut 24^h ; 1^h vaut 60$'$; 1$'$ vaut 60$''$
1^a est équivalente, à 12^m; à 360^j, à 8640^h, à 518400$'$, à 31 104 000$''$,

3°. Poids. { 1℔ vaut 2^{m} ; 1^{m} vaut 8° ; 1° vaut 8G ; 1G vaut 3^{d} ; 1^{d} vaut 24^{g}.
1℔ est équivalente, à 2^{m}, à 16°, à 128G, à 384^{d}, à 9216^{g}.

4°. Longueurs. { 1^{t} vaut 6^{pi} ; 1^{pi} vaut 12^{po} ; 1^{po} vaut 12^{li} ; 1^{li} vaut 12^{pt}.
1^{t} est équivalente, à 6^{pi}, à 72^{po}, à 864^{li}, à 10368^{pt}.

La nature de certaines questions pouvant engager à choisir pour *unité principale*, une des subdivisions de la plus haute unité concrète, *nous entendrons toujours par* UNITÉ PRINCIPALE, *la plus haute unité du nombre complexe que nous considérerons, et sa plus petite unité sera la dernière subdivision de son unité principale. Par* UNITÉS FRACTIONNAIRES, *nous entendrons toujours les unités inférieures à l'unité principale.* Ainsi, la livre tournois est l'unité principale du nombre complexe $12^{\#}\ 5^{s}\ 7^{d}\ \frac{2}{3}$; ses unités principales sont $12^{\#}$, ses unités fractionnaires sont 5^{s}, 7^{d}, et $\frac{2}{3}$; sa plus petite unité est un tiers de denier. Dans le nombre complexe $7^{po}\ 2^{li}\ 8^{pt}\ \frac{3}{4}$, l'unité principale est le pouce, sa 1ère subdivision est la ligne, sa 2ème subdivision est le point et sa plus petite unité fractionnaire est un quart de point.

218. Il est souvent utile de déterminer combien un nombre composé d'unités concrètes d'une certaine grandeur, contient d'unités concrètes d'une autre grandeur ; voici la règle à suivre : *Pour découvrir combien un nombre incomplexe, composé d'unités concrètes d'une certaine grandeur, contient d'unités concrètes d'une autre grandeur ; cherchez combien de fois la plus grande unité contient la plus petite, et alors multipliez ou divisez le nombre des unités du nombre proposé, par le nombre de fois que la plus grande unité contient la plus petite, selon que la nouvelle unité sera la plus petite ou la plus grande ; dans le 1er cas, le produit exprimera de combien des nouvelles unités le nombre proposé se compose; dans le 2ème cas, l'entier obtenu au quotient exprimera le nombre des nouvelles unités et le reste sera composé des anciennes unités ;* cette règle fournit les deux suivantes :

219. *Pour convertir un nombre incomplexe, composé d'unités concrètes d'une certaine grandeur, en unités plus petites ; on multipliera le nombre abstrait de ses unités, par le nombre qui marque combien chacune des unités auquel il est rapporté vaut des unités auxquelles on veut le rapporter ; le produit exprimera*

le nombre des nouvelles unités. Pour convertir $4^{\#}$ en sous ; on multipliera le nombre 4, des livres, par le nombre 20, qui exprime combien chaque livre vaut de sous ; le produit 80 exprime le nombre des sous ; ensorte que $4^{\#}$ valent 80^{s} ; pour apercevoir la raison de ce procédé, il suffit d'observer que $1^{\#}$ valant 20^{s}, les $4^{\#}$ valent 4 fois 20^{s}, ou 80^{s}. De même, s'il s'agit de convertir 3^{pi} en lignes ; on multipliera le nombre 3, des pieds, par le nombre 144, qui marque combien chaque pied vaut de lignes ; le produit 432, exprime le nombre des lignes ; ensorte que 3^{pi} convertis en lignes valent 432 lignes ; cela est évident, car 1^{pi} valant 144 lignes, les 3^{pi} valent 3 fois 144 lignes, ou 432 lignes. Si l'on veut convertir le nombre concret 2 onces, en deniers ; on cherchera d'abord combien chaque once vaut de deniers ; à cet effet, on dira : une once vaut 8 gros, et 1 gros vaut 3 deniers ; chaque once, composée de 8 gros, vaut donc 24 deniers ; multipliant le nombre 2, des onces, par le nombre 24, qui marque combien chaque once vaut de deniers, le produit 48 exprimera le nombre des deniers ; cela est évident, car 1° valant 24^{d}, les 2° valent 2 fois 24^{d}, ou 48^{d}. On trouverait, de la même manière ; que 37^{pi} valent 5328 lignes, que 3 marcs valent 13824 grains, que $3^{\#}$ valent 720 deniers, etc.

220. *Pour extraire d'un nombre incomplexe, composé d'unités concrètes d'une certaine grandeur, les unités d'un ordre supérieur qu'il peut contenir ; il suffit de diviser le nombre de ses unités, par le nombre qui exprime combien il faut des unités auxquelles il est rapporté, pour composer une des unités de l'ordre supérieur demandé ; les unités du quotient exprimeront le nombre d'unités de l'ordre supérieur contenues dans le nombre proposé, et le reste sera composé d'unités égales à celles du nombre donné*. Par exemple ; si l'on veut extraire du nombre 869 lignes, les pieds qu'il peut contenir ; on divisera le nombre 869, des lignes, par le nombre 144, qui marque combien il faut de lignes pour composer un pied, on trouvera 6 au quotient et 5 de reste ; les 6 unites du quotient exprimeront le nombre des pieds et le reste 5 sera le nombre des lignes ; ensorte que 869 lignes valent 6 pieds 5 lignes ; en voici la preuve : 1^{pi} vaut 144 lignes, les 6 pieds valent donc 864 lignes, les 6 pieds 5 lignes valent donc effec-

on ajoutera le numérateur de la fraction; le résultat exprimera le nombre total des plus petites unités du nombre proposé. S'il s'agit du nombre 5# 8ſ 6ᵈ $\frac{6}{7}$, dont la plus petite unité est un septième de denier; pour trouver le nombre total de ses plus petites unités, on multipliera le nombre 5 des livres par 20, au produit 100 on ajoutera le nombre 8 des sous; la somme 108 multipliée par 12 donnera 1296; à ce produit on ajoutera le nombre 6 des deniers, ce qui donnera 1302; cette somme multipliée par le dénominateur 7 de la fraction de denier $\frac{6}{7}$, donnera un produit 9114, auquel on ajoutera le numérateur 6; la somme 9120, exprimera le nombre des septièmes de denier qui composent le nombre complexe 5# 8ſ 6ᵈ $\frac{6}{7}$; ensorte que ce dernier nombre rapporté à sa plus petite unité est 9120 septièmes de denier. Pour apercevoir la légitimité de ce procédé, il suffit d'observer; que 1# valant 20ſ, les 5# valent 5 fois 20ſ, ou 20 fois 5ſ, ou 100ſ; ces 100ſ augmentés des 8ſ du nombre proposé donnent 108ſ pour la valeur des 5# 8ſ converties en sous; or 1ſ vaut 12ᵈ, les 108ſ valent donc 108 fois 12 deniers, ou 12 fois 108 deniers, ou 1296ᵈ; ces 1296ᵈ augmentés des 6ᵈ, qu'il y avait déjà, donnent 1302ᵈ, pour la valeur de 5# 8ſ 6ᵈ; enfin, comme 1ᵈ vaut 7 septièmes de denier, les 1302ᵈ valent 1302 fois 7 septièmes de denier, ou 7 fois 1302 septièmes de denier, ou 9114 septièmes de denier; mais le nombre proposé contenait déjà 6 septièmes de denier, la totalité des septièmes de denier qui composent le nombre 5# 8ſ 6ᵈ $\frac{6}{7}$ est donc effectivement 9120 septièmes de denier, comme l'avait donné la règle générale.

2°. Pour rapporter à sa plus petite unité, un nombre complexe composé d'années et de subdivisions d'années; on se rappellera que l'année vaut 12 mois, qu'un mois vaut 30 jours, qu'un jour vaut 24 heures, qu'une heure vaut 60 minutes, qu'une minute vaut 60 secondes, et qu'une fraction dont le numérateur est égal au dénominateur vaut l'unité; on en déduira alors cette règle générale. *Pour rapporter à sa plus petite unité un nombre composé d'*ANNÉES*, de mois, de jours, d'heures, de minutes, de secondes et d'une fraction de seconde; multipliez le nombre des années par*

12; *ajoutez au produit le nombre des mois, la somme exprimera le nombre total des mois; cette somme multipliée par 30 et augmentée du nombre des jours, exprimera le nombre total des jours; multipliez ce dernier nombre par 24, ajoutez au produit le nombre des heures; la somme exprimera la totalité des unités d'heure; multipliez cette dernière somme par 60, ajoutez au produit le nombre des minutes; vous aurez le nombre total des unités de minutes; multipliez ce nombre de minutes par 60, ajoutez au produit le nombre des secondes; la somme sera le nombre total des unités de secondes du nombre complexe proposé; enfin multipliez ce nombre de secondes par le dénominateur de la fraction de seconde, ajoutez au produit le numérateur de cette fraction; la somme exprimera le nombre total des plus petites unités du nombre proposé.* Pour appliquer cette règle au nombre complexe.

1 an 8 mois 17 jours 3 heures $\frac{3}{7}$.

On multipliera 1 par 12; au produit 12 on ajoutera 8, ce qui donnera 20; on multipliera 20 par 30; au produit 600, on ajoutera 17, ce qui donnera 617; cette somme multipliée par 24 donnera 14808; ce dernier nombre augmenté de 3 donnera 14811, que l'on multipliera par le dénominateur 7 de la fraction $\frac{3}{7}$; au produit 103677 on ajoutera le numérateur 3; la somme 103680, exprimera de combien de septièmes d'heure le nombre complexe proposé se compose; ensorte que $1^a\,8^m\,17^j\,3^h\frac{3}{7}$ valent 103680 septièmes d'heure, ou $\frac{103680^h}{7}$. Il est facile d'apercevoir ce qui a conduit aux calculs précédens; en effet; comme une année vaut 12 mois, les $1^a\,8^m$ valent 12 mois plus 8 mois, ou 20 mois; chaque mois est de 30 jours, les 20 mois valent donc 20 fois 30 jours, ou 30 fois 20 jours, ou 600 jours; ces 600 jours augmentés des 17^j du nombre complexe proposé, donnent 617^j pour la valeur de $1^a\;8^m\;17^j$; mais chaque jour se divise en 24 heures, les 617 jours expriment donc 617 fois 24 heures, ou 24 fois 617 heures, ou 14808 heures, lesquelles jointes aux 3 heures qu'il y avait déjà, donnent 14811 heures, pour la valeur des $1^a\,8^m\,17^j\,3^h$; or 1^h vaut 7 septièmes d'heure, les 14811^h valent donc 14811 fois 7 septièmes d'heure, ou 7

fois 14811 septièmes d'heure, ou 103 677 septièmes d'heure; mais le nombre proposé contient en outre 3 septièmes d'heure; le nombre total des 7èmes d'heure, est donc effectivement 103680. Ce dernier calcul met en évidence l'exactitude de la règle générale.

3°. Pour rapporter à sa plus petite unité un nombre complexe composé de livres poids et des subdivisions de cette livre, on se rappellera, qu'une livre poids vaut 2 marcs, qu'un marc vaut 8 onces, qu'une once vaut 8 gros, qu'un gros vaut 3 deniers, qu'un denier vaut 24 grains, et qu'une fraction dont les deux termes sont égaux exprime l'unité. On en déduira cette règle générale. *Pour rapporter à sa plus petite unité un nombre complexe composé de* LIVRES POIDS, *de marcs, d'onces, de gros, de deniers, de grains et d'une fraction de grain; multipliez le nombre des livres par 2, ajoutez au produit le nombre des marcs; la somme exprimera le nombre des marcs du nombre complexe proposé; multipliez cette somme par 8, ajoutez au produit le nombre des onces, la somme sera le nombre des unités d'once; multipliez cette dernière somme par 8, ajoutez au produit le nombre des gros, la somme donnera le nombre total des gros; multipliez ce dernier nombre par 3, ajoutez au produit le nombre des deniers, le résultat exprimera le nombre des unités de denier du nombre complexe donné; multipliez le nombre des deniers par 24, ajoutez au produit le nombre des grains, la somme exprimera la totalité des grains; enfin, multipliez cette dernière somme par le dénominateur de la fraction de grain, ajoutez au produit le numérateur de cette fraction, le résultat sera le nombre proposé rapporté à sa plus petite unité.* D'après cette règle, pour rapporter à sa plus petite unité le nombre complexe

$3℔ \quad 1^{m} \quad 5^{on} \quad 7^{G} \quad 2^{d} \quad 10^{grains} \tfrac{3}{4}$,

on multipliera 3 par 2; le produit 6 augmenté d'un donnera 7; à 8 fois 7 on ajoutera 5, ce qui donnera 61; on multipliera 61 par 8; au produit 488 on ajoutera 7, ce qui donnera 495; on multipliera ce nombre par 3; au produit 1485 on ajoutera 2; on multipliera la somme 1487 par 24, au produit 35688, on ajoutera 10, ce qui donnera 35698; enfin, on multipliera 35698 par le dénominateur 4 de la fraction $\frac{3}{4}$; au produit 142792 on

ajoutera le numérateur 3; la somme 142795 est le nombre proposé rapporté à sa plus petite unité, qui est le quart de grain ; ensorte que 3℔ 1^m 5^o 7^G 2^d 10^g $\frac{3}{4}$ valent 142795 quarts de grain, ou $\frac{142795^g}{4}$. Voici un raisonnement qui montre l'exactitude des calculs effectués d'après la règle générale; comme 1℔ vaut 2^m; les 3℔ valent 3 fois 2^m, ou 2 fois 3^m, ou 6^m; ces 6^m joints à 1^m, donnent 7^m, pour la valeur de 3℔ 1^m; mais 1^m vaut 8 onces, les 7 marcs valent donc 7 fois 8 onces, ou 8 fois 7 onces, ou 56 onces; ajoutant les 5 onces, on verra que 3℔ 1^m 5^o valent 61 onces; chaque once est composée de 8 gros; les 61 onces sont donc composées de 61 fois 8 gros, ou de 8 fois 61 gros, ou de 488 gros; ajoutant les 7 gros, on aura 495 gros, pour la valeur des 3℔ 1^m 5^o 7^G; le gros se divise en 3 deniers, les 495 gros se divisent donc en 495 fois 3 deniers, ou en 3 fois 495 deniers, ou en 1485 deniers; si l'on ajoute les 2 deniers, la somme 1487 deniers sera équivalente à 3℔ 1^m 5^o 7^G 2^d; mais 1^d vaut 24 grains; les 1487^d valent donc 1487 fois 24 grains, ou 24 fois 1487 grains, ou 35688 grains; ces derniers augmentés des 10 grains, du nombre proposé, donneront 35698 grains pour la valeur de 3℔ 1^m 5^o 7^G 2^d 10^g; or un grain vaut 4 quarts de grain, les 35698 grains valent donc 35698 fois 4 quarts de grain, ou 4 fois 35698 quarts de grain, ou 142792 quarts de grain; ajoutant les 3 quarts de grain, on aura enfin 142795 quarts de grain pour la valeur du nombre complexe proposé rapporté à sa plus petite unité.

4°. *Pour rapporter à sa plus petite unité un nombre composé de* TOISES, *pieds, pouces, lignes, et d'une fraction de ligne; on multipliera le nombre des toises par* 6, *au produit on ajoutera le nombre des pieds; on multipliera la somme par* 12 *et l'on ajoutera au produit le nombre des pouces; à la somme multipliée par* 12, *on ajoutera le nombre des lignes, la nouvelle somme multipliée par le dénominateur de la fraction de ligne, et augmentée du numérateur de la même fraction, exprimera le nombre des plus petites unités du nombre complexe proposé.* D'après cette règle; si l'on veut rapporter le nombre complexe 4^t 1^{pi} 7^{po} 2^{li} $\frac{2}{5}$ à sa plus petite unité, qui est un cinquième de ligne, on multipliera le nombre 4 des toises par 6, au produit 24 on ajoutera 1; on multipliera la somme 25 par 12,

et l'on ajoutera au produit 300, le nombre 7, des pouces; la somme 307 multipliée par 12 donnera 3684; on ajoutera à ce produit le nombre 2, des lignes, ce qui donnera 3686; enfin cette dernière somme multipliée par le dénominateur 5 de la fraction de ligne $\frac{2}{5}$, et augmentée du numérateur 2, donnera 18432 pour le nombre des cinquièmes de ligne dont se compose le nombre complexe proposé $4^{t}\,1^{pi}\,7^{po}\,2^{li}\,\frac{2}{5}$; ensorte que ce dernier nombre vaut 18432 cinquièmes de ligne, ou $\frac{18432^{li}}{5}$. La raison de ce procédé est facile à apercevoir. En effet; comme 1^{t} vaut 6^{pi}, les 4 toises valent 4 fois 6^{pi}, ou 24^{pi}, les $4^{t}\,1^{pi}$ valent donc 25^{pi}; mais chaque pied vaut 12 pouces; les 25^{pi} valent donc 25 fois 12^{po}, ou 300^{po}, qui avec les 7^{po} que contenait déjà le nombre proposé donnent 307 pouces; or 1^{po} vaut 12^{li}, les 307 pouces valent donc 307 fois 12 lignes, ou 12 fois 307 lignes, ou 3684 lignes, qui jointes aux 2 lignes du nombre proposé donnent 3686 lignes; ensorte que $4^{t}\,1^{pi}\,7^{po}\,2^{li}$ valent 3686 lignes; pour convertir ces lignes en cinquièmes de ligne, on observera que 1^{li} vaut $\frac{5^{li}}{5}$, et que parconséquent les 3686 lignes valent 3686 fois $\frac{5^{li}}{5}$, ou $\frac{18430^{li}}{5}$; cette dernière fraction jointe aux $\frac{2}{5}$ de ligne du nombre proposé donne enfin $\frac{18432^{li}}{5}$, pour la valeur de $4^{t}\,1^{pi}\,7^{po}\,2^{li}\,\frac{2}{5}$. Un raisonnement rigoureux nous a conduit, à multiplier 4 par 6, à ajouter 1 au produit 24, à multiplier la somme 25 par 12, à ajouter 7 au produit 300, à multiplier la somme 307 par 12, à ajouter 2 au produit 3684, à multiplier la somme 3686 par le dénominateur 5 de la fraction $\frac{2}{5}$ et à augmenter le produit 18430, du numérateur 2, ce qui a donné 18432 pour le nombre des cinquièmes de ligne du nombre proposé; ce calcul est celui indiqué par la règle générale. Si l'on applique les quatre règles précédentes aux nombres complexes

$$3^{\#}\,5^{ʃ}\,2^{d};\ 7^{ʃ}\,9^{d}\,\tfrac{1}{3};\ 3^{m}\,12^{j}\,20^{h}\,\tfrac{4}{7};\ 3^{m}\,17^{\prime};\ 2^{lb}\,1^{m}\,1^{o}\,6^{G}\,16^{g};$$
$$3^{G}\,6^{d}\,0^{g}\,\tfrac{2}{3};\ 4^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\,\tfrac{1}{4};\ 2^{po}\,11^{li}\,\tfrac{5}{7}.$$

On trouvera qu'ils sont exprimés par les nombres incomplexes,

$$782^{d};\ \frac{280^{d}}{3};\ \frac{17\,280^{h}}{7};\ 129\,617^{\prime};\ 24\,064^{g};\ \frac{1082^{g}}{3};\ \frac{2679^{li}}{4};\ \frac{250^{li}}{7};$$

222. *Pour rapporter un nombre complexe, à sa plus haute*

unité ; on cherchera d'abord combien il faut de ses plus petites unités pour composer sa valeur (n° 221). Ce nombre divisé par le nombre de fois que l'unité principale contient sa plus petite subdivision, exprimera quelle partie le nombre complexe proposé est de sa plus haute unité. Il en résulte, qu'un nombre complexe rapporté à sa plus haute unité concrète, est exprimé par une fraction de cette unité concrète, dont le numérateur indique combien il faut des plus petites subdivisions de l'unité principale pour composer la valeur du nombre complexe proposé, et dont le dénominateur marque combien de fois l'unité principale contient sa plus petite subdivision ; cette fraction réduite à sa plus simple expression, donnera la FRACTION IRRÉDUCTIBLE *équivalente au nombre complexe proposé.* Appliquons cette règle, à quelques exemples. Soit le nombre complexe $5^{\#}\ 8^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{7}$, dont la plus haute unité est la *livre tournois ;* on le rapportera d'abord à sa plus petite unité, ce qui donnera 9120 septièmes de denier ; or 1^{d} vaut 7 septièmes de denier ; $1^{\#}$, composée de 240^{d}, vaut donc 240 fois 7 septièmes de denier, ou 1680 septièmes de denier ; le nombre 9120, qui indique combien il faut de septièmes de denier pour composer $5^{\#}\ 8^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{7}$, divisé par le nombre 1680, qui exprime combien la livre contient de septièmes de denier, donnera la fraction $\frac{9120}{1680}$, qui se réduit à $\frac{38}{7}$; cette fraction indique quelle partie le nombre complexe proposé est de la livre ; ensorte que le nombre complexe $5^{\#}\ 8^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{7}$ est exprimé, par la fraction irréductible $\frac{38}{7}$ de livre, ou par $\frac{38}{7}^{\#}$. Cela est évident, car $1^{\#}$ valant 1680 septièmes de denier, un septième de denier vaut $\frac{1}{1680}^{\#}$, les 9120 7èmes de denier, qui composent le nombre proposé $5^{\#}\ 8^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{7}$, valent donc en effet 9120 fois $\frac{1}{1680}^{\#}$, c'est-à-dire $\frac{9120}{1680}^{\#}$, ou $\frac{38}{7}^{\#}$. S'il s'agit du nombre complexe 3℔ $1^{m}\ 5^{o}\ 7^{G}\ 2^{d}\ 10^{g}\ \frac{3}{4}$; on le convertira d'abord en quarts de grain, ce qui donnera 142795 quarts de grain ; or un grain vaut 4 quarts de grain ; la livre poids, composée de 9216 grains, vaut donc 9216 fois 4 quarts de grain, ou 36864 quarts de grain ; le nombre 142795, des quarts de grain dont se compose le nombre complexe proposé, divisé par le nombre 36864, des quarts de grain dont

se

se compose une livre poids, donnera $\frac{142795}{36864}$, pour la fraction de livre exprimée par le nombre complexe proposé ; ensorte que $3^{lb}\ 1^{m}\ 5^{o}\ 7^{G}\ 2^{d}\ 10^{g}\ \frac{3}{4}$, valent $\frac{142795}{36864}$ lb. La conversion du nombre complexe $4^{t}\ 1^{pi}\ 7^{po}\ 2^{li}\ \frac{2}{5}$, en fraction de toise s'exécutera d'après les mêmes principes; on le rapportera d'abord à sa plus petite unité, en le convertissant en cinquièmes de ligne; il sera alors exprimé par 18432 cinquièmes de ligne ; or 1^{li} vaut 5 cinquièmes de ligne; la toise, composée de 864 lignes vaut donc 864 fois 5 cinquièmes de ligne, ou 4320 cinquièmes de ligne; le nombre 18432, qui indique de combien de cinquièmes de ligne le nombre proposé se compose, divisé par le nombre 4320, qui marque combien il y a de cinquièmes de ligne dans une toise, donne $\frac{18432}{4320}$ pour la fraction de toise exprimée par le nombre complexe proposé. Voici un raisonnement qui conduit au même résultat, 4320 cinquièmes de ligne valant 1^{t}; un 5e de ligne vaut $\frac{1}{4320}{}^{t}$, les 18432 cinquièmes de ligne, qui composent le nombre complexe $4^{t}\ 1^{pi}\ 7^{po}\ 2^{li}\ \frac{2}{5}$, valent donc 18432 fois $\frac{1}{4320}{}^{t}$, ou $\frac{18432^{t}}{4320}$. La division des deux termes de cette fraction par leur plus grand commun diviseur 288, donne la fraction irréductible $\frac{64^{t}}{15}$, équivalente au nombre complexe proposé. Si l'on applique la même règle aux nombres complexes

$3^{\#}\ 5^{s}\ 2^{d}$; $12^{\#}\ 13^{s}\ 7^{d}$; $6^{\#}\ 19^{s}\ 11^{d}\ \frac{1}{2}$; $7^{s}\ 9^{d}\ \frac{1}{3}$; $4^{s}\ 0^{d}\ \frac{1}{3}$;
$3^{m}\ 12^{j}\ 20^{h}\ \frac{4}{7}$; $2^{a}\ 5^{m}\ 4^{j}\ 8^{h}\ \frac{2}{7}$; $3^{mois}\ 17^{minut.}$;
$3^{lb}\ 1^{m}\ 5^{o}\ 7^{G}\ 2^{d}\ 10^{g}$; $2^{lb}\ 1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 16^{g}$; $3^{G}\ 6^{d}\ 0^{g}\ \frac{2}{3}$;
$2^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$; $4^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{3}{4}$; $2^{po}\ 11^{li}\ \frac{5}{7}$; $3^{t}\ 7^{pi}\ 4^{po}$.

On trouvera qu'ils sont exprimés par les fractions irréductibles

$\frac{782^{\#}}{240}$; $\frac{3043^{\#}}{240}$; $\frac{3359^{\#}}{480}$; $\frac{7^{\#}}{18}$; $\frac{81^{\#}}{400}$; $\frac{2^{a}}{7}$; $\frac{6048^{a}}{14\,689}$; $\frac{129\,617^{a}}{518\,400}$;
$\frac{122\,993^{lb}}{4608}$; $\frac{47^{lb}}{11}$; $\frac{541^{lb}}{13824}$; $\frac{79^{t}}{32}$; $\frac{893^{t}}{1152}$; $\frac{125^{t}}{3024}$; $\frac{38^{t}}{9}$;

223. *Pour rapporter un nombre composé d'unités concrètes de grandeurs différentes, à l'une quelconque des unités concrètes de son espèce ; on rapportera chacune de ses parties à l'unité désignée. La conversion des unités supérieures à l'unité désignée s'effectuera d'après les règles du n° 221, celle des unités inférieures s'exécutera d'après la règle du n° 222. La somme des nombres ainsi rapportés à la même unité, exprimera le ré-*

sultat demandé. Si l'on proposait, par exemple, de convertir $3^{\#}$ $5^{s}\,8^{d}$ en *sous*, on dirait : $3^{\#}$ valent 60^{s} ; 1^{d} vaut $\frac{1}{12}^{s}$; les 8^{d} valent donc $\frac{8}{12}^{s}$, ou $\frac{2}{3}^{s}$; les $3^{\#}\ 5^{s}\ 8^{d}$, se composent donc de 60^{s} de 5^{s} et de $\frac{2}{3}^{s}$; ils valent donc $65^{s}\,\frac{2}{3}$, ou $\frac{197}{3}^{s}$; cette dernière fraction de sou exprime le nombre complexe $3^{\#}\ 5^{s}\ 8^{d}$. Pour convertir $2'\,3^{pi}\,0^{po}\,6^{li}\,\frac{2}{3}$, en *cinquièmes de pouce ;* on convertira d'abord $2'\,3^{pi}$ en pouces, ce qui donnera 180 pouces ; pour convertir $6^{li}\,\frac{2}{3}$ en pouces, on observera que $6^{li}\,\frac{2}{3}$ valent $\frac{20}{3}^{li}$, ou $\frac{20}{3}$ de ligne ; mais 1^{li} vaut $\frac{1}{12}^{po}$, les $\frac{20}{3}$ d'une ligne valent donc les $\frac{20}{3}$ de $\frac{1}{12}^{po}$, ou $\frac{20}{36}^{po}$, ou $\frac{5}{9}^{po}$; les $2'\,3^{pi}$ valent 180 pouces, les $6^{li}\,\frac{2}{3}$ valent $\frac{5}{9}^{po}$, les $2'\,3^{pi}\,6^{li}\,\frac{2}{3}$ valent donc $180^{po}\,\frac{5}{9}$, ou $\frac{1625}{9}^{po}$; or 1^{po} vaut 5 cinquièmes de pouce, les 1625 pouces valent donc 1625 fois 5 cinquièmes de pouce, ou 8125 cinquièmes de pouce ; le nombre complexe proposé vaut donc $\frac{8125 \textit{ cinquièmes de pouce}}{9}$. Si l'on veut rapporter à la toise le nombre complexe $3^{po}\,6^{li}\,\frac{2}{3}$; on rapportera d'abord ce nombre à sa plus petite unité, un tiers de ligne, ce qui donnera 128 tiers de ligne ; pour convertir les 128 tiers de ligne en toises, on cherchera combien il y a de lignes dans la toise ; or $1'$ vaut 864 lignes, ou 864 fois 3 tiers de ligne, ou 2592 tiers de ligne ; chaque tiers de ligne vaut donc $\frac{1}{2592}'$; les 128 tiers de ligne du nombre proposé, valent donc $\frac{128}{2592}'$; ensorte que $3^{po}\,6^{li}\,\frac{2}{3}$ expriment les $\frac{128}{2592}$ d'une toise.

Les règles précédentes donnant les moyens de *convertir les nombres complexes en nombres incomplexes ;* occupons-nous de la solution du problême inverse, et cherchons comment on peut *convertir un nombre incomplexe en nombre complexe.*

224. *Pour convertir une fraction, d'une unité concrète déterminée, en subdivisions de cette même unité, comme elles sont établies par l'usage ; ou, ce qui revient au même, pour convertir une fraction concrète en nombre complexe ; on commencera par réduire cette fraction à sa plus simple expression, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur abstrait ; on divisera alors le numérateur concret de la fraction irréductible, équivalente à la proposée, par son dénominateur abstrait, les unités du quotient et le reste, seront*

composés d'unités concrètes égales à celles du dividende. Le reste, converti en unités de l'ordre immédiatement inférieur à celui de l'unité principale, et divisé par le dénominateur de la fraction irréductible, donnera au quotient des unités égales aux 1^{eres} subdivisions de l'unité principale, et le reste sera composé des mêmes subdivisions ; ce reste converti en unités égales aux 1^{eres} subdivisions de son unité, qui seront les 2èmes de l'unité principale, et divisé par le dénominateur de la fraction irréductible, donnera au quotient des unités égales aux 2èmes subdivisions de l'unité principale, avec un reste composé de ces 2èmes subdivisions. Continuant à convertir chaque reste en unités de l'ordre immédiatement inférieur, et divisant les restes, ainsi convertis, par le dénominateur abstrait de la fraction irréductible équivalente à la proposée, on parviendra à un dividende partiel composé d'unités concrètes égales à la plus petite espèce de subdivision de l'unité principale ; le quotient correspondant, qui peut être composé d'un entier et d'une fraction de la plus petite unité concrète, joint aux quotiens entiers, obtenus dans les divisions précédentes, composera le nombre complexe demandé. Si dans le cours des divisions un reste était zéro, l'opération s'arrêterait, et la réunion des quotiens partiels obtenus composerait le nombre complexe demandé. Appliquons cette règle à quelques exemples. Proposons-nous d'abord de convertir en nombre complexe la fraction concrète $\frac{8640^{\#}}{2640}$; la division de ses deux termes par leur plus grand commun diviseur 240, donnera la fraction irréductible $\frac{36^{\#}}{11}$; divisant $36^{\#}$ par 11, on trouvera $3^{\#}$ au quotient et $3^{\#}$ de reste ; ce reste, converti en 60^{s} et divisé par 11, donnera 5^{s} au quotient et 5^{s} de reste ; le reste 5^{s} vaut 60^{d} ; ces 60^{d} divisés par 11, donnent 5^{d} au quotient, avec un reste 5^{d} ; et comme les subdivisions de la livre ne se poussent pas au-delà des deniers, on indiquera le quotient du reste 5^{d} par le diviseur 11, au moyen de la fraction $\frac{5}{11}$; la somme des quotiens partiels $3^{\#}$, 5^{s}, 5^{d}, $\frac{5}{11}^{d}$, donnera $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}^{d}$ pour la valeur de la fraction $\frac{36^{\#}}{11}$. S'il s'agissait de la fraction $\frac{6480^{\#}}{2640}$; on diviserait ses deux termes par leur plus grand commun diviseur 240, ce qui donnerait la fraction irréductible $\frac{27^{\#}}{11}$;

on diviserait alors $27^{\#}$ par 11, ce qui donnerait $2^{\#}$ au quotient et $5^{\#}$ de reste; on convertirait ces $5^{\#}$ en sous, en multipliant 5 par 20, car $1^{\#}$ valant $20^{ʃ}$, les $5^{\#}$ valent 5 fois $20^{ʃ}$, ou 20 fois $5^{ʃ}$; le produit $100^{ʃ}$, divisé par 11, donnerait $9^{ʃ}$ au quotient et $1^{ʃ}$, ou 12^{d}, de reste; divisant 12^{d} par 11, le quotient serait $1^{d}\,\frac{1}{11}$; ensorte que le quotient total de $27^{\#}$ par 11, est $2^{\#}\;9^{ʃ}\;1^{d}\,\frac{1}{11}$; ce quotient exprime la valeur de la fraction $\frac{27^{\#}}{11}$, équivalente à la proposée. Pour convertir en nombre complexe la fraction concrète irréductible $\frac{12^{ans}}{7}$, qui exprime les $\frac{12}{7}$ d'une année; comme la valeur d'une fraction est exprimée par le quotient de son numérateur par son dénominateur, on divisera 12 ans par 7, ce qui donnera 1 an au quotient, et 5 ans, ou 60 mois de reste; divisant 60 mois par 7, on trouvera 8 mois au quotient avec un reste, 4 mois, ou 120 jours; divisant 120 jours par 7, on trouvera 17 jours au quotient et 1 jour, ou 24 heures, de reste; si l'on veut s'arrêter aux heures, le quotient du reste 24 heures par 7, sera $3^{h}\,\frac{3}{7}$; ensorte que la fraction $\frac{12^{a}}{7}$, est exprimée par le nombre complexe $1^{a}\;8^{m}\;17^{j}\;3^{h}\,\frac{3}{7}$. Pour convertir en nombre complexe la fraction concrète irréductible $\frac{18}{7}$℔; on divisera 18℔ par 7, ce qui donnera 2℔ au quotient et 4℔ de reste; or 1℔ vaut 2^{m}, les 4℔ valent donc 8^{m}; le reste 8^{m} divisé par 7, donnera 1^{m} au quotient, avec un reste 1^{m}, ou 8°; les 8° divisées par 7, donneront 1° au quotient et 1°, ou 8^{G}, pour reste; ce reste divisé par 7 donnera 1^{G} au quotient et 1^{G}, ou 3^{d}, de reste; le reste 3^{d}, divisé par 7, ne donnant pas de deniers au quotient, on le convertira en 72^{g}, qui, divisés par 7, donneront 10 grains $\frac{2}{7}$; la somme des quotiens partiels ainsi obtenus, donnera 2℔ $1^{m}\;1^{o}\;1^{G}\;0^{d}\;10^{g}\,\frac{2}{7}$, pour la valeur de la fraction proposée $\frac{18}{7}$℔. Si l'on veut convertir la fraction $\frac{64}{15}$ de toise, ou $\frac{64^{t}}{15}$, en nombre complexe; on divisera 64^{t} par 15, ce qui donnera 4^{t} au quotient, et 4^{t}, ou 24 pieds, pour reste; ce reste divisé par 15, donnera 1^{pi} au quotient et 9 pieds, ou 108 pouces, de reste; divisant 108 pouces par 15, on obtiendra le quotient 7 pouces avec le reste, 3 pouces, ou 36 lignes; enfin ces 36 lignes divisées par 15 donneront 2 lignes $\frac{6}{15}$, ou 2 lignes $\frac{2}{5}$, pour quotient; ensorte que le quotient total de 64^{t} par 15,

donne $4^{t}\ 1^{pi}\ 7^{po}\ 2^{li}\ \frac{2}{5}$ pour la valeur de la fraction $\frac{64^{t}}{15}$. La conversion de la fraction $\frac{3^{t}}{7}$, en nombre complexe, s'exécutera de la même manière ; on observera d'abord que le quotient de 3 toises par 7, ne contient pas d'unités de toise ; pour obtenir les pieds du quotient, on convertira le dividende 3 toises, en 18 pieds, lesquels divisés par 7, donneront 2 pieds au quotient avec le reste 4 pieds, ou 48 pouces ; divisant 48 pouces par 7, on aura 6 pouces au quotient, avec un reste 6 pouces, ou 72 lignes ; ce reste divisé par 7, donnera le quotient 10 lignes $\frac{2}{7}$; ensorte que la fraction $\frac{3^{t}}{7}$ a pour valeur le nombre complexe $0^{t}\ 2^{pi}\ 6^{po}\ 10^{li}\ \frac{2}{7}$. On trouvera, par des calculs analogues aux précédens, que les fractions

$$\frac{3043^{\#}}{240}\ ;\qquad \frac{972^{\#}}{121}\ ;\qquad \frac{23^{a}}{7}\ ;\qquad \frac{653\text{lb}}{126}\ ;\qquad \frac{181^{t}}{135},$$

sont exprimées par les nombres complexes,

$12^{\#}\ 13^{s}\ 7^{d}$; $8^{\#}\ 0^{s}\ 7^{d}\ \frac{113}{121}$; $3^{a}\ 3^{m}\ 12^{i}\ 20^{h}\ \frac{4}{7}$; $5\text{lb}\ 0^{m}\ 2^{o}\ 7^{G}\ 1^{d}\ 2^{g}\ \frac{2}{7}$; $1^{t}\ 2^{pi}\ 0^{po}\ 6^{li}\ \frac{2}{5}$.

225. *Pour convertir un nombre incomplexe, rapporté à sa plus petite unité concrète, en nombre complexe ; on pourrait le rapporter à sa plus haute unité, d'après la règle du n° 222, la fraction concrète qui en résulterait, réduite à sa plus simple expression et convertie en nombre complexe, d'après la règle du n° 224, exprimerait le nombre complexe demandé. Mais dans la pratique, il est plus commode de suivre le procédé que nous allons indiquer. On commencera par extraire du nombre proposé les unités de l'ordre immédiatement supérieur qu'il peut contenir, ce qui s'exécutera, d'après la règle du n° 220, en divisant le nombre des unités du nombre proposé par le nombre qui exprime combien il faut de ses unités pour composer une unité de l'ordre immédiatement supérieur ; l'entier qu'on obtiendra au quotient, exprimera combien le nombre proposé contient d'unités de l'ordre immédiatement supérieur, et le reste sera le nombre des plus petites unités du nombre complexe demandé ; opérant de la même manière sur l'entier obtenu au quotient, on le divisera par le nombre qui exprime combien il faut de ses unités pour composer une unité de l'ordre immédiatement supérieur, l'entier qu'on obtiendra au quotient, expri-*

mera le nombre de ces dernières unités, et le reste exprimera combien le nombre complexe demandé contient d'unités de l'ordre immédiatement supérieur à celui des unités du reste de la division précédente, continuant à diviser le nombre d'unités de chaque quotient, par le nombre qui exprimera combien il faut d'unités de son espèce pour en former une de l'ordre immédiatement supérieur, on parviendra enfin aux plus hautes unités du nombre complexe demandé, et les nombres d'unités des ordres inférieurs seront exprimés par les restes des divisions successives.

D'après cela, pour convertir en nombre complexe le nombre 2528 lignes; on pourrait le rapporter à sa plus haute unité, ce qui donnerait $\frac{2528^t}{864}$, car une ligne vaut $\frac{1}{864}$ de toise; cette fraction réduite à sa plus simple expression, deviendrait $\frac{79^t}{27}$, et la conversion de cette fraction irréductible en nombre complexe, donnerait $2^t\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$, pour le nombre complexe demandé; mais il est plus simple d'extraire du nombre donné, 2528 lignes, les pouces qu'il contient, en divisant le nombre 2528, des unités de ligne, par le nombre 12, qui marque combien il faut de lignes pour composer un pouce; cela donnera 210 au quotient et 8 de reste; conséquemment, les 2528 lignes valent 210 pouces 8 lignes; on opérera d'une manière analogue pour extraire les pieds contenus dans 210 pouces; ainsi on divisera 210 par 12, ce qui donnera 17 au quotient et 6 de reste; on en conclura que 210 pouces valent $17^{pi}\ 6^{po}$; ensorte que les 2528 lignes valent $17^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$; enfin, comme il faut 6 pieds pour composer une toise, on divisera 17 par 6, ce qui donnera 2 au quotient et 5 de reste; les 17^{pi} valent donc $2^t\ 5^{pi}$; ensorte que les 2528 lignes sont exprimées par le nombre complexe $2^t\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$. On peut observer que les diviseurs successifs 12, 12, 6, sont les nombres qui expriment combien il faut d'unités de chaque ordre pour composer une unité de l'ordre supérieur; car, 12^{li} valent 1^{po}; 12^{po} valent 1^{pi}; 6^{pi} valent 1^t; le dernier quotient 2, a donné le nombre des plus hautes unités et les restes 5, 6, 8, ont exprimé les nombres d'unités des ordres inférieurs; ensorte que la conversion du nombre 2528 lignes, en nombre complexe, s'est réduite : à diviser 2528 par 12, ce

qui a donné 210 au quotient et 8 de reste : on a divisé ensuite 210 par 12, ce qui a donné 17 au quotient et 6 de reste : enfin, on a divisé 17 par 6, ce qui a donné 2 au quotient et 5 de reste ; le dernier quotient 2, joint aux restes 5, 6, 8, a exprimé les nombres d'unités de chaque ordre, du nombre complexe demandé $2^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$. De même, pour convertir 782^{d} en livres sous et deniers; on observera que les diviseurs successifs sont 12 et 20, car 12^{d} valent 1^{s}, et 20^{s} valent 1₶ ; on divisera donc 782 par 12, ce qui donnera 65 au quotient et 2 de reste ; on divisera 65 par 20, cela donnera 3 au quotient et 5 de reste ; le dernier quotient 3, joint aux restes successifs 5, 2, exprime les nombres de livres sous et deniers, du nombre complexe demandé, qui est parconséquent 3₶ $5^{s}\ 2^{d}$. Si le nombre donné était 142795 quarts de grain; comme ce nombre vaut $\frac{142795^{g}}{4}$, on commencerait par effectuer la division indiquée, ce qui donnerait $35698^{g}\,\frac{3}{4}$; la question serait alors réduite à convertir 35698 grains, en unités des ordres supérieurs; pour y parvenir, on formera le tableau des rapports qui existent entre les diverses subdivisions de la *livre-poids*, en remontant des plus petites subdivisions vers les plus grandes.

24^{g} font 1^{d}; 3^{d} font 1c ; 8c font 1° ; 8° font 1^{m} ; 2^{m} font 1℔.

Les nombres 24, 3, 8 ; 8, 2, qui marquent combien il faut d'unités de chaque ordre pour en former une de l'ordre supérieur, expriment les diviseurs que l'on doit employer pour convertir 35698 grains en nombre complexe ; ensorte que les diviseurs se succèdent ainsi. . . . 24, 3, 8, 8, 2. On divisera donc 35698 par 24, ce qui donnera 1487 au quotient et *10 de reste*, divisant 1487 par 3, on trouvera 495 au quotient et *2 de reste*, divisant 495 par 8, on aura 61 au quotient et *7 de reste*; la division de 61 par 8, donne 7 au quotient avec le *reste 5*; enfin la division de 7 par le dernier diviseur 2, donne *3* au quotient et *1 de reste*; le dernier quotient *3*, joint aux restes successifs *1*, *5*, *7*, *2*, *10*, donne les nombres de *livres*, *marcs*, *onces*, *gros*, *deniers*, *et grains*, contenus dans 35698 grains ; ce dernier nombre exprime donc 3℔ $1^{m}\ 5^{o}$ 7c $2^{d}\ 10^{g}$; le nombre proposé, 142795 quarts de grain, composé de $35698^{g}\,\frac{3}{4}$, est donc

équivalent au nombre complexe 3℔ 1^{m} 5^{o} 7_{G} 2^{d} $10^{g}\frac{3}{4}$; si l'on veut vérifier l'exactitude du calcul, on convertira ce dernier nombre complexe en quarts de grain ; on trouvera qu'il est effectivement composé de 142 795 quarts de grain.

Lorsqu'on fait usage de cette méthode abrégée, on peut trouver des restes égaux à zéro ; on doit les conserver dans l'écriture du nombre complexe, afin de conserver aux autres restes le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Par exemple ; pour convertir 487 deniers, en livres sous et deniers ; on divisera 487 par 12, ce qui donnera 40 au quotient et 7 *de reste* ; on divisera ensuite 40 par 20, ce qui donnera le quotient exact 2, avec le *reste* 0 ; le dernier quotient 2 joint aux restes précédens 0 et 7, déterminera le nombre complexe demandé $2^{tt}\ 0^{s}\ 7^{d}$; ce nombre converti en deniers, vaut effectivement 487 deniers. On trouverait de la même manière que 31829 points, valent $3^{t}\ 0^{pi}\ 5^{po}\ 0^{li}\ 5^{pt}$; voici le détail du calcul ; on a barré les diverses parties du nombre complexe.

$31\ 829^{pt}$	12	2652^{li}	12	221^{po}	12	18^{pi}	6
Reste. 5^{pt}	2652^{li}	Reste 0^{li}	221^{po}	Reste 5^{po}	18^{pi}	Reste 0^{pi}	3^{t}

Si dans le cours des divisions, un dividende était moindre que son diviseur, cela indiquerait que le nombre complexe proposé ne contient pas d'unités de tous les ordres ; le dividende, moindre que le diviseur, joint aux restes précédens, déterminerait encore le nombre d'unités de chaque ordre du nombre complexe demandé, et l'espèce de ces unités s'obtiendrait, en commençant par les plus petites, et remontant vers les plus grandes. Par exemple ; pour convertir 269 grains en nombre complexe, on divisera 269 par 24, ce qui donnera 11 au quotient et 5 *de reste ;* on divisera 11 par 3, ce qui donnera 3 au quotient et 2 *de reste ;* il s'agira alors de convertir 3 en unités d'un ordre supérieur, en le divisant par 8, cette division ne pouvant s'effectuer, on en conclura que 3 est de l'ordre des plus grandes unités contenues dans le nombre proposé, on le joindra aux restes 2 et 5, et on aura 3, 2, 5, pour le nombre d'unités de chaque ordre ; remontant des plus petites unités aux plus grandes, on

verra : que le chiffre *5* exprime des *grains* : que *2* exprime des *deniers* : enfin que *3* représente des *gros* ; ensorte que le nombre complexe cherché est 3 gros 2 deniers 5 grains.

226. *On voit par ce qui précède (n° 222), que tout nombre complexe peut être converti en une fraction irréductible de même valeur. Sous ce point de vue, le calcul des nombres complexes est ramené à celui des fractions, que l'on connaît. Ainsi; lorsqu'on voudra opérer sur des nombres complexes, on les exprimera d'abord par des fractions irréductibles de même valeur, et alors ; s'il s'agit d'une* ADDITION *ou d'une* SOUSTRACTION, *on l'effectuera sur les fractions irréductibles ; la fraction qu'on obtiendra, convertie en nombre complexe, exprimera le résultat cherché ; s'il s'agit d'une* MULTIPLICATION, *comme le multiplicateur est essentiellement abstrait, on devra faire abstraction de la nature des unités de la fraction qui détermine le multiplicateur, et la fraction-produit, qui sera de l'espèce du multiplicande, convertie en nombre complexe, exprimera le produit demandé ; enfin, dans la* DIVISION : *si le dividende et le diviseur sont rapportés à la même unité, on fera abstraction de l'espèce de leurs unités ; le quotient abstrait que l'on obtiendra, sera celui demandé : si le dividende étant concret, le diviseur est abstrait, on multipliera la fraction-dividende par la fraction-diviseur renversée, le résultat, qui sera de la nature du dividende, converti en nombre complexe, exprimera le quotient demandé.* Cette règle donne le moyen d'effectuer toutes les opérations de l'arithmétique sur les nombres complexes et incomplexes ; son importance m'engage à l'appliquer à un exemple de chaque espèce. Proposons-nous d'abord d'opérer sur les nombres complexes...

$$3^{\#}\ \ 5^{s}\ \ 5^{d}\ \tfrac{5}{11} \qquad \text{et} \qquad 2^{\#}\ \ 9^{s}\ \ 1^{d}\ \tfrac{1}{11}.$$

On leur substituera les fractions irréductibles $\frac{36}{11}^{\#}$ et $\frac{27}{11}^{\#}$, qui les expriment; leur somme $\frac{63}{11}^{\#}$, convertie en nombre complexe, donnera $5^{\#}\ 14^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{11}$ pour la *somme* des nombres complexes proposés; leur *différence* sera $\frac{9}{11}^{\#}$, ou $0^{\#}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11}$; leur *quotient* abstrait sera $\frac{36}{11}$ divisé par $\frac{27}{11}$, ou $\frac{36}{27}$, ou $\frac{4}{3}$; si le multiplicande étant $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$, le multiplicateur abstrait était dé-

terminé par le nombre d'unités du nombre concret $2^{\#}\ 9^{ſ}\ 1^{d}\ \frac{1}{11}$; on multiplierait la fraction concrète $\frac{36}{11}^{\#}$, équivalente au multiplicande, par la fraction abstraite $\frac{27}{11}$, qui exprime le nombre d'unités et de parties d'unité contenues dans la fraction $\frac{27}{11}^{\#}$, équivalente au nombre $2^{\#}\ 9^{ſ}\ 1^{d}\ \frac{1}{11}$ qui détermine le multiplicateur; le résultat $\frac{972}{121}^{\#}$, converti en nombre complexe, donnerait le *produit* demandé $8^{\#}\ 0^{ſ}\ 7^{d}\ \frac{113}{121}$. Pour opérer sur les nombres complexes

$$1^{an.}\ 8^{mois}\ 17^{jours}\ 3^{heures}\ \tfrac{3}{7}\ ;\quad 1^{a}\ 6^{m}\ 25^{j}\ 17^{h}\ \tfrac{1}{7}.$$

on leur substituera les fractions irréductibles $\frac{12}{7}^{a}$ et $\frac{11}{7}^{a}$, qui les expriment; il ne s'agira plus alors que d'effectuer le calcul sur ces fractions; la *somme* des nombres complexes proposés sera donc $\frac{12}{7}^{a}$ plus $\frac{11}{7}^{a}$, ou $\frac{23}{7}^{a}$, ou $3^{a}\ 3^{m}\ 12^{j}\ 20^{h}\ \frac{4}{7}$; leur *différence* sera $\frac{12}{7}^{a}$ moins $\frac{11}{7}^{a}$, ou $\frac{1}{7}^{a}$, ou $0^{a}\ 1^{m}\ 21^{j}\ 10^{h}\ \frac{2}{7}$; leur *quotient* abstrait sera $\frac{12}{7}$ divisé par $\frac{11}{7}$, ou $\frac{12}{11}$; si le multiplicande étant le 1er nombre complexe, le multiplicateur abstrait était déterminé par le 2eme, le produit serait celui de $\frac{12}{7}^{a}$ par $\frac{11}{7}$, c'est-à-dire, $\frac{132}{49}^{a}$, ou $2^{a}\ 8^{m}\ 9^{j}\ 19^{h}\ \frac{5}{49}$. Pour opérer sur les nombres complexes

$$2℔\ 1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g},\quad \text{et}\quad 2℔\ 1^{m}\ 1^{o}\ 1^{G}\ 0^{d}\ 10^{g}\ \tfrac{2}{7}.$$

on leur substituera les fractions irréductibles $\frac{47}{18}$℔, et $\frac{18}{7}$℔, qui les expriment; effectuant les opérations sur ces fractions, on verra; que la *somme* des nombres proposés est, $\frac{653}{126}$℔, ou 5℔ $0^{m}\ 2^{o}\ 7^{G}\ 1^{d}\ 2^{g}\ \frac{2}{7}$; que leur *différence* est $\frac{5}{126}$℔, ou $5^{G}\ 0^{d}\ 5^{g}\ \frac{5}{7}$; que leur *quotient* abstrait est $\frac{47}{18}$ divisé par $\frac{18}{7}$, ou $\frac{329}{324}$; si le multiplicande étant le 1er nombre complexe, le multiplicateur abstrait est déterminé par le nombre d'unités du second; on multipliera $\frac{47}{18}$℔ par $\frac{18}{7}$, le résultat $\frac{47}{7}$℔, converti en nombre complexe, donnera 6℔ $1^{m}\ 3^{o}\ 3^{G}\ 1^{d}\ 6^{g}\ \frac{6}{7}$ pour le *produit* demandé. Enfin; s'il s'agit des nombres complexes

$$4^{toises}\ 1^{pi}\ 7^{po}\ 2^{li}\ \tfrac{2}{5},\quad \text{et}\quad 2^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}.$$

on effectuera le calcul sur les fractions irréductibles, $\frac{64}{15}^{t}$ et $\frac{79}{27}^{t}$, qui les expriment; on trouvera: que la *somme* des nombres complexes proposés, est $\frac{971}{135}^{t}$, ou $7^{t}\ 1^{pi}\ 1^{po}\ 10^{li}\ \frac{2}{5}$: que leur différence est $\frac{181}{135}^{t}$, ou $1^{t}\ 2^{pi}\ 0^{po}\ 6^{li}\ \frac{2}{5}$; que leur *quotient* est $\frac{576}{395}$; si le 2eme nombre concret détermine le multiplicateur, on multi-

pliera $\frac{64}{15}^t$, par $\frac{70}{27}$, ce qui donnera $\frac{5051}{400}^t$; la conversion de cette fraction concrète en nombre complexe donnera $12^t\,2^{pi}\,10^{po}\,10^l\,\frac{2}{5}$, pour le *produit* demandé. *Ces exemples suffisent pour mettre en état d'effectuer toutes les opérations de l'arithmétique sur les nombres complexes de toute espèce.* La méthode que nous venons d'exposer est sans doute la plus simple en théorie, mais la longueur excessive des calculs où elle conduit quelquefois, m'engage à exposer les *méthodes abrégées au moyen desquelles on peut opérer directement sur les nombres complexes, sans être obligé de les transformer d'abord en nombres incomplexes, pour convertir ensuite le résultat en nombre complexe.*

227. La définition de l'ADDITION, offre un moyen facile d'opérer directement sur les nombres complexes. En effet; le but de l'addition étant d'obtenir un nombre composé de toutes les parties des nombres qu'on ajoute; *Lorsqu'on veut obtenir la* SOMME *de plusieurs nombres complexes, il suffit d'ajouter séparément les nombres rapportés à la même unité; en commençant par les plus petites subdivisions de l'unité principale, afin d'ajouter plus facilement les retenues. La preuve s'exécute comme pour les nombres incomplexes, en convertissant chaque retenue en unités de l'ordre immédiatement inférieur.* Appliquons cette règle aux exemples suivans....

Nombres à ajouter.	$3^{\#}\ 5^{s}\ 9^{d}\ \frac{5}{6}$	$4^{\#}\ 17^{s}\ 9^{d}\ \frac{3}{5}$	$1^{a}\ 8^{m}\ 17^{j}\ 3^{h}\ \frac{3}{7}$	$9^{lb}\ 1^{m}\ 7^{o}\ 7^{G}\ 2^{d}\ 23^{g}\ \frac{2}{3}$	$39^{t}\ 5^{pi}\ 11^{po}\ 10^{li}\ 11^{pt}\ \frac{5}{7}$
	$4\ \ 17\ \ 9\ \ \frac{4}{6}$	$7\ \ 2\ \ 2\ \ \frac{2}{5}$	$1\ \ 6\ \ 25\ \ 17\ \ \frac{1}{7}$	$8\ \ 1\ \ 7\ \ 6\ \ 1\ \ 21\ \ \frac{3}{4}$	$8\ \ 4\ \ 10\ \ 9\ \ 11\ \ \frac{11}{11}$
Sommes.	$8^{\#}\ 3\ \ 7\ \ \frac{3}{6}$	$12^{\#}\ 0\ \ 0\ \ 0$	$3^{a}\ 3^{m}\ 12^{j}\ 20\ \ \frac{4}{7}$	$18^{lb}\ 1^{m}\ 7^{o}\ 4^{G}\ 1^{d}\ 21^{g}\ \frac{5}{12}$	$48^{t}\ 4^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}\ 10^{pt}\ \frac{7}{7}$
Preuves..	$1^{\#}\ 1^{s}\ 1^{d}\ 0$	$1^{\#}\ 1^{s}\ 1^{d}\ 0$	$1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0$	$1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0$	$11\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0$

Pour effectuer *la* 1ere *addition*; on ajoutera d'abord les fractions de denier, $\frac{5}{6}$ et $\frac{4}{6}$, ce qui donnera $\frac{9}{6}$, ou 1 $\frac{3}{6}$; on écrira donc $\frac{3}{6}$ au rang des fractions de denier du résultat, et la retenue 1^{d} jointe aux 18^{d} de la colonne des deniers, donnera 19^{d}, ou $1^{s}\ 7^{d}$; on écrira donc 7 au rang des deniers; la retenue 1^{s} ajoutée aux 22^{s}, des nombres proposés, donnera 23^{s}, ou $1^{\#}\ 3^{s}$; on écrira 3 au rang des sous et les $7^{\#}$, contenues dans la colonne des livres, augmentées de la retenue $1^{\#}$, donneront $8^{\#}$, que l'on écrira au rang des livres du résultat; l'opération est alors terminée, et l'on a $8^{\#}\ 3^{s}\ 7^{d}\ \frac{3}{6}$ pour la somme des nom-

bres proposés. La *preuve* s'effectue d'après la règle du n° 97 (page 99), en ayant soin de convertir les restes successifs en unités de l'ordre immédiatement inférieur; commençant donc par l'addition des plus hautes unités, on dira; $3^{\#}$ plus $4^{\#}$ font $7^{\#}$, mais on a écrit $8^{\#}$ à la somme, on avait donc retenu $1^{\#}$, ou 20^{s}, dans l'addition des sous; et comme on a d'ailleurs posé 3^{s}, il faut que l'addition de la colonne des sous ait donné 23^{s}; mais elle ne contient que 17^{s} plus 5^{s}, ou 22^{s}; le sou de surplus provient donc d'une retenue de 12^{d} faite dans l'addition des deniers, et comme on a posé 7^{d}, la colonne des deniers a dû donner 19^{d}, mais elle n'en donne que 9 plus 9, ou 18; le denier de surplus exprime donc la retenue fournie par l'addition des fractions de denier; or on a écrit $\frac{3}{6}$ à la somme; la somme des fractions de denier doit donc être $1\,\frac{3}{6}$, ou $\frac{9}{6}$; cette somme est effectivement $\frac{5}{6}$ plus $\frac{4}{6}$, ou $\frac{9}{6}$; ensorte que la retenue placée sous la colonne des fractions de denier est zéro; la retenue zéro placée sous les plus petites subdivisions de l'unité principale, prouve que l'addition a été bien faite, car ces plus petites subdivisions, n'étant précédées d'aucune autre, n'ont pu être augmentées d'aucunes retenues. *La 2ème addition* a été effectuée comme la 1ère. Pour effectuer *la 3ème addition*, on ajoute d'abord les fractions d'heure, ce qui donne $\frac{4}{7}$, que l'on écrit au rang des fractions d'heure de la somme; on écrit de même au rang des heures, les 20 heures contenues dans la colonne des heures; l'addition des jours donne 42 jours, ou $1^{m}\ 12^{j}$; on écrit donc 12^{j} au résultat, et la retenue 1^{m} jointe à 8^{m} plus 6^{m}, donne 15^{m}, ou $1^{a}\ 3^{m}$; on écrit 3 au rang des mois du résultat, et l'on retient 1^{a}; cette retenue jointe à 1^{a} plus 1^{a}, donne 3^{a}, que l'on écrit; on voit alors que la somme totale est $3^{a}\ 3^{m}\ 12^{j}\ 20^{h}\ \frac{4}{7}$. La preuve s'effectue comme dans le 1er exemple. Dans *la 4ème addition*; on commencera par les fractions de grain, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, dont la somme est $\frac{17}{12}$, ou $\frac{5}{12}$ on écrira donc $\frac{5}{12}$; au rang des fractions de grain du résultat, et la retenue 1 grain, jointe aux 44 grains contenus dans la colonne des grains, donnera 45 grains; mais 24 grains valent un denier, les 45 grains valent donc 1^{d} 21 grains; on écrira 21 au rang des grains du résultat, et l'on retiendra un

denier pour le joindre aux 3 deniers de la colonne des deniers, ce qui donnera 4^d, ou 1 gros 1 denier, car 3 deniers valent 1 gros; on écrira donc 1 denier, et la retenue 1 gros jointe aux 7 gros plus 6 gros, des nombres proposés, donnera 14 gros, ou 1 once 6 gros; car 8 gros valent 1 once; on posera donc 6 au rang des gros du résultat; la retenue 1 once, jointe à 7 onces plus 7 onces, donnera 15 onces, ou 1 marc 7 onces; car 8 onces valent 1 marc; on écrira donc 7 onces, et la retenue 1 marc jointe aux 2 marcs contenus dans la colonne des marcs, donnera 3 marcs, ou 1℔ 1^m, car 2^m font 1℔; on écrira donc 1^m, et la retenue 1℔ jointe à 9℔ plus 8℔, donnera 18℔, que l'on écrira; la réunion des sommes partielles ainsi obtenues, compose la somme totale 18℔ 1^m 7^o 6_G 1^d 21^g $\frac{5}{12}$; pour s'assurer de l'exactitude de cette somme, on a recommencé l'addition dans le sens inverse, en commençant par les plus hautes unités; on a dit : la colonne des livres-poids contient 9℔ plus 8℔, ou 17℔; on a posé 18℔; la livre de surplus provient donc d'une retenue de 2 marcs faite dans l'addition des marcs, mais on a posé 1^m; la colonne des marcs a donc donné 3^m; or elle n'en contient que 2, le marc de surplus exprime donc une retenue de 8 onces, fournie par la colonne des onces, et comme on a posé 7 onces, on a dû trouver 15 onces; l'addition des onces n'en donne que 14; la colonne des gros a donc donné 1° 6G, ou 14 gros; mais elle ne contient que 13 gros, l'addition des deniers a donc dû donner 1 gros 1 denier, ou 4 deniers; on ne trouve que 3 deniers; la somme des grains doit donc être 1 denier 21 grains, ou 45 grains; l'addition des grains n'en donne que 44; le grain de surplus, provient donc de la retenue faite dans l'addition des fractions de denier; mais on a posé $\frac{5}{12}$; la somme des fractions de denier doit donc être $1\frac{5}{12}$, ou $\frac{17}{12}$; or, $\frac{2}{3}$ plus $\frac{3}{4}$ valent en effet $\frac{17}{12}$; la retenue placée sous les fractions de denier est donc zéro, l'addition avait donc été bien faite. La dernière addition et sa preuve ont été effectuées d'après les mêmes principes.

228. La nature des raisonnemens employés dans les exemples précédens, étant indépendante des nombres particuliers qui n'ont

servi qu'à fixer les idées, on peut établir cette règle générale: *Pour* ADDITIONNER *plusieurs nombres complexes; disposez-les les uns sous les autres, de manière que leurs unités de même grandeur se trouvent dans une même colonne verticale; placez ensuite un trait sous ces nombres, pour les séparer du résultat que vous écrirez dessous. L'opération ainsi disposée, pour l'effectuer; ajoutez chaque espèce d'unité séparément, en commençant par les plus petites subdivisions de l'unité principale, et reportez à l'espèce suivante, les unités de cette espèce contenues dans la somme trouvée; parvenu aux plus hautes unités, l'opération sera terminée. La* PREUVE *s'exécute comme pour les nombres incomplexes, jusques et compris la colonne des unités principales; on convertit ensuite la retenue placée sous cette colonne, en unités de l'ordre immédiatement inférieur, qui sont les 1*[ères] *subdivisions de l'unité principale; on joint cette retenue, ainsi convertie, aux unités de même grandeur de la somme totale; on ôte du résultat la somme des nombres contenus dans la colonne à droite de celle des unités principales; le reste exprime la retenue fournie par l'addition de la colonne précédente, composée des secondes subdivisions de l'unité principale*; *continuant à convertir les restes successifs en unités de l'ordre immédiatement inférieur, la retenue placée sous la dernière colonne à droite, devra être zéro.* On voit que la preuve tend à décomposer la somme dans le sens inverse de celui où elle a été formée. La règle du n° 220 (page 249) donne le moyen d'extraire de chaque somme partielle les unités de l'ordre supérieur qu'elle peut contenir; la règle du n° 219, sert à convertir les retenues en unités de l'ordre immédiatement inférieur. L'examen attentif du tableau donné dans le n° 217 (page 247), conduit à quelques règles abrégées, commodes dans la pratique; 1°. *Pour les* MONNAIES; comme 12 deniers valent 1^{s}; on doit retenir autant de sous que la somme des deniers contient de fois 12 deniers; conséquemment, *en divisant le nombre des deniers par* 12, *les unités du quotient exprimeront combien on doit retenir de sous, et le reste, moindre que le diviseur* 12, *sera le nombre qu'on doit écrire au rang des deniers du résultat. Comme*

2 dixaines de sous, ou 20ˢ, font 1ᵗᵗ; on doit poser le chiffre des unités de sous, au rang des sous; si le nombre des dixaines de sous est pair, sa moitié exprimera la retenue de livres; si ce nombre est impair, on posera une dixaine de sous, et la moitié, du nombre des dixaines de sous diminué d'un, exprimera la retenue de livres; 2°. Pour les POIDS; *24 grains valent 1ᵈ, 3 deniers valent 1 gros, 8 gros valent 1 once, 8 onces valent 1 marc, 2 marcs valent 1 livre; conséquemment, en divisant le nombre des grains par 24, les unités du quotient indiqueront combien on doit retenir de deniers, et le reste, moindre que 24, exprimera le nombre qu'on doit écrire au rang des grains du résultat; la division du nombre des deniers par 3, donnera au quotient le nombre des gros à retenir, et le reste exprimera combien on doit écrire de deniers au résultat; divisant le nombre des gros et celui des onces par 8, les restes exprimeront combien on doit écrire de gros et d'onces au résultat, et les unités de chaque quotient indiqueront combien on doit retenir d'onces et de marcs; le nombre des marcs divisé par 2 donnera au quotient le nombre des livres-poids à retenir, et l'on écrira le reste au rang des marcs du résultat; 3°. Pour les* LONGUEURS; *12 points valent 1 ligne, 12 lignes font 1 pouce, 12 pouces font 1 pied, 6 pieds font 1 toise; conséquemment, si l'on divise le nombre des points par 12, les unités du quotient indiqueront combien on doit retenir de lignes, et le reste devra se placer au rang des points du résultat; on divisera également par 12, le nombre des lignes et celui des pouces; on écrira les restes au rang des lignes et des pouces du résultat; les unités de chaque quotient exprimeront combien on doit retenir de pouces et de pieds; enfin la division du nombre des pieds par 6, donnera un reste que l'on écrira au rang des pieds, et les unités du quotient, seront des toises.* Les élèves doivent appliquer les diverses parties de cette règle générale aux exemples d'autre part; ils reconnaîtront, en effectuant les opérations, que les fractions de chaque exemple, réduites au même dénominateur sont, dans le 1ᵉʳ $\frac{227}{84}$ʒ, ou 2ʒ $\frac{59}{84}$; dans le 2ᵉᵐᵉ $\frac{48870}{1645}$″, ou 3″ $\frac{267}{1640}$; dans le 3ᵉᵐᵉ $\frac{71928}{4004}$g, ou 1g $\frac{3195}{4004}$, etc.

	4 589$^{\#}$ 19^{s} 11^{d} $\frac{2}{3}$	98^{a} 7^{m} 19^{j} 0^{h} 45$'$ 57$''$ $\frac{4}{5}$	987^{lb} 1^{m} 7^{o} 7^{G} 2^{d} 23^{g} $\frac{2}{7}$	9^{t} 5^{pi} 11^{po} 11^{l} $\frac{1}{11}$
	4 609 17 10 $\frac{3}{4}$	87 11 29 0 59 59 $\frac{3}{4}$	88 0 5 6 1 22 $\frac{3}{4}$	8 4 10 7 $\frac{7}{11}$
	9 088 19 10 $\frac{5}{7}$	93 9 20 0 50 50 $\frac{5}{7}$	986 1 4 5 0 20 $\frac{5}{11}$	0 3 9 8 $\frac{4}{7}$
	8 767 14 9 $\frac{4}{7}$	39 10 28 0 48 56 $\frac{10}{11}$	47 1 7 7 2 23 $\frac{4}{13}$	0 0 8 10
Sommes	27 056$^{\#}$ 12^{s} 6^{d} $\frac{59}{84}$	320^{a} 4^{m} 6^{j} 3^{h} 25$'$ 45$''$ $\frac{267}{1540}$	2911^{lb} 0^{m} 2^{o} 3^{G} 2^{d} 17^{g} $\frac{3193}{4004}$	19^{t} 3^{pi} 5^{po} 2^{l} $\frac{23}{77}$
preuves.	2 233 3 2 0	33 3 0 3 3 3 0	333 3 3 2 3 1 0	2 3 3 2 0

229. Le but de la SOUSTRACTION étant d'ôter d'un nombre toutes les unités et parties d'unité d'un autre nombre ; on est naturellement conduit à faire dépendre la soustraction totale de soustractions partielles, en prenant les différences entre les unités de même grandeur; la somme des différences partielles ainsi obtenues, compose évidemment la différence totale. Par exemple; s'il s'agit de retrancher 3$^{\#}$ 5^{s} 2^{d} de 12$^{\#}$ 13^{s} 7^{d}, ou 3$^{\#}$ 5^{s} 9^{d} $\frac{5}{6}$ de 8$^{\#}$ 3^{s} 7^{d} $\frac{3}{6}$, ou 4$^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{3}{5}$ de 12$^{\#}$; comme on doit effectuer les soustractions partielles sur les unités de même grandeur, on écrira les nombres à retrancher sous ceux dont on doit les retrancher, en ayant soin que les unités de même grandeur se trouvent les unes sous les autres, comme on le voit ici...

De....	12$^{\#}$ 13^{s} 7^{d}	De....	8$^{\#}$ 3^{s} 7^{d} $\frac{3}{6}$	De....	12$^{\#}$
ôtez.....	3 5 2	ôtez.....	3 5 9 $\frac{5}{6}$	ôtez.....	4$^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{3}{5}$
Reste....	9$^{\#}$ 8^{s} 5^{d}	Reste....	4$^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{4}{6}$	Reste....	7$^{\#}$ 2^{s} 2^{d} $\frac{2}{5}$
Preuve...	12 13 7	Preuve...	12 3 7 $\frac{3}{6}$	Preuve ..	12$^{\#}$

Dans le 1er exemple on dira; de 7^{d} ôtez 2^{d}, reste 5^{d}; de 13^{s} ôtez 5^{s}, reste 8^{s}; de 12$^{\#}$ ôtez 3$^{\#}$, reste 9$^{\#}$; la réunion des restes partiels 5^{d}, 8^{s}, 9$^{\#}$, compose le reste total 9$^{\#}$ 8^{s} 5^{d}; ce reste est exact, car ajouté au plus petit nombre, il donne le plus grand. *Dans le 2eme exemple*; on commencera par les fractions de denier, et comme on ne peut ôter $\frac{5}{6}$ de $\frac{3}{6}$, on empruntera, par la pensée, un denier sur les 7 du nombre supérieur ; ce denier, joint à $\frac{3}{6}$, donne $\frac{9}{6}$; ôtant $\frac{5}{6}$ de $\frac{9}{6}$, il restera $\frac{4}{6}$, que l'on écrira au rang des fractions de denier du résultat; passant aux deniers, on dira : le nombre supérieur 7^{d}, ne doit plus compter que pour 6^{d}, à cause du denier emprunté dans la soustraction précédente; on ne peut en ôter 9^{d}, il faut donc emprunter 1^{s} sur les 3^{s} que contient le nombre supérieur; ce sou, qui vaut 12^{d} joint aux 6^{d}, donne 18^{d}; ôtant alors 9^{d} de 18^{d}, on écrira au-dessous le reste 9^{d}; passant à la colonne des

sous,

sous, et se rappelant qu'on a emprunté 1^{s} sur les 3^{s}, on sera conduit à soustraire 5^{s} de 2^{s} ; pour rendre la soustraction possible, on empruntera $1^{\#}$ sur les $8^{\#}$ du nombre supérieur; cette livre, qui vaut 20^{s}, jointe aux 2^{s}, donne 22^{s} ; ôtant 5^{s} de 22^{s}, il restera 17^{s} ; on écrira 17, au rang des sous du résultat ; enfin les $8^{\#}$ du nombre supérieur, diminuées de l'emprunt $1^{\#}$, deviennent $7^{\#}$, on en ôte les $3^{\#}$, du nombre inférieur, le reste $4^{\#}$ exprime les livres du résultat; la réunion des restes partiels ainsi obtenus, compose le reste total $4^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{1}{6}$; ce reste est exact, car ajouté au plus petit nombre, il donne le plus grand. *Dans le 3e exemple*, où le nombre supérieur manque de livres sous deniers et fractions de denier, on est obligé d'emprunter $1^{\#}$ sur les $12^{\#}$; cette livre valant 19^{s} 11^{d} $\frac{5}{5}$; on ôte, $\frac{1}{5}$ de $\frac{5}{5}$, 9^{d} de 11^{d}, 17^{s} de 19^{s}, et l'on écrit les restes $\frac{2}{5}$, 2^{d}, 2^{s}, à leur rang ; pour obtenir les livres du résultat, on diminue les $12^{\#}$ de l'emprunt $1^{\#}$, ce qui donne $11^{\#}$; on en ôte les $4^{\#}$ du nombre inférieur, le reste $7^{\#}$, joint aux restes 2^{s} 2^{d} $\frac{2}{5}$, donne le reste total $7^{\#}$ 2^{s} 2^{d} $\frac{2}{5}$; ce reste est exact, car ajouté au plus petit nombre il donne le plus grand. Cette manière d'opérer est applicable aux nombres complexes de chaque espèce; il suffit de se rappeler des relations qui existent entre les grandeurs des diverses subdivisions de l'unité principale ; voici quelques exemples.

De....	4^{a}	7^{m}	15^{j}	$\frac{3}{7}$
ôtez...	2	8	19	$\frac{6}{7}$
Reste..	1^{a}	10^{m}	25^{j}	$\frac{5}{7}$
Preuve	4	7	15	$\frac{3}{7}$

De....	9℔	0	0	4	0	0	$\frac{3}{7}$
ôtez...	3	1	5	3	1	2	$\frac{6}{7}$
Reste..	5℔	0	3	0	1	21	$\frac{4}{7}$
Preuve.	9	0	0	4	0	0	$\frac{3}{7}$

De....	34^{t}	1^{pi}	7^{po}	2^{li}	$\frac{2}{5}$
ôtez...	2	5	6	8	
Reste..	31^{t}	2^{pi}	0^{po}	6^{li}	$\frac{2}{5}$
Preuve.	34	1	7	2	$\frac{2}{5}$

De....	300^{t}				
ôtez...	98^{t}	5^{pi}	7^{po}	8^{li}	$\frac{9}{11}$
Reste..	201^{t}	0^{pi}	4^{po}	3^{li}	$\frac{2}{11}$
Preuve.	300	0	0	0	

Comme *dans le 1er exemple*, on ne peut ôter $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{7}$; on empruntera un jour sur les 15 jours ; ce jour joint aux $\frac{3}{7}$ de jour, donne $\frac{10}{7}$ de jour; on en ôte les $\frac{5}{7}$ de jour du nombre inférieur, il reste $\frac{5}{7}$ de jour; on écrit donc $\frac{5}{7}$ au rang des fractions de jour du résultat ; comme des 15 jours diminués de l'emprunt 1 jour, on ne peut ôter 19 jours, on emprunte un mois, ou 30 jours, sur les 7 ; cet emprunt augmenté des 14 jours donne 44 jours ; on en ôte les 19 jours, et l'on écrit au-dessous le reste 25^{j} ; pour rendre possible la soustraction des 8 mois, on em-

prunte une année sur les 4, cette année, qui vaut 12 mois, jointe aux 7 mois diminués de l'emprunt 1 mois, donne 18 mois; on en ôte les 8 mois, il reste 10 mois; enfin de 3 ans on ôte 2 ans, il reste 1^a; ce reste joint aux restes précédens donne le reste total $1^a\ 10^m\ 25^j\ \frac{5}{7}$. Comme *dans le 2e exemple*, on ne saurait ôter $\frac{6}{7}$ de $\frac{3}{7}$, et qu'on ne peut emprunter sur les deux zéros, qui tiennent la place des grains et des deniers du nombre supérieur; on empruntera un des quatre gros exprimés par le 1er chiffre significatif 4; ce gros vaut 3 deniers, ou $2^d\ 23^g\ \frac{7}{7}$; on laissera donc 2^d et 23^g, sur les zéros qui tiennent la place des deniers et des grains, on ajoutera les $\frac{7}{7}$ aux $\frac{3}{7}$, ce qui donnera $\frac{10}{7}$; ôtant alors, $\frac{6}{7}$ de $\frac{10}{7}$, 2^g de 23^g, et 1^d de 2^d, on écrira les restes $\frac{4}{7}$, 21^g, 1^d, à leur rang; les 4^G diminués de l'emprunt 1^G donnent 3^G, on en ôte les 3^G du nombre inférieur, il reste o que l'on écrit, pour tenir la place des gros du résultat; passant à la colonne des onces, on rendra les soustractions possibles en décomposant 9℔, en 8℔ 1^m et 8°; retranchant par ordre les 3℔ $1^m\ 5^o$ du nombre inférieur, il restera 5℔, o^m, 3^o, que l'on écrira aux rangs des livres marcs et onces du résultat; ce qui complétera le reste total 5℔ $o^m\ 3^o\ o_G\ 1^d\ 21^g\ \frac{4}{7}$. Les calculs relatifs aux deux autres exemples ont été effectués d'après les mêmes principes. Chaque reste est exact, car ajouté au plus petit nombre, il donne le plus grand.

230. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer pouvant s'appliquer à toutes les soustractions complexes, nous établirons cette règle générale : *Pour obtenir la différence entre deux nombres complexes; on écrit le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même grandeur se trouvent dans les mêmes colonnes verticales; on met ensuite un trait sous les deux nombres, pour les séparer du résultat, que l'on placera dessous. L'opération ainsi disposée, se commence par la droite, où se trouvent les plus petites subdivisions de l'unité principale; on soustrait chaque nombre inferieur du nombre supérieur correspondant, et l'on écrit au-dessous le reste. La somme des restes partiels, ainsi obtenus, compose le reste total. Quand dans le cours de l'opération, un nombre inférieur est plus grand*

que le nombre supérieur correspondant, il faut recourir au premier chiffre significatif que l'on rencontre vers la gauche du nombre supérieur, et emprunter par la pensée, une de ses unités; cette unité convertie en unités des ordres inférieurs, rendra possibles toutes les soustractions précédentes.

231. D'après l'ordre établi jusqu'ici il semblerait que la division ne devrait être traitée qu'après l'entière exposition de la multiplication; mais on aperçoit aisément, que la multiplication d'un nombre complexe par un nombre complexe, dépend de la multiplication et de la division d'un nombre complexe par un nombre entier. En effet; tel que soit le multiplicateur complexe, on pourra toujours le transformer en une fraction abstraite, et la question sera réduite à multiplier par une fraction, ce qu'on exécutera en multipliant d'abord le multiplicande par le numérateur de la fraction, et divisant ensuite le produit par le dénominateur de cette meme fraction; conséquemment : *on doit faire précéder la multiplication de deux nombres complexes l'un par l'autre, de la multiplication et de la division d'un nombre complexe par un nombre entier.*

232. On a vu (n° 51, page 48), que la MULTIPLICATION par un nombre entier n'était qu'une addition abrégée, qu'on pouvait effectuer en multipliant chaque partie du multiplicande par le multiplicateur; conséquemment : *Pour* MULTIPLIER *un nombre complexe par un nombre entier, il suffit d'effectuer la multiplication de chaque partie du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par les unités de moindre valeur, et reportant à l'espèce suivante les unités de cette espèce contenues dans le produit partiel obtenu; la somme des produits partiels compose le produit total. Pour effectuer le calcul avec plus de commodité, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande, et l'on met un trait sous ces deux nombres pour les séparer du résultat que l'on posera dessous. L'opération ainsi disposée, pour l'effectuer; on commence par la droite du multiplicande, en multipliant les plus petites subdivisions de l'unité principale par le multiplicateur. Quand un produit partiel ne contient pas d'unités de l'ordre immédiatement supérieur, on l'écrit à son rang sous le*

multiplicande partiel qui l'a fourni ; mais lorsque le produit partiel contient des unités de l'ordre supérieur, on divise le nombre des unités obtenues par le nombre qui exprime combien il faut de ces unités pour en composer une de l'ordre immédiatement supérieur ; on écrit le reste au rang des unités du produit partiel et les unités du quotient, qui appartiennent à l'ordre supérieur, expriment la retenue. Toutes les fois qu'en répétant la même opération sur chaque produit partiel, on sera parvenu aux plus hautes unités du multiplicande; le produit total sera obtenu.

S'il s'agissait, par exemple, de former le produit de $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$ par 3; on pourrait écrire 3 fois le multiplicande $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$; la somme $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$, étant composée de 3 fois $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$, serait le produit demandé ; mais on peut abréger cette opération en remarquant qu'elle se réduit à prendre 3 fois chacune des parties du multiplicande; on dira donc, 3 fois $\frac{2}{11}$ font $\frac{6}{11}$; 3 fois 3^{d} font 9^{d}; 3fois 2^{s} font 6^{s}; 3 fois $12^{\#}$ font $36^{\#}$; la réunion de ces produits partiels compose le produit total $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$. La simplicité de ces calculs ne laisse aucun doute sur leur exactitude ; mais lorsque les produits partiels donnent des retenues, on doit disposer les calculs, comme le prescrit la régle générale, en plaçant le multiplicande sur le multiplicateur, comme on le voit ici....

Multiplicandes	$12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$	$534^{\#}\ 16^{s}\ 5^{d}\ \frac{1}{2}$	$32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}$
Multiplicateurs	12	437	5 544
Produits......	$145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$	$233\ 718^{\#}\ 1^{s}\ 4^{d}\ \frac{3}{4}$	$182\ 628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$

$35℔\ 1^{m}\ 2^{o}\ 3G\ 2^{d}\ 7^{g}\ \frac{7}{11}$
12
$427℔\ 1^{m}\ 5^{o}\ 5G\ 0^{d}\ 19^{g}\ \frac{7}{11}$

Commençant chaque multiplication par la droite du multiplicande, où se trouvent les plus petites subdivisions de l'unité principale, on dira; *dans le* 1er *exemple :* 12 fois $\frac{2}{11}$ font $\frac{24}{11}$, ou $2\frac{2}{11}$; j'écris $\frac{2}{11}$ au rang des fractions de denier du produit et je retiens 2, pour les joindre à 12 fois 3^{d}, ce qui me donne 38^{d}, ou $3^{s}\ 2^{d}$; j'écris donc 2^{d} au produit, et je retiens les 3^{s} pour les joindre aux 24^{s}, que donne la multiplication des 2^{s} du multiplicande par le multiplicateur 12 ; j'obtiens 27^{s}, ou $1^{\#}\ 7^{s}$; je pose donc 7 au rang des sous du résultat ; la retenue $1^{\#}$, ajoutée à 12 fois $12^{\#}$, ou à $144^{\#}$, donne $145^{\#}$ pour les livres du résultat, ensorte

que le produit total est $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}$ [illegible]/11. *Dans le 2ᵉ exemple*, où le multiplicateur est 437 ; on commencera par les fractions de denier en multipliant $\frac{3}{4}^{d}$ par 437, ce qui donnera $\frac{1311}{4}$ ou $327^{d}\ \frac{3}{4}$; on écrira donc $\frac{3}{4}$ au rang des fractions de denier du résultat ; la retenue 327^{d}, ajoutée au produit 2185^{d}, des 5^{d} du multiplicande par le multiplicateur 437, donne 2512^{d} ; pour extraire de ce produit les sous qu'il contient, on divisera le nombre 2512 de ses unités par le nombre 12, qui exprime combien il faut de deniers pour composer un sou ; on trouvera 209 au quotient avec le reste 4 ; on écrira donc 4 au rang des deniers du résultat, et l'on retiendra 209^{s} ; cette retenue jointe au produit 6992^{s}, des 16^{s} du multiplicande par le multiplicateur 437, donne 7201^{s} ; d'après la règle abrégée du nº 228, j'écris 1 au rang des sous du résultat, et la moitié du nombre 720 des dixaines de sous, me donne 360 pour le nombre des livres qu'on doit retenir, ensorte que 7201^{s} valent $360^{\#}\ 1^{s}$; la retenue $360^{\#}$ ajoutée au produit $233\,358^{\#}$, des $534^{\#}$ du multiplicande par le multiplicateur 437, donne $233\,718^{\#}$; cette somme exprime les livres du résultat ; le produit demandé est donc $233\,718^{\#}\ 1^{s}\ 4^{d}\ \frac{3}{4}$. *Dans le 3ème exemple*, où le multiplicateur est 5544, on prendra 5544 fois chaque partie du multiplicande, de cette manière : 5544 fois $\frac{5}{9}^{li}$, font $\frac{27720}{9}^{li}$, *ou* 3080^{li} ; ces 3080^{li} jointes à 5544 fois 9 lignes, donnent 52 976 lignes ; pour trouver combien ce dernier nombre contient de pouces, on divisera 52 976 par le nombre 12, qui marque combien il faut de lignes pour composer un pouce ; on trouvera 4414 au quotient et 8 de reste, ensorte que les 52 976 lignes valent 4414 pouces 8 lignes ; on écrira donc 8 au rang des lignes du résultat, et l'on retiendra les 4414 pouces, pour les joindre à 5544 fois 7 pouces, ou à 7 fois 5544 pouces, ou à 38 808 pouces ; ce qui donnera 43 222 pouces ; et comme il faut 12 pouces pour composer la valeur du pied, on trouvera le nombre des pieds en divisant 43 222 par 12 ; cette division donne 3601 au quotient et 10 de reste ; les 43 222 pouces valent donc 3601 pieds 10 pouces ; on écrira 10 au rang des pouces du résultat et l'on retiendra les 3601 pieds pour les joindre aux 27 720 pieds, fournis par la multiplication des 5 pieds du multiplicande par le multiplicateur

5544; la somme sera 31 321 pieds; pour extraire de cette somme les toises qu'elle contient, on divisera le nombre 31 321 de ses unités par le nombre 6, qui indique combien il faut de pieds pour composer une toise; on trouvera 5220 au quotient et 1 de reste; on en conclura que les 31 321 pieds valent $5220^{t}\ 1^{pi}$; on écrira donc 1 au rang des pieds du résultat, et l'on ajoutera les 5220 toises aux 177 408 toises, que donne la multiplication des 32 toises du multiplicande par le multiplicateur 5544, la somme 182 628 toises, exprime les toises du résultat; ensorte que le produit total est $182\,628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{p}\ 8^{li}$. Les calculs relatifs au 4e *exemple* ont été effectués d'après les mêmes principes. Ces exemples suffisent pour faire apercevoir, que lorsque le multiplicateur est un grand nombre, la formation des produits partiels, et l'extraction des unités des ordres supérieurs qu'ils contiennent, conduisent à des opérations fort compliquées. Nous allons démontrer un principe dont l'application bien entendue, diminue quelquefois la longueur des calculs.

233. *Pour* MULTIPLIER *ou* DIVISER *un nombre par un produit, il suffit de multiplier ou diviser successivement ce nombre par les facteurs du produit.* En effet, lorsqu'on multiplie l'unité par les facteurs d'un produit, on obtient évidemment ce produit; mais la multiplication de l'unité par le produit, donne également le produit, il doit donc être indifférent de multiplier l'unité, par un produit, ou par ses facteurs; mais le même raisonnement s'appliquerait à toutes les unités et parties d'unités d'un nombre quelconque; la multiplication d'un nombre, par un produit ou par ses facteurs, doit donc conduire au même résultat; on prouverait d'une manière analogue que cette propriété doit subsister pour la division, et que conséquemment le principe énoncé est exact. Le calcul vient à l'appui des raisonnemens précédens; lorsqu'on multiplie 4, par le produit 6, des facteurs 2 et 3, on trouve 24; on est conduit au même résultat en multipliant 4, par les facteurs 2 et 3, de 6 : car 2 fois 4 font 8, et 3 fois 8 font 24. Si l'on multiplie 7 par le produit 30, des facteurs 2, 3, 5, on trouve 210; on parvient au même résultat en multipliant 7 par les facteurs 2, 3, 5; car 2

fois 7 font 14, 3 fois 14 font 42, enfin 5 fois 42 font 210. La division du nombre 60 par le produit 12, des facteurs 3 et 4, donne le quotient 5 ; on trouve le même quotient en divisant 60 par les facteurs 3 et 4, car 60 divisé par 3 donne 20, et 20 divisé par 4 donne 5. Nous verrons par la suite une démonstration plus générale du même principe.

Ce principe donne le moyen de simplifier les calculs relatifs à la formation du produit $182\,628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$, de $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{5}{9}$ par 5544 (*voyez* les calculs n° 232, page 277). En effet ; comme le multiplicateur 5544 est le produit des facteurs 9, 8, 7, 11, il suffit de multiplier successivement par chacun de ces facteurs; et comme le produit sera le même dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications, on doit commencer par le facteur 9, qui fera disparaître la fraction $\frac{5}{9}$ du multiplicande. D'après ces remarques, on multipliera d'abord le multiplicande $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{5}{9}$ par le 1er facteur 9 ; le produit $296^{t}\ 2^{pi}\ 10^{po}\ 2^{li}$, multiplié par le 2ème facteur 8, donnera $2371^{t}\ 4^{pi}\ 9^{po}\ 4^{li}$, ce produit multiplié par le 3ème facteur 7, deviendra $16\,602^{t}\ 3^{pi}\ 5^{po}\ 4^{li}$; enfin ce dernier nombre multiplié par le 4ème facteur 11, donnera $182\,628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$, pour le produit demandé, car tous les facteurs 9, 8, 7, 11, du multiplicateur 5544, ont successivement été employés comme multiplicateurs ; le multiplicande $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{5}{9}$, multiplié par les facteurs 9, 8, 7, 11, de 5544, pris dans un ordre quelconque, donne le même produit. Comme la multiplication par un nombre qui n'excède pas 12, s'effectue avec la plus grande facilité, en étendant la table de multiplication jusqu'au produit de 12 par 12, nous supposerons que l'on connaît ces produits, et alors *toutes les fois que le multiplicateur pourra se décomposer en facteurs qui n'excéderont pas 12, on abrégera beaucoup les calculs en multipliant successivement par ces facteurs*, ce qui conduit au *même résultat.*

234. *En général : toutes les fois que le multiplicateur pourra se décomposer en facteurs qui n'excéderont pas 12 ; le moyen le plus facile d'obtenir le produit demandé, sera de multiplier le multiplicande successivement par chaque facteur du multiplicateur, en commençant par les plus petites unités du multi-*

plicande (nº 232). *Ensorte qu'après avoir multiplié le multiplicande par un des facteurs du multiplicateur, on multipliera le produit par un nouveau facteur, puis le nouveau produit par un nouveau facteur, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les facteurs du multiplicateur soient épuisés; le dernier produit obtenu, sera celui demandé.* L'ordre dans lequel on effectue les multiplications étant indifférent, on doit préférer celui qui conduit aux calculs les plus simples; on ne peut donner aucune règle générale à cet égard, c'est la seule habitude du calcul qui peut faire découvrir la route la plus courte. S'il s'agit, par exemple de multiplier 4℔ 0^m 1^o 6^G 0^d 16^g, par 72; comme le multiplicateur 72 est le produit des facteurs 8 et 9, on peut multiplier successivement par ces facteurs; si l'on commence par le facteur 9, on trouvera que 9 fois 4℔ 0^m 1^o 6^G 0^d 16^g, font 37℔; ces 37℔ multipliées par l'autre facteur 8, donnent le produit demandé 296℔; si l'on commence par le facteur 8, on trouvera que 8 fois 4℔ 0^m 1^o 6^G 0^d 16^g, donnent 32℔ 1^m 6^o 1^G 2^d 8^g; ce produit multiplié par l'autre facteur 9, donne encore 296℔ pour le produit demandé. S'il s'agissait de multiplier $3^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{1}{3}$, par le produit 1296 des facteurs 9, 12, 12; au lieu de multiplier $3^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{1}{3}$, par 1296, ce qui donnerait $5040^{\#}$ pour le produit demandé; il sera plus simple de multiplier $3^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{1}{3}$ par le facteur 9, ce qui donnera $35^{\#}$; ce produit multiplié par 12 donnera $420^{\#}$; la multiplication de $420^{\#}$ par le dernier facteur 12, du multiplicateur, donnera le produit demandé $5040^{\#}$. Pour multiplier $5^{\#}$ 7^{s} 2^{d} $\frac{7}{12}$, par 1152, on pourrait dire : 1152 fois $\frac{7}{12}^{d}$ font $\frac{8064}{12}^{d}$, ou 672^{d}, que je retiens, 1152 fois 2^{d} font 2304^{d}, qui augmentés de la retenue 672^{d} donnent 2976^{d}, ou 248^{s}; les 248^{s} joints à 1152 fois 7^{s} donnent 8312^{s}, ou $415^{\#}$ 12^{s}; j'écris donc 12 au rang des sous du résultat, et je retiens $415^{\#}$, pour les joindre aux $5760^{\#}$ fournies par la multiplication des $5^{\#}$ du multiplicande par le multiplicateur 1152; la somme $6175^{\#}$, exprime les livres du résultat, ensorte que le produit demandé est $6175^{\#}$ 12^{s}; on abrégera ce calcul, en observant que le multiplicateur 1152 est le produit des facteurs 12, 12, 8; il suffit donc de multiplier successivement par

chacun de ces facteurs ; ainsi, on multipliera d'abord le multiplicande $5^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{7}{11}$ par 12 ; on multipliera le produit $64^{\#}\ 6^{s}\ 7^{d}$ par 12 ; le résultat $771^{\#}\ 19^{s}$, multiplié par 8, donnera $6175^{\#}\ 12^{s}$ pour le produit demandé.

235. Nous allons actuellement faire voir comment on peut *diviser un nombre complexe par un nombre entier abstrait ;* nous en déduirons une méthode abrégée pour multiplier un nombre complexe, par un nombre entier, dont les facteurs surpassent 12. S'il s'agit de la division de $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$, par 3 ; on divisera par 3, chacune des parties $36^{\#}$, 6^{s}, 9^{d}, $\frac{6}{11}$, du dividende ; la réunion des quotiens partiels $12^{\#}$, 2^{s}, 3^{d}, $\frac{2}{11}$, composera le quotient total $36^{\#}\ 12^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$; ce quotient est exact, car multiplié par le diviseur 3, il reproduit le dividende $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$. On opérerait d'une manière analogue, si quelques parties du dividende n'étaient pas exactement divisibles par le diviseur ; par exemple, pour obtenir le quotient de $15^{\#}\ 7^{s}\ 6^{d}$ par 2, on divisera d'abord $15^{\#}$ par 2, ce qui donnera $7^{\#}$ au quotient, et $1^{\#}$, ou 20^{s}, de reste ; le reste 20^{s} ajouté aux 7^{s} du dividende, donne 27^{s} ; divisant 27^{s} par 2, il viendra 13^{s} au quotient ; le reste 1^{s}, converti en 12 deniers, et joint aux 6^{d} du dividende, donne 18^{d}, dont la moitié est 9^{d} ; la réunion des quotiens partiels $7^{\#}$, 13^{s}, 9^{d}, compose le quotient total $7^{\#}\ 13^{s}\ 9^{d}$; il est exact, car multiplié par le diviseur 2, il reproduit le dividende $15^{\#}\ 7^{s}\ 6^{d}$. Appliquons ce procédé à la décomposition des produits formés dans le n° 232. Soit le dividende $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, et le diviseur 12 ; commençant par les plus hautes unités, on divisera $145^{\#}$ par 12, il viendra $12^{\#}$ au quotient et $1^{\#}$, ou 20^{s}, de reste ; ce reste ajouté aux 7^{s} du dividende, donne 27^{s} qui, divisés par 12, donnent 2^{s} au quotient, avec le reste 3^{s}, ou 36^{d} ; si après avoir ajouté ce reste aux 2^{d} du dividende, on divise la somme 38^{d} par 12, on trouvera 3^{d} au quotient et 2^{d} de reste ; on joindra le reste 2^{d} aux $\frac{2}{11}{}^{d}$ du dividende, la somme $\frac{24}{11}{}^{d}$, divisée par 12, donne $\frac{2}{11}{}^{d}$; la réunion des quotiens partiels $12^{\#}$, 2^{s}, 3^{d}, $\frac{2}{11}$, exprime le quotient total $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}\ \frac{24}{11}$; ce quotient est exact, car multiplié par le diviseur 12, il reproduit le dividende $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$ (1er exemple du n° 132, page 276). Les divisions précédentes ont offert peu

de calcul, parceque le diviseur n'excédait pas 12; mais quand cette condition n'est pas remplie, l'opération se complique, et l'on doit alors, pour éviter les erreurs, disposer le calcul comme on le voit ici. . . . .

Dividende 233 718$^{\#}$ 1^{s} 4^{d} $\frac{3}{4}$ { 437 diviseur. / 534$^{\#}$ 16^{s} 5^{d} $\frac{3}{4}$
1 521
2 108
Reste 360$^{\#}$; 1$^{\#}$ *vaut* 20^{s}
20
7 200^{s} Reste converti en sous
1^{s} du dividende.
7 201^{s}
2 831
Reste 209^{s}. 1^{s} *vaut* 12^{d}
12
2 508^{d} Reste converti en deniers
4^{d} du dividende.
2 512^{d}
Reste 237^{d}. 1^{d} vaut 4 quarts de den.
4
1 308 Reste conv. en q^{rts} de den.
3 quarts de den. du divid^{e}.
1 311 quarts de deniers, ou $\frac{1311}{4}$^{d}.

182 628^{t} 1^{pi} 10^{p} 8^{l} | 5544 / 32^{t} 5^{pi} 7^{p} 9^{l} [illegible].
16 308
Reste 5 220^{t}; 1^{t} vaut 6 pieds.
6
31 320 pieds.
1 pied.
31 321 pieds.
Reste 3 601 pieds; 1 pied vaut 12 pouc.
12
43 212
10 pouces.
43 222 pouces.
4 414 pouces; 1^{po} vaut 12^{li}.
12
52 968 lignes.
8 lignes.
52 976 lignes.
d^{er} reste 3 080 lignes.

Dans le 1er *exemple;* on commencera par les plus hautes unités du multiplicande, en divisant 233 718$^{\#}$ par 437, d'après la 3ème méthode abrégée du n° 88 (page 90), ce qui donnera 534$^{\#}$ au quotient et 360$^{\#}$ de reste; on convertira ce reste en sous, en multipliant 360 par 20, car chaque livre valant 20^{s}, les 360$^{\#}$ valent 360 fois 20 sous, ou 20 fois 360 sous, ou 7200^{s}; à ce produit on ajoutera le sou du dividende; la somme 7201^{s} divisée par 437, donne 16^{s} au quotient, et 209^{s} de reste; on convertira ce reste en 2508^{d}, en multipliant 209 par 12, car 1^{s} vaut 12^{d}; on ajoutera à 2508^{d} les 4^{d} du dividende, la somme 2512^{d} divisée par le diviseur 437, donnera 5^{d} au quotient avec un reste 327^{d}; ce reste ajouté aux $\frac{3}{4}$^{d} du dividende, donne $\frac{1311}{4}$^{d}; la division de cette fraction par 437, donne $\frac{1311}{1748}$^{d}, pour la frac-

tion de denier du quotient total; la division des deux termes 1311 et 1748, par leur plus grand commun diviseur 437, donne la fraction irréductible $\frac{3}{4}^{d}$; la réunion des quotiens partiels $534^{\#}$, 16^{s}, 5^{d}, $\frac{3}{4}^{d}$, compose le quotient total $534^{\#}\ 16^{s}\ 5^{d}\ \frac{3}{4}$; il est exact, car multiplié par le diviseur 437, il reproduit le dividende $233\ 718^{\#}\ 1^{s}\ 4^{d}\ \frac{3}{4}$ (2ème exemple du n° 232, page 276). *Dans le 2ème exemple*, où il s'agissait de la division de $182\ 628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$ par 5544; on a d'abord divisé $182\ 628^{t}$ par 5544, d'après la 3ème méthode du n° 88 (page 90), ce qui a donné 32 toises au quotient, et 5220 toises de reste; on a converti ce reste en 31 320 pieds, en multipliant 5220 par 6; après avoir ajouté à ce produit, le pied contenu dans le multiplicande, on a divisé la somme 31 321 pieds par 5544, ce qui a donné 5 pieds au quotient, et 3601 pieds de reste; ce reste converti en pouces, et augmenté des 10 pouces du multiplicande, a donné 43 222 pouces; leur division par 5544, a donné 7 pouces au quotient, avec un reste 4414 pouces; ce reste converti en lignes, et augmenté des 8 lignes du dividende, a donné 52 976 lignes; on a divisé 52 976 lignes, par 5544, ce qui a donné 9 lignes au quotient et 3080 lignes de reste; le quotient de 3080 par 5544, a été exprimé par la fraction de ligne $\frac{3080}{5544}$, qui s'est réduite à $\frac{5}{9}$, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur 616; la réunion des quotiens partiels 32^{t}, 5^{pi}, 7^{po}, 9^{li}, $\frac{5}{9}$, a composé le quotient total $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\frac{5}{9}$. Ce quotient est exact, car multiplié par le diviseur 5544, il reproduit le dividende $182\ 628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$ (3ème exemple du n° 232).

236. Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à tous les exemples de division, où il s'agit de diviser un nombre complexe par un nombre entier abstrait, nous établirons cette régle générale. *Pour* DIVISER *un nombre complexe par un nombre entier abstrait, il suffit d'effectuer la division de chaque partie du dividende par le diviseur, en commençant par l'espèce d'unité dont la valeur est la plus grande, et convertissant les restes de chaque division partielle en unités de l'ordre immédiatement inférieur, pour les joindre avec les unités de cet ordre, que peut contenir le dividende. Ensorte, qu'après avoir*

obtenu le quotient des plus hautes unités du dividende par le diviseur, on convertit le reste de cette division, en unités de l'ordre immédiatement inférieur, pour le joindre aux unités de cet ordre que contient le dividende; cela donne un nouveau dividende partiel sur lequel on opère comme sur le précédent, et ainsi de suite jusqu'au quotient des plus petites subdivisions de l'unité principale par le diviseur (ce dernier quotient sera quelquefois une fraction). La somme des quotiens partiels, des diverses parties du dividende par le diviseur, composera le quotient total. Pour convertir un reste quelconque en unités de l'ordre immédiatement inférieur, il suffit de multiplier le nombre abstrait de ses unités, par le nombre qui exprime combien chaque unité du reste vaut d'unités de l'ordre inférieur, le produit abstrait indique combien le reste vaut d'unités de l'ordre immédiatement inférieur. Au moyen de cette règle, on trouvera que le quotient de $4360^{\#}\ 15^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$ par 360, est $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$; que celui de 3603℔ $0^{m}\ 1^{o}\ 2^{G}\ 2^{d}$ par 96, est 37℔ $1^{m}\ 0^{o}\ 4^{G}\ 0^{d}\ 8^{g}$, etc. Comme la division par un nombre qui n'excède pas 12, s'effectue avec la plus grande facilité, toutes les fois que le diviseur pourra se décomposer en facteurs qui n'excéderont pas 12, on abrégera les calculs, en divisant successivement par ces facteurs (n° 233, page 278). Ainsi, dans le 2ème exemple du n° 235, au lieu de diviser $182\,628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$ par 5544, ce qui donnerait $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{5}{9}$ pour quotient, il sera plus simple de diviser successivement par les facteurs 11, 7, 8, 9 du diviseur 5544; la division de $182\,628^{t}\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$ par 11, donnera $16\,602^{t}\ 3^{pi}\ 5^{po}\ 4^{li}$; on divisera ce quotient par 7; le résultat $2371^{t}\ 4^{pi}\ 9^{po}\ 4^{li}$, divisé par 8, donnera $296^{t}\ 2^{pi}\ 10^{po}\ 2^{li}$; ce dernier nombre divisé par 9, donne $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{5}{9}$; comme les facteurs 11, 7, 8, 9, du diviseur, sont entièrement épuisés, le dernier quotient $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{5}{9}$ est celui demandé: dans quelqu'ordre qu'on effectue les divisions partielles, on est conduit au même résultat. Si l'on compare ce calcul à celui du n° 233, on verra que les divisions successives tendent à décomposer le produit dans l'ordre inverse de celui où il a été formé.

237. En général. *Toutes les fois que le diviseur pourra se*

décomposer en facteurs qui n'excéderont pas 12; le moyen le plus facile d'obtenir le quotient demandé sera de diviser le dividende, successivement par chaque facteur, en commençant par les plus hautes unités du dividende (n° 236). Ensorte, qu'après avoir divisé le dividende par un des facteurs du diviseur, on divisera le quotient par un nouveau facteur, puis le nouveau quotient par un nouveau facteur, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les facteurs du diviseur soient épuisés; le dernier quotient obtenu sera celui demandé. L'ordre dans lequel on effectue ces divisions partielles étant indifférent, on doit choisir celui qui conduit aux calculs les plus simples. Appliquons cette règle à la décomposition des produits formés dans le n° 234. Pour diviser 296℔ par le produit 72, des facteurs 8 et 9; on divisera d'abord 296℔ par 8; le résultat 37℔, divisé par 9, donnera le quotient demandé 4℔ 0^{m} 1^{o} 6^{G} 0^{d} 16^{g}. Pour diviser 6175# 12^{s} par le produit 1152, des facteurs 8, 12, 12, on divisera le dividende par 8; le résultat 771# 19^{s} divisé par 12, donnera 64# 6^{s} 7^{d}; divisant enfin ce dernier nombre par 12, on aura le quotient demandé 5# 7^{s} 2^{d} $\frac{7}{11}$. Chaque quotient est exact, car multiplié par le diviseur, il donne le dividende.

238. Lorsque le multiplicateur est un peu grand, la méthode du n° 232, conduit à des calculs compliqués; dont la longueur est capable de rebuter; nous allons faire connaître une méthode plus expéditive; mais auparavant, nous donnerons quelques définitions nécessaires à l'intelligence, de ce que nous aurons à dire sur cet objet. 1°. *Tout nombre de subdivisions d'une unité concrète quelconque, qui est contenu exactement dans la valeur de cette unité, en est une* PARTIE ALIQUOTE. Ainsi; comme la livre tournois vaut 20^{s}; les diviseurs 10^{s}, 5^{s}, 4^{s}, 2^{s}, de 20^{s}, sont des *parties aliquotes* de la livre; de même, comme 1^{s} vaut 12^{d}, les diviseurs 6^{d}, 4^{d}, 3^{d}, 2^{d}, de 12^{d}, sont autant de parties aliquotes du sou; une toise valant 6 pieds, les diviseurs 3 pieds, 2 pieds, de 6 pieds, sont des parties aliquotes de la toise. Le nombre complexe 1^{pi} 6^{po} est aussi une partie aliquote de la toise, parceque 1^{pi} 6^{po}, est exactement le quart de la valeur d'une toise; comme 2^{s} valent 24^{d}, on peut dire que 8^{d} est une partie

aliquote de 2 sous; $\frac{3}{5}$ˢ étant contenus 5 fois dans 3ˢ, peut être considéré comme une partie aliquote de 3ˢ. En général, *tout nombre qui est contenu un nombre de fois juste dans la valeur d'un autre, en est une* PARTIE ALIQUOTE ; 2°. par opposition, *tout nombre qui n'est pas contenu un nombre de fois juste dans la valeur d'un autre, en est dit, une* PARTIE ALIQUANTE. Ainsi; comme la valeur 20ˢ, de 1ᵗᵗ, n'est pas divisible exactement par 3ˢ, on dit que 3ˢ est une *partie aliquante* de la livre; les nombres 5 pieds, 4 pieds, qui ne sont pas contenus exactement dans la valeur 6 pieds, de la toise, sont des parties aliquantes de la toise; 3ˢ est une partie aliquante de 17ˢ; 3°. on peut observer que *toute partie* ALIQUANTE *est décomposable en parties* ALIQUOTES. Ainsi 19ˢ, partie aliquante de 1ᵗᵗ, est décomposable en parties aliquotes de la livre, qui sont 10ˢ, 5ˢ, 4ˢ. De même, la partie aliquante 11ᵈ, de 2ˢ, ou de 24ᵈ, se compose de 8ᵈ et de 3ᵈ, qui sont des parties aliquotes de la valeur 24ᵈ, de 2ˢ.

Nous avons actuellement toutes les connaissances nécessaires à l'intelligence de la méthode que l'on peut substituer à celle du n° 232, pour multiplier un nombre complexe par un nombre entier. Proposons-nous d'abord de multiplier 2ᵗᵗ 10ˢ par 6; cela se réduit à répéter 6 fois 2ᵗᵗ et 6 fois 10ˢ; le 1ᵉʳ de ces produits partiels est 12ᵗᵗ; pour former le 2ᵉ, on pourrait multiplier 10ˢ par 6, ce qui donnerait 60ˢ, ou 3ᵗᵗ; mais la division peut conduire au même résultat, car le produit de 1ᵗᵗ par 6 étant 6ᵗᵗ, celui de 10ˢ, ou $\frac{1}{2}$ livre, par 6 est évidemment la moitié de 6ᵗᵗ, c'est-à-dire 3ᵗᵗ; la réunion des produits partiels 12ᵗᵗ et 3ᵗᵗ compose le produit total 15ᵗᵗ. On suivrait une marche analogue, s'il s'agissait du produit de 4ᵗ 2ᵖⁱ 8ᵖᵒ par 9; on pourrait appliquer la règle du n° 232, en commençant par les plus petites unités, et multipliant chacune des parties, 8 pouces, 2 pieds, 4 toises, du multiplicande par le multiplicateur 9; 9 fois 8 pouces donneraient 72 pouces, ou 6 pieds, ou 1 toise; 9 fois 2 pieds donneraient 18 pieds, ou 3 toises; enfin 9 fois 4 toises donneraient 36ᵗ; la réunion des produits partiels 1ᵗ, 3ᵗ, 36ᵗ, composerait le produit total 40ᵗ; la *méthode des parties aliquotes* conduit plus simplement au même résultat; commençant par les plus hautes uni-

tés du multiplicande $4^{t}\ 2^{pi}\ 8^{po}$; on dira : 9 fois 4^{t} font 36^{t} ; 9 fois 1^{t} donnerait 9^{t}, mais 2^{pi} est le tiers d'une toise, 9 fois 2^{pi}, donnent donc le tiers de 9^{t}, c'est-à-dire 3^{t}; le produit de 2 pieds, ou 24 pouces, par 9, étant 3 toises, celui de 8 pouces, tiers de 2 pieds, par 9 sera le tiers de 3 toises, ou 1 toise ; la réunion des produits partiels 36^{t}, 3^{t}, 1^{t}, donne encore 40 toises, pour le produit de $4^{t}\ 2^{pi}\ 8^{po}$ par 9. Dans cet exemple, les diverses parties du multiplicande étaient des parties aliquotes les unes des autres; 2^{pi} tiers d'une toise, étaient une partie aliquote de la toise, et 8 pouces, tiers de 2 pieds, étaient une partie aliquote de 2^{pi}, ensorte que le produit de 1^{t} par 9 étant 9^{t}, le tiers de 9^{t} a donné le produit relatif à 2^{pi}, et le tiers de celui-ci a donné le produit relatif à 8 pouces. On opérera de la même manière toutes les fois que les unités fractionnaires du multiplicande seront des parties aliquotes les unes des autres. Quand cette condition ne sera pas remplie, on commencera par décomposer les parties aliquantes en parties aliquotes, et la question rentrera alors dans la précédente ; par exemple, s'il s'agissait de multiplier $5^{\#}\ 15^{s}$ par 8, après avoir trouvé $40^{\#}$ pour le produit de $5^{\#}$ par 8 ; comme 15^{s} n'est pas une partie aliquote de la valeur 20^{s}, de $1^{\#}$, on décomposerait la partie aliquante 15^{s}, en parties aliquotes 10^{s} et 5^{s} ; observant alors que 10^{s} est la moitié de $1^{\#}$, et que 5^{s} est la moitié de 10^{s}, on dirait : le produit de $1^{\#}$ par 8 serait $8^{\#}$; celui de 10^{s} par 8 est donc la moitié de $8^{\#}$, ou $4^{\#}$; celui de 5^{s} par 8 est donc la moitié de $4^{\#}$, ou $2^{\#}$; la réunion des produits partiels, $40^{\#}$, $4^{\#}$, $2^{\#}$, compose le produit total $46^{\#}$; on obtiendrait le même résultat en multipliant chaque partie du multiplicande par le multiplicateur, en effet, 15^{s} répétés 8 fois font 120^{s}, ou $6^{\#}$; ces $6^{\#}$ jointes à 8 fois $5^{\#}$, ou à $40^{\#}$, donnent $46^{\#}$ pour le produit demandé. Lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont plus composés, la méthode des parties aliquotes devient la plus simple, et l'on doit disposer les calculs, de la manière suivante (*) :

(*) On doit avoir attention en effectuant l'opération qui suit, et toutes autres semblables, de barrer les chiffres des *produits auxiliaires*, attendu qu'ils ne doivent pas faire partie du produit total.

		toises	pieds	pouces	lignes
	Multiplicande.......	32^t	5^{pi}	7^{po}	$9^{li}\frac{5}{9}$.
	Multiplicateur......	5 544			
1°. 5544 fois 32 toises, donnent.................		11 088			
		166 320			
Produit AUXILIAIRE..	5544 *fois* 1^t, *donnent*	$5\,544^t$			
2°. 5544 fois 5 pieds, donnent	5544 fois 3^{pi}, donnent	2 772			
	5544 fois 2^{pi}, donnent	1 848			
3°. 5544 fois 7 pouc. donnent	4544 fois 6^{po}, donnent	462			
	5544 fois 1^{po}, donnent	77			
4°. 5544 fois 9 lignes, donnent	5544 fois 6^{li}, donnent	38	3^{pi}		
	5544 fois 3^{li}, donnent	19	1	6^{po}	
Produits AUXILIAIRES.	5544 *fois* 1^{li}, *donnent*	6	2	6	
	5544 *fois* 5^{li}, *donnent*	32	0	6	
5°. 5544 fois $\frac{5}{9}{}^{li}$, ou	5544 fois $\frac{5}{9}$ de lign. donnent	3	3	4	8^{li}.
6°. 5544 fois $32^t\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\frac{5}{9}$, donnent..............		$182\,628^t$	1^{pi}	10^{po}	8^{li}.

Dans cet exemple, où il s'agit de multiplier $32^t\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\,\frac{5}{9}$ par 5544; au lieu de multiplier chaque partie du multiplicande par le multiplicateur, ce qui donnerait $182\,628^t\,1^{pi}\,10^{po}\,8^{li}$, pour le produit demandé (n° 232 ; on évitera la plus grande partie des multiplications et des divisions excessivement longues que ce calcul exige, à l'aide des *parties aliquotes*, en décomposant les unités fractionnaires 5^{pi}, 7^{po}, 9^{li}, $\frac{5}{9}$, du multiplicande, en parties aliquotes de la toise, qui est l'unité principale du multiplicande ; voici le détail du calcul : pour multiplier les 32^t du multiplicande par le multiplicateur 5544, on a d'abord observé que le produit serait des toises, et que leur nombre serait 5544 fois 32; profitant de la remarque du n° 67 (page 61), on a changé l'ordre des facteurs, en multipliant 5544 par 32, ce qui a donné les produits partiels 11 088 et 166320; afin d'obtenir par de simples divisions, les produits correspondans aux unités fractionnaires du multiplicande, on a multiplié 1^t par 5544, ce qui a donné le *produit auxiliaire 5544 toises*; et comme ce produit ne doit pas faire partie du produit total, on peut barrer ses chiffres pour se rappeler qu'on ne doit pas le comprendre dans l'addition des produits partiels (on aura la même attention dans toute la suite du calcul). 2°. Pour multiplier les 5^{pi} du multiplicande par le multiplicateur 5544, on a décomposé 5^{pi}, en parties

parties aliquotes de la valeur 6 pieds, de la toise; ces parties sont 3 pieds, moitié de la toise, et 2 pieds, tiers de la toise; or 5544 fois 1^t, a donné 5544 toises; conséquemment, 5544 fois 3 pieds, donneront la moitié de 5544 toises, qui est 2772 toises; et 5544 fois 2 pieds, donneront le tiers de 5544^t, ou 1848^t; 3°. pour former le produit des 7 pouces du multiplicande par le multiplicateur 5544, on pourrait former le *produit auxiliaire* relatif à 1 pouce, en prenant la 24ème partie de celui obtenu pour 2 pieds, ou 24 pouces; le produit obtenu pour 1 pouce, multiplié par 7, donnerait celui relatif à 7 pouces; mais il est beaucoup plus commode de décomposer les 7 pouces, en parties aliquotes de 2^{pi}, ou de 24^{po}, c'est-à-dire en 6 pouces et 1 pouce; car 6 pouces étant le quart de 2 pieds, le produit correspondant à 6 pouces sera le quart de celui 1848^t, relatif à 2 pieds, c'est-à-dire 462^t; le sixième de 462^t, a donné 77 toises pour le produit correspondant à 1 pouce, ou à 12 lignes; 4°. pour former le produit des 9 lignes du multiplicande par le multiplicateur 5544, on a cherché à le déduire de celui 77 toises relatif à 12 lignes, en décomposant 9 lignes, en 6 lignes et 3 lignes; la moitié du produit 77 toises, relatif à 12 lignes, a donné $38^t\ 3^{pi}$ pour le produit correspondant à 6 lignes; et la moitié de ce dernier produit a donné $19^t\ 1^{pi}\ 6^{po}$, pour le produit relatif à 3 lignes. 5°. La multiplication des $\frac{5}{9}$ de ligne du multiplicande, par le multiplicateur 5544, a exigé la formation des deux *produits auxiliaires* correspondans à 1^{li} et à 5^{li}; le tiers du produit de 3 lignes a donné celui de 1^{li}; et le quintuple de ce dernier produit a exprimé celui de 5^{li}; après avoir *barré* ces deux produits auxiliaires, on a pris le 9ème du produit auxiliaire $32^t\ 0^{pi}\ 6^{po}$, relatif à 5 lignes, ce qui a donné $3^t\ 3^{pi}\ 4^{po}\ 8^{li}$ pour le produit relatif au 9ème de 5^{li}, ou à $\frac{5}{9}^{li}$, ou à $\frac{5}{9}$ de ligne. 6°. La somme des produits partiels, des diverses parties, 32^t, 3^{pi} et 2^{pi}, 6^{po} et 1^{po}, 6^{li} et 3^{li}, $\frac{5}{9}^{li}$, du multiplicande par le multiplicateur 5544, a composé le produit total $182\,628^t\ 1^{pi}\ 10^{po}\ 8^{li}$. Analysons les calculs précédens; après avoir multiplié les 32^t du multiplicande par le multiplicateur 5544, on a formé le *produit auxiliaire* 5544 fois 1^t, ou 5544^t; sa moitié plus son tiers, ont donné les

produits correspondans à 3 pieds plus 2 pieds, ou à 5 pieds; on a décomposé 7 pouces, en 6 pouces et 1 pouce; le quart du produit obtenu pour 2 pieds, ou 24^{po}, a donné celui de 6 pouces; et le 6e de ce dernier a donné celui de 1^{po}, ou de 12^{li}; on a décomposé 9 lignes en 6 lignes et 3 lignes; la moitié du produit obtenu pour 1^{po}, a donné celui de 6^{li}, dont la moitié a donné celui de 3^{li}; le tiers de ce dernier produit a donné celui de 1^{li}; ce dernier multiplié par 5, a donné le *produit auxiliaire* correspondant à 5 lignes; le 9ème du produit obtenu pour 5^{li} a donné celui correspondant aux $\frac{5}{9}$ de ligne du multiplicande; la somme des produits partiels, a donné le produit total.

239. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer, pouvant s'appliquer aux unités concrètes de chaque espèce, nous établirons cette règle générale. *Pour former le produit d'un nombre complexe par un nombre entier, au moyen des* PARTIES ALIQUOTES; *on multiplie d'abord les plus hautes unités du multiplicande par le multiplicateur, en choisissant pour multiplicateur le nombre qui contient le moins de chiffres significatifs. On multiplie ensuite l'unité principale du multiplicande par le multiplicateur, ce qui donne un* PRODUIT AUXILIAIRE *composé d'unités égales aux unités principales du multiplicande; pour en déduire les produits partiels des autres parties du multiplicande par le multiplicateur, on décompose les unités fractionnaires qui accompagnent les unités principales du multiplicande en parties aliquotes les unes des autres, de manière que chaque produit soit, ou la moitié, ou le tiers, ... ou en général une partie aliquote du produit partiel précédent; lorsque les décompositions ne se présentent pas sous une forme assez simple, on y supplée par les produits auxiliaires, et l'on barre ensuite ces produits pour ne pas les comprendre dans l'addition; la somme des produits partiels des diverses parties du multiplicande par le multiplicateur, compose le produit total.* Appliquons cette règle à l'exemple suivant, où l'unité principale du multiplicande est la *livre-poids*.

		℔	m	o	G	d	g	
	Multiplicande...	293℔	1^m	0°	1G	0^d	20^g	$\frac{12}{13}$
	Multiplicateur...	401						
Pour 293℔.	401 fois 293℔ donnent	293℔	0^m	0°	0G	0^d	0^g	0.
		117 200						
	401 *fois* 1℔ *donnerait*	401						
Pour 1^m.	401 fois 1^m donnent. .	200	1					
	401 *fois* 1° *donnerait*	25	0	1				
Pour 1G.	401 fois 1G donnent. .	3	0	2	1			
	401 *fois* 1^d *donnerait*	1	0	0	5	2		
Pour 20^g.	401 fois 12^g donnent. .	0	1	0	2	2	12	
	401 fois 8^g donnent. .	0	0	5	4	1	16	
Pour $\frac{12}{13}{}^g$.	401 fois $\frac{12}{13}{}^g$ donnent. .	0	0	0	5	0	10	$\frac{2}{13}$
Pour 293℔ 1^m 1G $20^g \frac{12}{13}$;	Produit total.	117 697℔	1^m	0°	5G	1^d	14^g	$\frac{2}{13}$

Commençant par les plus hautes unités du multiplicande, on a multiplié 293℔ par 401 ; on a ensuite multiplié 1℔, unité principale du multiplicande, par le multiplicateur 401, ce qui a donné le *produit auxiliaire* 401℔ ; pour en déduire les produits partiels des unités fractionnaires du multiplicande par le multiplicateur, on a dit : 1℔ du multiplicande donnant 401℔ au produit, 1^m, moitié d'une livre, donnera la moitié de 401℔, ou 200℔ 1^m ; la 8e partie de ce dernier nombre a donné 25℔ 0^m 1^o, pour le *produit auxiliaire* correspondant à 1°, ou à 8^G ; le 8e du produit auxiliaire obtenu pour 8^G, a donné le produit 3℔ 0^m 2^o 1^G, relatif à 1^G, ou à 3^d ; et le tiers de celui-ci a fourni le produit auxiliaire 1℔ 0^m 0^o 5^G 2^d, correspondant à 1^d, ou à 24 grains ; pour obtenir le produit correspondant aux 20 grains du multiplicande, on a décomposé 20^g en *parties aliquotes* de la valeur 24^g, d'un denier ; c'est-à-dire, en 12^g, moitié d'un denier, et en 8 grains, tiers d'un denier ; la moitié et le tiers du produit auxiliaire, obtenu pour 1^d, ou 24^g, ont exprimé les produits correspondans à 12^g et à 8^g ; enfin le 13e du produit 1^m 0^o 2^G 2^d 12^g relatif à 12^g, a donné 5^G 0^d $10^g \frac{2}{13}$, pour le produit correspondant, au 13e de 12 grains, ou à $\frac{12}{13}{}^g$; la somme des produits partiels correspondans aux diverses parties 293℔, 1^m, 1^G, 12^g, et 8^g, $\frac{12}{13}{}^g$, du multiplicande a donné le produit total 117 697℔ 1^m 0^o 5^G 1^d $14^g \frac{2}{13}$. On trouvera, au moyen de la même règle : que le produit de 293℔ 1^m 7^o 5^G 2^d $23^g \frac{12}{13}$ par 401, est 117 887℔

$1^{m}\,3^{o}\,5^{G}\,1^{d}\,17^{g}\,\frac{2}{13}$: que celui de $26^{\#}\,13^{s}\,7^{d}$ par 21, est $560^{\#}\,5^{s}\,3^{d}$: que celui de $26^{t}\,4^{pi}\,0^{p}\,10^{li}\,\frac{4}{5}$ par 12, est $560^{t}\,1^{pi}\,6^{po}\,10^{li}\,\frac{4}{5}$: que celui de $7^{t}\,1^{pi}\,4^{p}\,1^{li}\,\frac{2}{5}$ par 89 est $642^{t}\,5^{pi}\,6^{p}\,4^{li}\,\frac{3}{5}$: que celui de $69\,736^{\#}\,10^{s}\,5^{d}\,\frac{773\,317}{774\,144}$ par 331 776, est $23\,136\,905\,316^{\#}\,18^{s}\,5^{d}\,\frac{6}{9}$: etc.

240. *Pour* MULTIPLIER *un nombre complexe concret par un nombre complexe abstrait ; on prendra pour multiplicateur abstrait, la fraction irréductible équivalente au multiplicateur complexe ; il suffira alors de multiplier le multiplicande par le numérateur de la fraction multiplicateur, et de diviser le produit par son dénominateur ; le résultat de cette dernière opération sera le produit demandé. Ces deux opérations s'effectueront d'après les règles relatives à la multiplication et à la division d'un nombre complexe par un nombre entier abstrait....* S'il s'agissait, de multiplier le nombre complexe concret $12^{\#}\,3^{s}\,6^{d}$, par le nombre complexe abstrait $2\frac{1}{3}$; on exprimerait $2\frac{1}{3}$ par la fraction irréductible $\frac{7}{3}$; la question serait alors réduite à multiplier $12^{\#}\,3^{s}\,6^{d}$ par $\frac{7}{3}$, ce qu'on effectuerait en multipliant d'abord $12^{\#}\,3^{s}\,6^{d}$ par le numérateur 7, de la fraction multiplicateur, et divisant ensuite le produit $85^{\#}\,4^{s}\,6^{d}$ par le dénominateur 3 ; le résultat $28^{\#}\,8^{s}\,2^{d}$ exprimerait le produit demandé. On parviendrait directement au même résultat, en observant que multiplier par $2\frac{1}{3}$, revient à prendre successivement le double et le tiers du multiplicande $12^{\#}\,3^{s}\,6^{d}$; or son double est $24^{\#}\,7^{s}$, son tiers est $4^{\#}\,1^{s}\,2^{d}$; la réunion de ces deux nombres complexes donnera le produit cherché $28^{\#}\,8^{s}\,2^{d}$. De même, pour multiplier le nombre complexe concret $3^{\#}\,5^{s}\,2^{d}$, par le nombre complexe abstrait, 3 plus $\frac{1}{2}$ plus $\frac{153}{121}$; on prendra pour multiplicateur, la fraction irréductible $\frac{3043}{782}$, équivalente au multiplicateur primitif ; il suffira alors de multiplier le multiplicande $3^{\#}\,5^{s}\,2^{d}$, par le numérateur 3043 de la fraction multiplicateur, le résultat $9915^{\#}\,12^{s}\,2^{d}$, divisé par le dénominateur 782, donnera le produit demandé $12^{\#}\,13^{s}\,7^{d}$. S'il s'agissait de former le produit du nombre concret $1^{a}\,6^{m}\,25^{j}\,17^{h}\,\frac{1}{7}$ par le nombre abstrait 1 plus $\frac{1}{11}$, équivalent à $\frac{12}{11}$; on multiplierait le multiplicande par le numérateur 12 de la fraction multiplicateur, et le pro-

duit $18^{a}\ 10^{m}\ 8^{j}\ 13^{h}\ \frac{5}{7}$ divisé par le dénominateur 11 de la même fraction, donnerait le produit demandé $1^{a}\ 8^{m}\ 17^{j}\ 3^{h}\ \frac{3}{7}$. S'il faut multiplier 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 1^{G}\ 0^{d}\ 10^{g}\ \frac{2}{7}$, par la fraction abstraite $\frac{329}{324}$, équivalente au nombre complexe 1 plus $\frac{5}{324}$; on multipliera le multiplicande par le numérateur 329 de la fraction multiplicateur, le produit 846℔ $1^{m}\ 5^{o}\ 5_{G}\ 2^{d}$, divisé par le dénominateur 324, donnera 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6_{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$ pour le produit cherché. On trouvera de la même manière, que le produit de $2^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$ par $\frac{176}{395}$ est $4^{t}\ 5^{pi}\ 3^{po}\ 10^{li}\ 3^{points}\ \frac{231}{395}$.

La *division* de deux nombres complexes l'un par l'autre, ne peut offrir que deux cas. Dans le 1er, le diviseur est abstrait; dans le 2ème, le dividende et le diviseur sont composés d'unités concrètes de même nature. Nous allons successivement examiner ces deux espèces de division.

241. *Pour diviser un nombre concret par un nombre complexe abstrait; on substitue d'abord au diviseur abstrait, la fraction irréductible qui lui est égale, et la question se trouve ainsi réduite à diviser par une fraction abstraite; ce qu'on exécute, en multipliant le dividende par la fraction diviseur renversée (n° 130), ou, ce qui revient au même, en multipliant le dividende par le dénominateur de la fraction diviseur, et divisant ensuite le produit par le numérateur de cette même fraction; le résultat exprime le quotient demandé; ses unités sont de même nature que celles du dividende* (*n°* 213, *page* 236). Appliquons cette règle à la décomposition des produits formés dans l'article précédent; pour diviser $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$, par $2\ \frac{1}{3}$; on substituera au diviseur abstrait $2\ \frac{1}{3}$, la fraction irréductible $\frac{7}{3}$; la question sera alors réduite à diviser par $\frac{7}{3}$; ce qu'on exécutera, en multipliant le dividende $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$ par $\frac{3}{7}$, qui est la fraction diviseur renversée; le résultat $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$ exprime le quotient demandé; on l'a obtenu, en multipliant le dividende $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$ par le dénominateur 3 de la fraction diviseur, et divisant le produit $85^{\#}\ 4^{s}\ 6^{d}$, par le dénominateur 7; ce qui a donné $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$. Le quotient $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$ est exact, car multiplié par le diviseur $\frac{7}{3}$, il reproduit le dividende $85^{\#}\ 4^{s}\ 6^{d}$. S'il s'agissait de diviser $12^{\#}\ 13^{s}\ 7^{d}$ par le nombre complexe 3 plus $\frac{1}{2}$ plus $\frac{153}{121}$, équivalent à la fraction

irréductible $\frac{3043}{782}$; on multiplierait le dividende par le dénominateur 782, le produit $9915^{\#}\ 12^{ʃ}\ 2^{d}$, divisé par le numérateur 3043, donnerait le quotient demandé $3^{\#}\ 5^{ʃ}\ 2^{d}$. On trouvera de la même manière ; que le quotient de $1^{a}\ 8^{m}\ 17^{j}\ 3^{h}\ \frac{3}{7}$ par $1\ \frac{1}{11}$, est $1^{a}\ 6^{m}\ 25^{j}\ 17^{h}\ \frac{1}{7}$; que celui de 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$ par $\frac{329}{324}$ est 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 1^{G}\ 0^{d}\ 10^{g}\ \frac{2}{7}$; que celui de $4^{t}\ 5^{pi}\ 3^{po}\ 10^{li}\ 3^{pt}\ \frac{231}{395}$ par $\frac{676}{395}$, est $2^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{lt}$.

242. *Pour* DIVISER *l'un par l'autre deux nombres concrets de même nature, on les rapportera d'abord à la même unité concrète ; il suffira alors de diviser l'un par l'autre les deux nombres que l'on obtiendra, en faisant abstraction de la nature de leur unité commune ; le quotient abstrait qui en résultera sera celui demandé. Le choix de l'unité commune est arbitraire ; mais dans la pratique, il est plus commode de choisir la plus haute unité, ou la plus petite. Si l'on veut rapporter le dividende et le diviseur à leur plus haute unité ; on substituera à chacun d'eux la fraction irréductible qui les exprime ; ces deux fractions de la plus haute unité concrète, considérées comme abstraites, et divisées ensuite l'une par l'autre, donneront un quotient abstrait qui sera celui demandé (n° 213, page 236). Si l'on rapporte les deux nombres complexes à leur plus petite unité concrète, il ne s'agira plus que de diviser l'un par l'autre deux nombres entiers rapportés à la même unité concrète, ce qu'on exécutera, d'après la règle du n° 207, en effectuant la division sur les nombres abstraits qui expriment de combien d'unités concrètes chaque nombre concret est composé.* (La seconde méthode est la plus simple). Prenons pour 1[er] exemple la division de $3^{\#}\ 7^{ʃ}$ par $1^{\#}\ 13^{ʃ}$; si l'on rapporte ces deux nombres à leur plus haute unité concrète, qui est la *livre tournois*, on verra qu'ils sont exprimés par les fractions irréductibles $\frac{67}{20}{}^{\#}$ et $\frac{33}{20}{}^{\#}$; ces deux fractions, considérées comme abstraites, et divisées l'une par l'autre, donneront le quotient abstrait $\frac{67}{33}$, qui sera celui demandé. Si l'on rapporte les deux nombres $3^{\#}\ 7^{ʃ}$ et $1^{\#}\ 13^{ʃ}$, à leur plus petite unité, qui est le *sou*, on trouvera qu'ils sont exprimés par les nombres entiers $67^{ʃ}$ et $33^{ʃ}$; comme ces deux nombres sont rapportés à la même

unité, il suffit d'effectuer la division sur les nombres abstraits 67 et 33, qui indiquent de combien d'unités concrètes chaque nombre concret est composé, le quotient abstrait $\frac{67}{33}$ est celui demandé : dans cet exemple, le 2ème procédé est le plus simple. Si les nombres proposés étaient 2 toises 4 pieds et 6 pouces 8 lig.; leur plus haute unité serait la toise, et leur plus petite unité serait la ligne; en rapportant ces nombres à leur plus haute unité, on verra qu'ils sont exprimés par les fractions irréductibles $\frac{8}{3}^t$ et $\frac{5}{54}^t$; la division de $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{54}$ donnera le quotient demandé $\frac{432}{15}$, ou $\frac{144}{5}$; on parviendrait au même résultat, en rapportant les deux nombres $2^t\ 4^{pi}$ et $6^{po}\ 8^{li}$, à leur plus petite unité, qui est la ligne; ils seraient alors exprimés par les nombres entiers 2304 lignes et 80 lignes; la division de 2304 par 80, donnerait le quotient demandé $\frac{2304}{80}$, qui se réduit à $\frac{144}{5}$; le diviseur, 6 pouces 8 lignes, multiplié par le quotient $\frac{144}{5}$, reproduit en effet le dividende $2^t\ 4^{pi}$. Pour diviser $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$ par $2^{\#}\ 9^{s}\ 1^{d}\ \frac{1}{11}$; on pourra substituer à ces deux nombres les fractions irréductibles équivalentes $\frac{36}{11}^{\#}$, $\frac{27}{11}^{\#}$; la division de $\frac{36}{11}$ par $\frac{27}{11}$, donnera le quotient demandé $\frac{36}{27}$, qui se réduit à $\frac{4}{3}$; si l'on rapporte le dividende et le diviseur à leur plus petite unité commune, qui est un onzième de denier, on trouvera qu'ils sont exprimés, par 8640 onzièmes de denier et par 6480 onzièmes de denier; divisant alors 8640 par 6480, le quotient $\frac{8640}{6480}$, ou $\frac{4}{3}$, sera celui demandé; le diviseur $2^{\#}\ 9^{s}\ 1^{d}\ \frac{1}{11}$, multiplié par le quotient $\frac{4}{3}$, reproduit en effet le dividende $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$. On trouvera de la même manière; que le quotient de $1^a\ 8^m\ 17^j\ 3^h\ \frac{3}{7}$ par $1^a\ 6^m\ 25^j\ 17^h\ \frac{1}{7}$ se réduit, à $\frac{12}{11}$; que celui de 2℔ $1^m\ 1^o\ 6^G\ 0^d\ 16^g$ par 2℔ $1^m\ 1^o\ 1^G\ 0^d\ 10^g\ \frac{2}{7}$, est $\frac{320}{324}$; que celui de $4^t\ 1^{pi}\ 7^{po}\ 2^{li}\ \frac{2}{5}$ par $2^t\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 2^{li}$, est $\frac{576}{395}$; dans ces exemples, chaque quotient est réduit à sa plus simple expression. Si l'on veut se convaincre qu'il n'y a point d'erreur de calcul; on multipliera le diviseur par le quotient, on trouvera un produit égal au dividende.

243. Les méthodes que nous venons d'exposer, offrent divers procédés pour effectuer toutes les opérations de l'arithmétique sur les nombres complexes, quelle que soit d'ailleurs l'espèce des unités de ces nombres. D'après les remarques du n° 205, nous

4

avons eu égard aux *conditions que chaque règle impose aux nombres qui concourent à former le résultat.* Ainsi, par exemple ; nous n'avons pas proposé d'ajouter ou de soustraire des nombres de nature différente, tels que 12 toises et 15 heures. La nature de la multiplication imposant au multiplicateur la condition d'être abstrait ; nous n'avons pas cherché le produit de deux nombres concrets l'un par l'autre. Dans la division, il eût de même été absurde, de supposer le quotient concret quand le diviseur est concret, ou de chercher le quotient de deux nombres concrets composés d'unités d'espèce différente. Cependant, comme plusieurs ouvrages renferment ces énoncés vicieux : multiplier $2^t\,3^{pi}$ par $5^{\#}\,7^{s}$: diviser $3^t 7^{pi}$ par $4^{\#}\,3^{s}\,5^{d}$: le quotient de $12^{\#}$ par 4 toises est $3^{\#}$: le quotient de $12^{\#}$ par $4^{\#}$ peut être, ou 3 toises, ou 3 hommes, ou 3 heures, ou 3 ans. Nous expliquerons comment on doit les interpréter ; on verra, que l'erreur vient de ce qu'on a confondu les nombres sur lesquels on opère avec ceux qui ne servent qu'à les déterminer. Nous allons d'abord traiter quelques problêmes qui offriront des applications faciles des règles précédentes. Nous passerons ensuite à des questions dont la solution levera toutes les difficultés relatives au calcul des nombres complexes.

On demande quelle est la totalité de l'ouvrage exécuté par trois ouvriers, dont le 1*er* *a fait* $5^t\ 2^{pi}\ 4^{po}\ 3^{li}\ \frac{5}{11}$, *le second* $4^t\ 3^{pi}\ 5^{po}\ 7^{li}\ \frac{2}{11}$, *et le troisième* $14^t\ 5^{pi}\ 5^{po}\ 2^{li}$; il est bien évident que la somme des ouvrages faits par chaque ouvrier donnera l'ouvrage total. Cette somme est $24^t\ 5^{pi}\ 3^{po}\ 0^{li}\ \frac{7}{11}$.

244. *On demande quelle a été la durée de la vie de quelqu'un, né le 3 juin de l'an 1710, à 4 heures 2 minutes du matin, et mort le 15 août de l'an 1789, à 8 heures 5 minutes du soir.* Cette question nous conduit assez naturellement à faire quelques observations, sur les divisions adoptées pour le temps, sur la manière dont on date, et sur le moyen de déterminer le temps écoulé d'une date à une autre. Comme le jour se divise en 24 heures, il paraîtrait naturel de compter les heures depuis la 1ere jusqu'à la 24e ; mais des considérations étrangères à la question actuelle, ont engagé à séparer le jour

en deux parties égales de 12 heures chacune (*), que l'on distingue par les mots *matin* et *soir ;* on a nommé *minuit* (**) le passage d'un jour à un autre, et *midi* l'instant qui sépare le matin du soir. Les heures écoulées depuis *minuit*, commencement du jour, jusqu'à midi, milieu du jour, se désignent par 1 heure du matin, par 2 heures du matin, et ainsi de suite, jusqu'à 12 heures du matin, ou midi. A partir de cet instant on recommence à compter les heures ; mais pour les distinguer des précédentes, on dit 1 heure après midi, et ainsi de suite ; ensorte que 3 heures après midi, est la 3e heure écoulée depuis la 12e, c'est-à-dire la 15e heure du jour; de même, 10 heures après midi, ou 10 heures du soir, exprime la 22e heure du jour, etc. D'après ces conventions; *chaque heure du matin exprime le temps écoulé depuis minuit, et chaque heure de l'après-midi, augmentée des 12 heures écoulées avant midi, donne le temps écoulé depuis minuit.* Le *présent* étant l'instant qui sépare le *passé* du *futur*, on peut également mesurer une époque, ou par l'instant qui finit ou par celui qui commence ; ce dernier diminué d'un donne le premier. Par exemple, le passage de la 4e heure à la 5e, est également exprimé, par la fin de la 4e heure ou par le commencement de la 5e heure; mais les instans qui suivent appartiennent à la 5e heure, tandis que les instans précédens appartiennent à la 4e heure ; ainsi dans la question actuelle, 4 heures 2 minutes du matin, indique qu'il s'est écoulé 4 heures 2 mi-

(*) La division du jour en deux parties égales offre un grand inconvénient. En effet ; une *montre* ne marquant que depuis une heure jusqu'à 12 heures, on ignore si les heures qu'elle indique sont écoulées depuis minuit, ou depuis midi : quand, par exemple, une montre indique 5 heures, on ignore s'il est 5 heures du matin, ou 5 heures du soir ; ensorte que le temps écoulé depuis le commencement du jour, peut être 5 heures, ou 17 heures. Les montres dont on se sert en Italie, n'ont pas ce défaut ; elles marquent depuis une heure jusqu'à 24 heures, et font parconséquent connaître le nombre d'heures écoulées depuis le commencement de la journée.

(**) *Minuit*, signifie le *milieu de la nuit :* c'est à cet instant que commence le jour appelé *jour naturel*, dont la durée est de 24 heures ; et on désigne par *jour artificiel*, le temps qui s'écoule chaque jour depuis le lever jusqu'au coucher du soleil.

nutes depuis la 1ère heure, et conséquemment, la 3e minute de la 5ème heure commence. De même, 8 heures 5 minutes après midi, signifie 8 heures 5 minutes écoulées depuis la 12e heure; ou bien 20 heures 5 minutes écoulées depuis minuit, et conséquemment la 6e minute de la 21e heure du jour commence.

La manière ordinaire de dater est obscure, elle ne donne qu'une idée confuse de l'instant qu'elle devrait faire connaître, ensorte qu'on en déduit difficilement le temps écoulé d'une époque à une autre; cela tient à ce qu'une date contient le passé et le futur. Par exemple; le mois de juin étant le 6e de l'année, l'époque de la naissance indiquée par le 3 juin de l'an 1710, à 4 heures 2 minutes du matin, marque le 3e jour du 6e mois de l'an 1710, à 4 heures 2 minutes du matin; or 4 heures 2 minutes, exprime un temps écoulé, tandis que le 3e jour, le 6e mois, et l'an 1710, ne sont pas écoulés; pour tout exprimer en temps écoulés, on observera que le temps écoulé, lors du commencement du 3e jour du 6e mois de l'an 1710, était 1709 ans 5 mois 2 jours; mais il s'est écoulé depuis $4^{h}\ 2'$; conséquemment, le temps écoulé, au 3e jour du 6e mois de l'an 1710 à $4^{h}\ 2'$ du matin, époque de la naissance, est 1709 ans 5 mois 2 jours 4 heures 2 minutes. On trouvera de la même manière que le temps écoulé, à l'époque de la mort, est 1788 ans 7 mois 14 jours 20 heures 5 minutes. Retranchant de ce temps celui écoulé lors de la naissance, le reste 79 ans 2 mois 12 jours 16 heures 3 minutes, exprimera la durée de la vie de la personne née le 3 juin de l'an 1710, à 4 heures 2 minutes du matin et morte le 15 août de l'an 1789, à 8 heures 5 minutes du soir. On trouvera également qu'une personne née le 12 septembre de l'an 1777, à 3 heures 45 minutes après-midi, et décédée le 9 février de l'an 1803, à 2 heures 7 minutes du matin, a vécu 25 ans 4 mois 26 jours 10 heures 22 minutes.

245. *En général; pour connaître le temps écoulé à une certaine époque; on substituera au nom du mois, le nombre qui indique son rang, et si les heures datent de l'après-midi, on leur ajoutera* 12 *heures, pour avoir les heures écoulées depuis minuit: alors; au nombre des années des mois et des jours, diminué d'un, on ajoutera le temps écoulé depuis minuit; la somme ex-*

primera le temps écoulé à l'époque donnée. D'après cela; si du temps écoulé à une époque, on ôte le temps écoulé à une autre époque, le reste exprimera combien il y a de temps d'une époque à l'autre. On suppose que les deux époques ont la même origine. Pour appliquer cette règle à un exemple, proposons-nous de découvrir le temps qui s'est écoulé...

Du 25 *novembre* 1495, *à* 5 *heures* 48 *minutes après midi*,
au 10 *avril* 1798, *à* 9 *heures* 25 *minutes du matin.*

On substituera aux noms *novembre* et *avril* les nombres 11e et 4e qui indiquent leurs rangs (n° 216), et ajoutant 12 heures aux 5^h 48′ après midi, on aura 17^h 48′ après minuit, ensorte que nos deux époques reviennent à celles-ci...

Du 25e *jour du* 11e *mois de l'an* 1495, *à* 17 *heures* 48 *minutes après minuit*.
Au 10e *jour du* 4e *mois de l'an* 1798, *à* 9 *heures* 25 *minutes après minuit*

Diminuant d'un les nombres qui expriment les années les mois et les jours de chaque époque, et ajoutant ensuite les temps écoulés depuis minuit, on aura pour les temps écoulés...

24 *jours*, 10 *mois*, 1494 *ans*, 17 *heures*, 48 *minutes.*
9 *jours*, 3 *mois*, 1797 *ans*, 9 *heures*, 25 *minutes.*

Si du temps écoulé à la 2e époque, on ôte le temps écoulé à la 1ère, le reste 302^a 4^m 14^j 15^h 37′, exprimera le temps écoulé depuis la 1ère époque jusqu'à la 2e.

246. *On demande quel doit être le prix de* 3 *toises d'un certain ouvrage, dont la toise coûte* 12$^{\#}$ 2^s 3^d $\frac{2}{11}$. Comme le prix d'une toise est 12$^{\#}$ 2^s 3^d $\frac{2}{11}$; le prix de 3 toises sera, 3 fois 12$^{\#}$ 2^s 3^d $\frac{2}{11}$, ou 36$^{\#}$ 6^s 9^d $\frac{6}{11}$. Le nombre concret 3 toises, n'a pas servi de multiplicateur, il n'a servi qu'à déterminer le multiplicateur abstrait 3; ensorte que si 12$^{\#}$ 2^s 3^d $\frac{2}{11}$, au lieu d'être le prix d'une toise, était le prix d'un marc, ou d'une aune, ou d'une once; le prix de 3 marcs, ou de 3 aunes, ou de 3 onces, serait également exprimé, par 3 fois 12$^{\#}$ 2^s 3^d $\frac{2}{11}$, ou par 36$^{\#}$ 6^s 9^d $\frac{6}{11}$. Si l'on commettait l'erreur de prendre pour multiplicateurs les nombres concrets, 3 toises, 3 marcs, 3 aunes, 3 onces, on en tirerait cette conclusion absurde, que des facteurs de nature différente donnent le même produit.

On demande quel doit être le prix de 1296 *aunes de toile*,

dont l'aune coûte $3^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{1}{3}$. Le prix d'une aune multiplié par le nombre 1296 des aunes, donnera $5040^{\#}$ pour le prix des 1296 aunes.

Un ouvrier a fait 2 toises 2 pieds d'ouvrage, à raison de $12^{\#}$ 5^{s} 6^{d} *la toise; on demande ce qui lui est dû.* 2 pieds exprimant le tiers d'une toise; 2^{t} 2^{pi} exprime $2^{t}\frac{1}{3}$, ou $\frac{7}{3}$ de toise; or une toise coûte $12^{\#}$ 3^{s} 6^{d}, les $\frac{7}{3}$ d'une toise coûteront donc, les $\frac{7}{3}$ de $12^{\#}$ 3^{s} 6^{d}, ou $28^{\#}$ 8^{s} 2^{d}. On voit que le nombre concret 2^{t} 2^{pi} n'a pas été multiplicateur, il n'a servi qu'à déterminer le multiplicateur abstrait $\frac{7}{3}$, qui indique combien il y a de toises et de parties de toises dans l'ouvrage, 2^{t} 2^{pi}, dont on cherche le prix. Pour trouver le prix de 2^{t} 2^{pi}, il eût été plus naturel de chercher successivement le prix de 2^{t} et celui de 2^{pi}, de cette manière; comme une toise coûte $12^{\#}$ 3^{s} 6^{d}, les 2^{t} coûteront 2 fois $12^{\#}$ 3^{s} 6^{d}, ou $24^{\#}$ 7^{s}; 2 pieds est le tiers d'une toise; le prix des 2^{pi} sera donc le tiers du prix $12^{\#}$ 3^{s} 6^{d} d'une toise, c'est-à-dire $4^{\#}$ 1^{s} 2^{d}; le prix des 2^{t} 2^{pi} d'ouvrage sera donc, $24^{\#}$ 7^{s} plus $4^{\#}$ 1^{s} 2^{d}, ou $28^{\#}$ 8^{s} 2^{d}.

Quel doit être le prix de 12 toises 5 pieds 7 pouces d'un ouvrage dont la toise coûte $3^{\#}$ 10^{s} 5^{d}? Comme 12^{t} 5^{pi} 7^{po} est exprimé par la fraction irréductible $\frac{931}{72}^{t}$, équivalente aux $\frac{931}{72}$ d'une toise; le prix demandé, sera les $\frac{931}{72}$ de $3^{\#}$ 10^{s} 5^{d}, c'est-à-dire, $45^{\#}$ 10^{s} $6^{d}\frac{23}{72}$. Je dois observer qu'il serait absurde de considérer le nombre concret 12^{t} 5^{pi} 7^{po}, ou $\frac{931}{72}^{t}$, comme multiplicateur, car on a réellement obtenu le prix cherché, en multipliant le prix d'une toise par le nombre abstrait $\frac{931}{72}$, qui exprime le nombre de toises et de parties de toises qui composent l'ouvrage; ensorte que le nombre concret 12^{t} 5^{pi} 7^{po}, ou $\frac{931}{72}^{t}$, ne sert qu'à déterminer le multiplicateur abstrait $\frac{931}{72}$. On eût été conduit au même résultat, en calculant séparément les prix, de 12^{t} de 5^{pi} et de 7^{po}; car une toise coûtant $3^{\#}$ 10^{s} 5^{d}, les 12^{t} coûteront, 12 fois $3^{\#}$ 10^{s} 5^{d}, ou $42^{\#}$ 5^{s}; 1^{pi} étant le 6e d'une toise, le prix d'un pied est le 6e du prix $3^{\#}$ 10^{s} 5^{d} d'une toise, c'est-à-dire 11^{s} $8^{d}\frac{5}{6}$; les 5 pieds coûtent donc 5 fois 11^{s} $8^{d}\frac{5}{6}$, ou $2^{\#}$ 18^{s} $8^{d}\frac{1}{6}$; enfin, comme un pouce est le 12eme d'un pied, le prix d'un pouce est le 12eme du prix 11^{s} $8^{d}\frac{5}{6}$ d'un pied; ce 12eme est 11^{d} $\frac{53}{72}$; le prix

$11^{d}\frac{53}{72}$, d'un pouce, multiplié par 7, donnera $6^{s}\ 10^{d}\frac{11}{72}$, pour le prix des 7 pouces. La réunion des prix obtenus, pour 12^{t}, pour 5^{pi}, et pour 7^{po}, donnera $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\frac{23}{72}$ pour le prix total des $12^{t}5^{pi}7^{po}$. Cette seconde solution est plus compliquée que la première, mais avec un peu d'attention, on verra qu'elle est susceptible de devenir infiniment plus simple à l'aide de la considération des *parties aliquotes;* voici le détail du calcul, l'explication suit...

Le prix d'une toise étant		$3^{\#}$	10^{s}	5^{d}.
Quel doit être le prix de . :		12^{t}	5^{pi}	7^{po}.
1°. Prix des 12^{t}.		$42^{\#}$	5^{s}	0^{d}.
2°. Prix des 5^{pi}	Prix de 3^{pi}, ou $\frac{1}{2}$ toise.	1	15	2 $\frac{1}{2}$.
	Prix de 2^{pi}, ou $\frac{1}{3}$ de toise.	1	3	5 $\frac{2}{3}$.
3°. Prix des 7^{po}	Prix de 6^{po}, ou $\frac{1}{4}$ de 2^{pi}.	0	5	10 $\frac{5}{12}$.
	Prix de 1^{po}, ou $\frac{1}{6}$ de 6^{po}.	0	0	11 $\frac{53}{72}$.
4°. Prix des $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$.		$45^{\#}$	10^{s}	$6^{s}\frac{23}{72}$.

L'esprit de la méthode des PARTIES ALIQUOTES *consiste à décomposer l'ouvrage dont on cherche le prix, en parties aliquotes les unes des autres, ensorte que le prix de chaque partie de l'ouvrage devient une partie aliquote d'un prix précédemment obtenu.* Ainsi, dans notre exemple, on a décomposé l'ouvrage $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$, en 12^{t}, 3^{pi} et 2^{pi}, 6^{po} et 1^{po}, et l'on a cherché successivement les prix de ces cinq parties de l'ouvrage total, de cette manière; 1°. on a obtenu le prix des 12^{t}, en multipliant le prix d'une toise par 12; 2°. la moitié du prix de 1^{t}, a donné le prix d'une demi-toise, ou de 3^{pi}; et le tiers du prix de 1^{t}, a donné le prix d'un tiers de toise, ou de 2^{pi}; 3°. pour trouver le prix de 6^{po}, quart de 2^{pi}, on a pris le quart du prix de 2 pieds, et le 6eme du prix obtenu pour 6 pouces, a donné le prix d'un pouce; 4°. La somme des prix de toutes les parties de l'ouvrage a donné le prix de l'ouvrage total. On doit bien observer qu'il serait absurde de croire que les parties 12^{t}, 3^{pi}, 2^{pi}, 6^{po}, 1^{po}, ont servi de multiplicateur, car le calcul s'est réduit à multiplier par le nombre abstrait 12, et à diviser ensuite par les nombres abstraits 2, 3, 4, 6; ensorte que le nombre concret $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$, placé sous le multiplicande concret $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, occupe bien en effet la place du multiplicateur, mais il n'est pas multiplicateur;

il sert seulement à déterminer les nombres abstraits par lesquels on doit multiplier et diviser. La remarque actuelle est générale; *le nombre concret placé sous le multiplicande ne sert jamais qu'à indiquer les dépendances mutuelles des nombres abstraits par lesquels on doit multiplier et diviser.*

247. En général. *Quand le multiplicateur est déterminé par un nombre complexe concret ; on multiplie d'abord tout le multiplicande par le nombre abstrait des unités principales du nombre qui détermine le multiplicateur. Lorsque le multiplicateur surpasse 12, on effectue le produit par la méthode des* PARTIES ALIQUOTES (*n°* 239); *lorsque le multiplicateur n'excède pas 12, il est plus simple de multiplier chaque partie du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par les plus petites unités (n° 232). On cherche ensuite le produit correspondant à l'unité principale du nombre qui détermine le multiplicateur; ce qui donne un* PRODUIT AUXILIAIRE *égal au multiplicande; pour en déduire les produits partiels du multiplicande par les unités fractionnaires du multiplicateur, on décompose les unités fractionnaires du nombre qui détermine le multiplicateur, en parties aliquotes les unes des autres ; de manière que chaque produit partiel se trouve une* PARTIE ALIQUOTE *d'un produit déjà obtenu ; la somme des produits partiels ainsi déterminés, compose le produit total. On doit toujours avoir présent, que le nombre concret qui occupe la place de multiplicateur, ne sert qu'à indiquer les dépendances mutuelles des diverses parties du multiplicateur ; ensorte que le multiplicateur est le nombre abstrait qui exprime de combien d'unités et de parties d'unité se compose le nombre concret qui le détermine.* Pour appliquer cette règle ; proposons-nous de déterminer combien pour $5544^{\#}$ 14^{s} 8^{d}, on fera faire de toises d'un ouvrage dont 32^{t} 5^{i} 7^{po} $9^{li}\frac{5}{9}$ coûtent $1^{\#}$; il est bien évident qu'on aura de quoi payer autant de fois 32^{t} 5^{pi} 7^{po} $9^{li}\frac{5}{9}$, qu'il y a de livres dans la somme $5544^{\#}$ 14^{s} 8^{d} ; le nombre des unités de cette somme détermine donc le nombre abstrait par lequel on doit multiplier le multiplicande concret 32^{t} 5^{pi} 7^{po} $9^{li}\frac{5}{9}$. On disposera les calculs de la manière suivante....

A raison de $1^{\#}$ pour.	32^{t}	5^{pi}	7^{po}	$9^{li}\frac{5}{9}$
combien aura-t-on de toises pour.	$5\,544^{\#}$	14^{s}	8^{d}	
Pour $5544^{\#}$, on aura 5544 fois. . . . . $32^{t}\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\,\frac{5}{9}$, ou	$182\,628^{t}$	1^{pi}	10^{po}	8^{li} (n° 238).
Produit auxiliaire. *Pour $1^{\#}$, on aurait.*	32	5	7	$9\,\frac{5}{9}$
Pour 10^{s}, ou $\frac{1}{2}^{\#}$, on aura la moitié de $32^{t}\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\,\frac{5}{9}$, ou	16	2	9	$10\,\frac{7}{9}$
Pour 4^{s}, ou $\frac{1}{5}^{\#}$, on aura le 5eme de $32^{t}\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\,\frac{5}{9}$, ou	6	3	6	$4\,\frac{14}{45}$
Pour 8^{d}, ou $\frac{1}{6}$ de 4^{s}, on aura le 6e de $6^{t}\,3^{pi}\,6^{po}\,4^{li}\,\frac{14}{45}$, ou	1	0	7	$0\,\frac{97}{135}$
Pour les $5544^{\#}$ 14^{s} 8^{d}, on aura.	$182\,652^{t}$	2^{pi}	9^{po}	$11^{li}\frac{109}{135}$

On a d'abord multiplié le multiplicande $32^{t}\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\frac{5}{9}$ par le nombre abstrait 5544 des unités principales du nombre $5544^{\#}$ $14^{s}\,8^{d}$, qui détermine le multiplicateur, et comme le multiplicateur 5544 excédait 12, on a effectué la multiplication d'après la méthode des *parties aliquotes*, ce qui a donné $182\,628^{t}\,1^{pi}$ $10^{po}\,8^{li}$ (*voyez* le détail du calcul n° 238, page 288). On a ensuite cherché le produit correspondant à une livre, unité principale du nombre qui détermine le multiplicateur, ce qui a donné un *produit auxiliaire* égal au multiplicande $32^{t}\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}$ $\frac{5}{9}$; on a barré les chiffres de ce produit, pour rappeler qu'il ne doit pas être compris dans l'addition des produits partiels. Pour en déduire les produits partiels du multiplicande par les unités fractionnaires du multiplicateur, on a décomposé 14^{s}, en parties aliquotes de la livre, c'est-à-dire en 10^{s} et 4^{s}; pour 10^{s} on a pris la moitié du produit relatif à $1^{\#}$; le 5e du produit obtenu pour $1^{\#}$, a donné celui relatif à 4^{s}; et la 6e partie du produit obtenu pour 4^{s}, ou pour 48^{d}, a donné le produit correspondant à 8^{d}. La somme des produits partiels, en n'y comprenant pas le *produit auxiliaire* $32^{t}\,5^{pi}\,7^{po}\,9^{li}\,\frac{5}{9}$, a composé le produit total $182\,652^{t}\,2^{pi}\,9^{po}\,11^{li}\,\frac{109}{135}$; la réduction au même dénominateur 135 des fractions $\frac{7}{9}$, $\frac{14}{45}$, s'est effectuée en multipliant les deux termes de la 1ere par 15 et ceux de la 2e par 3. Si l'on demande quel doit être le prix de 2℔ $1^{m}\,1^{o}\,6^{G}\,0^{d}\,16^{g}$ d'une qualité de cuivre, dont la livre coûte $1^{\#}\,17^{s}\,6^{d}$. On raisonnera comme dans l'exemple précédent; le double du prix de 1℔ donnera celui de 2℔; la moitié du prix de 1℔, ou de 2^{m}, donnera celui d'un marc, ou de 8°; le 8e de ce dernier prix donne celui de 1°, ou de 8 gros; pour trouver le prix de 6 gros, on décomposera

6 gros en parties aliquotes de 8 gros, c'est-à-dire en 4^{G} et 2 ; la moitié du prix obtenu pour 8 gros, donne celui de 4 gros, et la moitié de ce dernier donne celui de 2 gros, ou de 6 deniers; pour trouver le prix de 16 grains, tiers de 48 grains ou de 2^{d}, on formera le *produit auxiliaire* correspondant à 2 deniers, en prenant le tiers du prix de 6 deniers ; le tiers du prix de 48 grains donnera celui de 16 grains ; la somme des prix obtenus pour 2℔, 1^{m}, 1^{o}, 4^{G}, 2^{G}, et 16 grains, composera le prix demandé des 2℔ 1^{m} 1^{o} 6_{G} 0^{d} 16^{g} de cuivre ; on trouvera $4^{\#}$ 17^{s} 11^{d} pour ce prix. On fût parvenu au même résultat, en substituant d'abord aux nombres complexes $1^{\#}$ 17^{s} 6^{d} et 2℔ 1^{m} 1^{o} 6^{G} 16 grains, les fractions irréductibles $\frac{15}{8}^{\#}$ et $\frac{47}{18}$℔, qui les expriment ; on eût alors dit : 1℔ de cuivre coûte $\frac{15}{8}^{\#}$, les $\frac{47}{18}$ d'une livre, exprimés par $\frac{47}{18}$℔, valent donc les $\frac{47}{18}$ de $\frac{15}{8}^{\#}$, c'est-à-dire $\frac{705}{144}^{\#}$, ou $\frac{235}{48}^{\#}$; la division de $235^{\#}$ par 48, eût donné $4^{\#}$ 17^{s} 11^{d} pour le prix cherché. Si l'on demandait le prix de 5^{pi} 2^{po} 8^{li}, à raison de $12^{s}6^{d}$ la toise ; on décomposerait 5^{pi} en parties aliquotes de la valeur 6^{pi} de la toise, c'est-à-dire en 3 pieds et 2 pieds ; la moitié du prix 12^{s} 6^{d}, d'une toise, donnera 6^{s} 3^{d} pour le prix des 3 pieds, et le tiers du prix de la toise, donnera 4^{s} 2^{d} pour le prix de 2 pieds, ou de 24 pouces ; le 12e de ce dernier prix donnera 4^{d} $\frac{1}{6}$ pour le prix de 2 pouces, ou de 24 lignes ; enfin, le tiers du prix de 24 lignes, donnera 1^{d} $\frac{7}{18}$ pour le prix des 8 lignes ; la somme des prix obtenus pour 3^{pi}, 2^{pi}, 2^{po}, 8^{li}, compose le prix 10^{s} $10^{d}\frac{5}{9}$, des 5^{pi} 2^{po} 8^{li}. Passons aux *problèmes dont les solutions dépendent de la division.*

248. *Trois aunes de drap ont coûté* $36^{\#}$ 6^{s} 9^{d} $\frac{6}{11}$. *On demande le prix de l'aune.* Le tiers du prix des trois aunes donnera $12^{\#}$ 2^{s} 3^{d} $\frac{2}{11}$ pour le prix d'une aune. On doit bien observer que le nombre concret 3 aunes, n'a servi qu'à déterminer le diviseur abstrait 3. Si l'on considérait 3 aunes comme diviseur, il en résulterait cette absurdité, que le quotient $12^{\#}$ 2^{s} 3^{d} $\frac{2}{11}$ multiplié par le diviseur 3 aunes, reproduirait le dividende $36^{\#}$ 6^{s} 9^{d} $\frac{6}{11}$. Ainsi, quoique dans la question actuelle les nombres qui déterminent le dividende et le diviseur soient composés d'unités concrètes de nature différente, le diviseur 3 est abstrait

trait et le quotient est composé d'unités concrètes de l'espèce du dividende.

Le prix de 1296 *aunes de drap est* 5040$^{\#}$; *on demande le prix de l'aune.* Comme 1296 aunes coûtent 5040$^{\#}$, une aune coûtera la 1296e partie de 5040$^{\#}$; divisant donc 5040$^{\#}$ par le nombre abstrait 1296, le quotient 3$^{\#}$ 17^{s} 9^{d} $\frac{1}{3}$, exprimera le prix d'une aune. Le nombre concret 1296 aunes n'a servi qu'à déterminer le diviseur abstrait 1296 ; pour que le nombre 1296 aunes pût être considéré comme diviseur, il faudrait que multiplié par le quotient 3$^{\#}$ 17^{s} 9^{d} il reproduisît le dividende 5040$^{\#}$, ce qui est absurde.

On a payé 28$^{\#}$ 8^{s} 2^{d}, pour 2^{t} 2^{pi} *d'ouvrage ; on demande quel était le prix de la toise.* Comme 2^{t} 2^{pi} expriment $\frac{7}{3}$ de toise; on peut dire que 7 fois $\frac{1}{3}$ de toise coûtent 28$^{\#}$ 8^{s} 2^{d} ; conséquemment, $\frac{1}{3}$ de toise coûterait le 7e de 28$^{\#}$ 8^{s} 2^{d}, qui est 4$^{\#}$ 1^{s} 2^{d}; une toise coûtera donc 3 fois 4$^{\#}$ 1^{s} 2^{d}, c'est-à-dire 12$^{\#}$ 3^{s} 6^{d} ; on a obtenu le prix d'une toise, en divisant le prix des 2^{t} 2^{pi} par 7 et multipliant le quotient par 3, ce qui revient à diviser le prix des 2 toises 2 pieds d'ouvrage par la fraction abstraite $\frac{7}{3}$, qui exprime le nombre de toises et de parties de toise dont se compose 2^{t} 2^{pi} ; ensorte que le nombre concret 2^{t} 2^{pi} n'a servi qu'à déterminer le diviseur abstrait $\frac{7}{3}$.

On a payé 45$^{\#}$ 10^{s} 6^{d} $\frac{23}{72}$, *pour* 12^{t} 5^{pi} 7^{po} *d'ouvrage. On demande à combien revient la toise de cet ouvrage ?* Le nombre complexe 12^{t} 5^{pi} 7^{po}, est équivalent à la fraction irréductible $\frac{931}{72}$; le nombre de toises et de parties de toise dont se compose l'ouvrage, 12^{t} 5^{pi} 7^{po}, est donc exprimé par la fraction abstraite $\frac{931}{72}$; et conséquemment, en divisant le prix, 45$^{\#}$ 10^{s} 6^{d} $\frac{23}{72}$, de la totalité de l'ouvrage, par $\frac{931}{72}$, qui indique le nombre des toises et parties de toise de cet ouvrage, le quotient 3$^{\#}$ 10^{s} 5^{d} exprimera le prix d'une toise. Pour l'obtenir ; on a d'abord divisé le dividende 45$^{\#}$ 10^{s} 6^{d} $\frac{23}{72}$, par le numérateur 931 de la fraction diviseur ; le quotient 11^{d} $\frac{13}{72}$, multiplié par le dénominateur 72, de la fraction diviseur, a donné les 3$^{\#}$ 10^{s} 5^{d}. On s'énoncerait d'une manière inexacte, si l'on disait que dans l'exemple actuel, on est parvenu au résultat 3$^{\#}$ 10^{s} 5^{d}, en divi-

sant $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$ par $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$; car, si cela pouvait être, le produit de $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$ par $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$, serait $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$, chose impossible ; et en effet, nous avons vu que le diviseur était la fraction abstraite $\frac{931}{72}$, qui exprime le nombre des unités et parties d'unité contenues dans les $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$. C'est toujours dans ce sens qu'il faut concevoir la division complexe, lorsque dans la question qui y conduit, les nombres qui déterminent le dividende et le diviseur sont composés d'unités concrètes de nature différente, dans tous les cas, on doit prendre pour diviseur le nombre abstrait qui exprime combien il y a d'unités et de parties d'unité dans le nombre concret qui détermine le diviseur, et le quotient est alors composé d'unités concrètes de même espèce que celles du dividende. Ainsi, dans l'exemple précédent, nous avons pris pour diviseur abstrait la fraction $\frac{931}{72}$, qui exprime combien il y a de toises et de parties de toise, dans le nombre concret $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$; le quotient $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, s'est trouvé de la nature du dividende $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$.

249. En général. *Lorsque dans un problême, le nombre qui détermine le diviseur est composé d'unités concrètes, d'une autre nature que celles du dividende ; on doit convertir le 1er nombre en fraction irréductible ; et prendre ensuite pour diviseur cette fraction, considérée comme abstraite ; le quotient, qui servira de réponse à la question, sera composé d'unités concrètes de même nature que celles du dividende* (*n°* 213). S'il s'agissait de déterminer le prix de la toise, lorsque $5^{pi}\ 2^{po}\ 8^{li}$, coûtent $10^{s}\ 10^{d}\ \frac{5}{9}$; on convertirait $5^{pi}\ 2^{po}\ 8^{li}$, en fraction de la toise, ce qui donnerait $\frac{47^{t}}{54}$; divisant alors $10^{s}\ 10^{d}\ \frac{5}{9}$ par $\frac{47}{54}$, le quotient $12^{s}\ 6^{d}$, serait le prix de la toise. Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que les $\frac{47}{54}$ d'une toise, exprimés par $5^{pi}\ 2^{po}\ 8^{li}$, ayant coûté $10^{s}\ 10^{d}\ \frac{5}{9}$; ce prix est le produit du prix d'une toise par $\frac{47}{54}$; le prix d'une toise doit donc en effet s'obtenir en divisant $10^{s}\ 10^{d}\ \frac{5}{9}$ par $\frac{47}{54}$. Si l'on demandait à combien revient la livre de cuivre, lorsque 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$ coûtent $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$; on substituerait au 1er nombre, la fraction irréductible, $\frac{47}{18}$℔ qui l'exprime ; et la division des $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$, par la fraction irréductible $\frac{47}{18}$, donnerait $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$, pour le prix

de la livre de cuivre ; en effet, si le prix d'une livre de cuivre était connu, ses $\frac{47}{18}$ devraient donner $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$; les $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$ expriment donc le produit du prix de la livre par $\frac{47}{18}$; la division du produit $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$, par son facteur $\frac{47}{8}$, doit donc donner pour quotient l'autre facteur, qui est le prix de la livre. Si dans la question précédente, au lieu de demander le prix de la livre de cuivre, on demandait celui de l'once ; après avoir trouvé $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$ pour le prix de la livre ; sa moitié $0^{\#}\ 18^{s}\ 9^{d}$ exprimerait le prix d'un marc ou de 8 onces ; et la 8ème partie de $18^{s}\ 9^{d}$, donnerait $2^{s}\ 4^{d}\ \frac{1}{8}$ pour le prix de l'once. En général ; *pour trouver le prix de l'une quelconque des subdivisions de l'unité principale, lorsqu'on connaît le prix total d'un certain nombre d'unités principales jointes à des subdivisions de cette unité ; on divise le prix total par la fraction irreductible abstraite qui indique quelle portion l'ouvrage total est de l'unité principale ; le quotient est le prix de l'unité principale ; ce prix divisé par le nombre qui indique combien l'unité principale vaut des subdivisions dont on cherche le prix, donne pour quotient le prix demandé.*

250. Dans les questions précédentes, où les nombres qui déterminaient le dividende et le diviseur étaient composés d'unités concrètes de nature différente, nous avons été conduits à diviser un nombre concret par un nombre abstrait, ce qui a donné, pour réponse à la question, un nombre concret de l'espèce du dividende (n° 213, page 236). Nous allons actuellement résoudre des problêmes, qui conduiront à considérer un dividende et un diviseur concret de même nature ; le quotient sera alors un nombre abstrait (n° 213), il indiquera de combien d'unités se compose le nombre qui sert de réponse à la question. Par exemple ; *Pour trouver combien on aura d'aunes de drap pour* $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$, *lorsqu'une aune coûte* $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$; on observera que le prix d'une aune, multiplié par le nombre d'aunes cherché, doit donner $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$; la somme $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$, est donc le produit de $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$ par le nombre d'aunes cherché ; ce dernier nombre s'obtiendra donc en divisant le produit $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$ par son facteur connu $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$. Pour obtenir ce

2

quotient ; on substituera au dividende et au diviseur les fractions irréductibles $\frac{31079}{880}^{\#}$ et $\frac{31079}{2640}^{\#}$ qui les expriment, et la question sera ainsi réduite à diviser $\frac{31079}{880}$ par $\frac{31079}{2640}$ (n° 214) ; mais pour diviser l'une par l'autre deux fractions de même numérateur, il suffit de diviser le dénominateur de la 2e par celui de la 1ere (n° 135, pag. 137. 2°.) ; le quotient demandé est donc celui de 2640 par 880, c'est-à-dire 3 ; le nombre d'aunes cherché étant 3, la réponse à la question est 3 aunes ; et en effet, quand l'aune coûte $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$, les 3 aunes coûtent le triple, c'est-à-dire, $36^{\#}\ 6^{s}\ 9^{d}\ \frac{6}{11}$; comme l'exige l'état de la question. On voit dans cet exemple, que bien que le quotient soit le nombre abstrait 3, la réponse à la question est le nombre concret 3 aunes. C'est toujours dans ce sens qu'on doit interpréter la division complexe, quand le dividende et le diviseur sont composés d'unités concrètes de même nature ; le quotient est alors un nombre abstrait, que l'on transforme en un nombre concret dont l'espèce des unités est déterminée par la nature du problême qui a conduit à la division. En voici quelques exemples :

1°. *On a payé* $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$, *pour un certain nombre de toises, à raison de* $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$ *la toise ; il faut découvrir quel était ce nombre de toises.* Un raisonnement analogue à celui employé dans l'exemple précédent, montrera que pour trouver le nombre de toises, il faut diviser le prix total $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$ par le prix $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$ d'une toise. Substituant donc au dividende et au diviseur, les fractions $\frac{3409}{120}^{\#}$ et $\frac{1461}{120}^{\#}$ qui les expriment, il ne s'agira plus que de diviser $\frac{3409}{120}$ par $\frac{1461}{120}$; le quotient $\frac{3409}{1461}$ se réduit à $\frac{7}{3}$, en divisant les deux termes, 3409 et 1461, par leur plus grand commun diviseur 487 ; le nombre de toises cherché étant $\frac{7}{3}$, la réponse à la question est $\frac{7}{3}$ de toise, ou $2^{t}\ \frac{1}{3}$, ou $2^{t}\ 2^{pi}$; et en effet, une toise coûtant $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$, deux toises coûteront 2 fois $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$, ou $24^{\#}\ 7^{s}$; un tiers de toise, ou 2^{pi}, coûteront le tiers de $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$, ou $4^{\#}\ 1^{s}\ 2^{d}$; et les $2^{t}\ 2^{pi}$ coûteront $24^{\#}\ 7^{s}$ plus $4^{\#}\ 1^{s}\ 2^{d}$, ou $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$ comme l'exige l'état de la question ; 2°. *à raison de* $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$ *la toise, combien aura-t-on de toises pour* $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$. Si l'on substitue à ces deux nombres complexes les fractions équivalentes $\frac{12168}{3168}^{\#}$, et $\frac{157339}{3168}^{\#}$; on sera conduit à diviser la 2e frac-

tion par la 1ère ; le quotient abstrait $\frac{157339}{12168}$, sera le nombre de toises cherché ; ensorte que la réponse à la question est $\frac{157339^t}{12168}$, ou $12^t\,5^{pi}\,7^{po}$; ce qui s'accorde parfaitement avec la 4e question du n° 246, où l'on a vu que la toise coûtant $3^{\#}\,10^{s}\,5^{d}$, les $12^t\,5^{pi}\,7^{po}$, doivent coûter $45^{\#}\,10^{s}\,6^{d}\,\frac{23}{72}$; 3°. *le prix d'un certain nombre d'unités est un lingot d'argent pesant* 3 ℔ $1^m\,2^o\,5^G\,1^d$ *; le prix de l'unité est* 1 ℔ $1^m\,3^G\,1^d\,16^g$ *d'argent ; on demande quel était ce nombre d'unités.* Après avoir substitué à ces deux nombres complexes les fractions irréductibles $\frac{11}{3}$℔ et $\frac{55}{36}$℔ qui les expriment, on observera que le prix total $\frac{11}{3}$℔ est le produit du prix $\frac{55}{36}$℔ de l'unité, par le nombre d'unités cherché, et que conséquemment on obtiendra celui-ci, en divisant $\frac{11}{3}$℔ par $\frac{55}{36}$℔ ; le quotient est $\frac{396}{165}$, ou $\frac{12}{5}$; le nombre d'unités cherché est donc $\frac{12}{5}$; la nature des unités de ce quotient abstrait sera déterminée lorsqu'on particularisera dans l'énoncé l'espèce des unités dont on cherche le prix ; par exemple, si l'on prend successivement pour unité, la toise, l'aune, l'heure, etc., la réponse à chaque question sera, $\frac{12}{5}$ de toise, $\frac{12}{5}$ d'aune, $\frac{12}{5}$ d'heure, etc. ; ensorte que si au lieu de prendre pour quotient le nombre abstrait $\frac{12}{5}$, on considérait le quotient comme servant de réponse à la question, il en résulterait qu'un même dividende divisé par le même diviseur, donnerait les quotiens différens $\frac{12^t}{5}$, $\frac{12^a}{5}$, $\frac{12^h}{5}$, etc., qui multipliés par le même diviseur concret $\frac{55}{36}$℔, donneraient le même produit $\frac{11}{3}$℔ ; ce qui est absurde. 4°. *Si le prix d'une once de thé étant* $11^s\,5^d\,\frac{1}{7}$, *on demande combien on aura d'onces pour* $4^{\#}$. On substituera d'abord au nombre complexe $11^s\,5^d\,\frac{1}{7}$, la fraction irréductible équivalente $\frac{4}{7}^{\#}$; le prix total $4^{\#}$, divisé par le prix $\frac{4}{7}^{\#}$ de l'once, donnera 7, pour le nombre d'onces cherché ; et en effet à $11^s\,5^d\,\frac{1}{7}$ l'once, les 7 onces valent 7 fois $11^s\,5^d\,\frac{1}{7}$, ou 4 livres. 5°. *Le prix d'une toise d'ouvrage étant* $1^{\#}\,6^s\,8^d$ *; combien aura-t-on de toises pour* $1^{\#}\,14^s\,3^d\,\frac{3}{7}$. Après avoir substitué à ces deux nombres les fractions irréductibles $\frac{4}{3}^{\#}$ et $\frac{12}{7}^{\#}$, qui les expriment ; on dira : le prix total $\frac{12}{7}^{\#}$ est le produit, du prix $\frac{4}{3}^{\#}$, par le nombre de toises cherché ; ce dernier nombre sera donc exprimé par le quotient $\frac{9}{7}$, de $\frac{12}{7}^{\#}$ par $\frac{4}{3}^{\#}$; la réponse à la question est donc $\frac{9^t}{7}$, ou $1^t\,1^{pi}\,8^{po}\,6^{li}$; *le quotient abstrait* $\frac{9}{7}$, *exprime combien de*

3.

fois le nombre $1^{\#}\,14^{s}\,3^{\vartheta}\,\frac{3}{7}$ *contient* $1^{\#}\,6^{s}\,8^{\vartheta}$. Enfin, si supposant que $1^{\#}\,6^{s}\,8^{\vartheta}$ est l'intérêt du capital $1^{\#}$, on demandait à quel capital correspond l'intérêt $1^{\#}\,14^{s}\,3^{\vartheta}\,\frac{3}{7}$, on serait encore conduit à diviser le 2e nombre par le 1er, le quotient $\frac{9}{7}$, exprimant le nombre de livres du capital cherché, ce capital est $\frac{9}{7}^{\#}$, ou $1^{\#}\,5^{s}\,8^{\vartheta}\,\frac{4}{7}$. On voit donc qu'avec les mêmes nombres $1^{\#}\,14^{s}\,3^{\vartheta}\,\frac{3}{7}$ et $1^{\#}\,6^{s}\,8^{\vartheta}$, dont le quotient est $\frac{9}{7}$, la réponse à la question peut être, ou le nombre $\frac{9}{7}^{*}$, composé d'unités concrètes différentes de celles du dividende et du diviseur, ou le nombre abstrait $\frac{9}{7}$ de fois, ou enfin le nombre $\frac{9}{7}^{\#}$, qui est de même nature que le dividende et le diviseur. Ainsi, quoique la nature des unités du quotient soit toujours déterminée par l'espèce des unités du dividende et du diviseur, cependant la nature des unités du nombre qui sert de réponse à la question ne dépend nullement de l'espèce des nombres donnés, mais bien de l'état de la question.

251. En général. *Lorsque dans un problême, les nombres concrets qui servent de dividende et de diviseur sont de même espèce; le quotient est un nombre essentiellement abstrait, qui indique de combien d'unités se compose le nombre qui doit servir de réponse à la question; la nature de ces unités est déterminée par l'état de la question.*

La méthode des parties aliquotes, est ordinairement la plus commode dans la pratique; mais dans certains cas, la conversion des nombres complexes en fractions irréductibles offre plus d'avantages. La question suivante est de cette espèce. *Un particulier achète deux lingots; le* 1er, *qui pèse* $2^{℔}\,0^{m}\,1^{o}\,4^{G}\,2^{d}\,9^{g}\,\frac{3}{7}$, *est un alliage de* FER *et d'*ÉTAIN *dont le tiers est en étain. Le* 2e, *qui pèse* $1^{℔}\,1^{m}\,1^{o}\,4^{G}\,2^{d}\,9^{g}\,\frac{3}{7}$, *est un alliage de* PLOMB *et de* CUIVRE *dont le quart est en cuivre. Le prix d'une livre de chaque métal est; pour le* FER $1^{\#}\,14^{s}\,3^{\vartheta}\,\frac{3}{7}$; *pour l'*ÉTAIN $1^{\#}\,11^{s}\,5^{\vartheta}\,\frac{1}{7}$; *pour le* PLOMB $14^{s}\,3^{\vartheta}\,\frac{3}{7}$; *pour le* CUIVRE $6^{\#}\,13^{s}\,4^{\vartheta}$. *On demande le prix de chaque lingot.* D'après cet énoncé, la quantité d'étain contenue dans le 1er lingot est le tiers de son poids $2^{℔}\,0^{m}\,1^{o}\,4^{G}\,2^{d}\,9^{g}\,\frac{3}{7}$, c'est-à-dire $0^{℔}\,1^{m}\,3^{o}\,1^{G}\,1^{d}\,19^{g}\,\frac{1}{7}$; le poids du fer qui est les $\frac{2}{3}$ de celui du même 1er lingot, sera donc le

double de $1^{m}\ 3^{o}\ 1^{G}\ 1^{d}\ 19^{g}\ \frac{1}{5}$, c'est-à-dire 1 ℔ $0^{m}\ 6^{o}\ 3^{G}\ 0^{d}\ 14^{g}\ \frac{2}{5}$. La livre de fer coûtant $1^{\#}\ 14^{ʃ}\ 3^{ᵭ}\ \frac{3}{7}$; on trouvera, par la méthode des parties aliquotes, que les 1 ℔ $6^{o}\ 3^{G}\ 0^{d}\ 14^{g}\ \frac{2}{5}$, de fer contenues dans le 1er lingot, coûtent $2^{\#}\ 8^{ʃ}$; il suffira pour cela de déduire du prix de 1 ℔, ceux de 4° et de 2°, de 2^{G} et de 1^{G}, de 12^{g} et de 2^{g}, de $\frac{2}{5}$ de grain; ce calcul n'offre aucunes difficultés; en effet : comme 1 ℔ vaut 16°; le quart du prix de 1 ℔ sera celui de 4°; la moitié de ce dernier prix sera celui de 2°, ou de 16^{G}; le 8e du prix de 16 gros, sera celui de 2 gros; et la moitié de ce dernier prix donnera celui d'un gros, ou de 72 grains; le 6e du prix de 72 grains sera celui de 12 grains; le 6e de ce dernier prix donnera celui de 2 grains; enfin le 5e du prix de 2 grains sera celui des $\frac{2}{5}$ de grain; la somme des prix partiels, ainsi calculés, donnera $2^{\#}\ 8^{ʃ}$ pour le prix des 1 ℔ $6^{o}\ 3^{G}\ 14^{g}\ \frac{2}{5}$ de fer; (pour plus de clarté on doit disposer ces opérations comme dans le n° 238). On trouvera de la même manière que le prix des 0 ℔ $1^{m}\ 3^{o}\ 1^{G}\ 1^{d}\ 19^{g}\ \frac{1}{5}$ d'étain, à raison de $1^{\#}\ 15^{ʃ}\ 5^{ᵭ}\ \frac{1}{7}$ la livre, est $1^{\#}\ 2^{ʃ}$. Le prix du 1er lingot est donc $2^{\#}\ 8^{ʃ}$ plus $1^{\#}\ 2^{ʃ}$, ou $3^{\#}\ 10^{ʃ}$. On trouvera, d'une manière analogue, que le prix du 2e lingot est $3^{\#}\ 10^{ʃ}\ 5^{ᵭ}\ \frac{5}{7}$. La somme des prix des deux lingots donnera le prix total $7^{\#}\ 0^{ʃ}\ 5^{ᵭ}\ \frac{5}{7}$. Dans ce problême, la méthode des parties aliquotes, a exigé de très-longs calculs; la conversion des nombres complexes en fractions irréductibles, conduit plus simplement au résultat. En effet ; si l'on substitue aux nombres complexes

2 ℔ $1^{o}\ 4^{G}\ 2^{d}\ 9^{g}\ \frac{3}{5}$; 1 ℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 4^{G}\ 2^{d}\ 9^{g}\ \frac{3}{5}$; $1^{\#}\ 14^{ʃ}\ 3^{ᵭ}\ \frac{3}{7}$; $1^{\#}\ 11^{ʃ}\ 5^{ᵭ}\ \frac{1}{7}$; $14^{ʃ}\ 3^{ᵭ}\ \frac{3}{7}$; $6^{\#}\ 13^{ʃ}\ 4^{ᵭ}$,

les fractions irréductibles . . . $\frac{21}{10}$ ℔ ; $\frac{8}{5}$ ℔ ; $\frac{12^{\#}}{7}$; $\frac{11^{\#}}{7}$; $\frac{5^{\#}}{7}$; $\frac{20^{\#}}{3}$;

qui les expriment, on verra; que le 1er lingot pèse $\frac{21}{10}$ ℔, que son tiers $\frac{7}{10}$ ℔ est en étain, et que ses deux tiers $\frac{14}{10}$ ℔, ou $\frac{7}{5}$ ℔, sont en fer ; que le 2e lingot pèse $\frac{8}{5}$ ℔, que son quart $\frac{2}{5}$ ℔ est en cuivre, et que le reste $\frac{6}{5}$ ℔ est en plomb. Comme une livre de fer coûte $\frac{12^{\#}}{7}$; le fer, dont le poids est les $\frac{7}{5}$ d'une livre, coûtera les $\frac{7}{5}$ de $\frac{12^{\#}}{7}$, ou $\frac{12^{\#}}{5}$; une livre d'étain coûtant $\frac{11^{\#}}{7}$, l'étain dont le poids est les $\frac{7}{10}$ d'une livre, coûtera les $\frac{7}{10}$ de $\frac{11^{\#}}{7}$, ou $\frac{11^{\#}}{10}$; le 1er lingot composé de $\frac{7}{5}$ ℔ de fer et de $\frac{7}{10}$ ℔ d'étain, dont les prix

4

respectifs sont $\frac{12}{5}$# et $\frac{11}{10}$#, coûtera donc, $\frac{12}{5}$# plus $\frac{11}{10}$#, ou $\frac{7}{2}$#, ou enfin 3# 10ſ. On trouvera avec la même facilité que le prix du 2ᵉ lingot est $\frac{74}{21}$#, ou 3# 10ſ 5ᵈ $\frac{5}{7}$. La simplicité de cette 2ᵉ solution comparée à la complication de la 1ère, montre que dans certains cas la conversion des nombres complexes en fractions irréductibles abrège les calculs ; mais comme dans d'autres circonstances la méthode des parties aliquotes offre plus d'avantages, il est impossible d'assigner à quelle méthode on doit donner la préférence. Ce qu'on peut dire de plus général à cet égard est compris dans la règle suivante.

252. *Avant de résoudre un problème, dont la solution dépend d'une multiplication ou d'une division complexe ; on doit convertir les nombres complexes en fractions irréductibles; alors, si les termes de ces fractions sont des petits nombres, on opérera sur les fractions irréductibles, et l'on convertira le dernier résultat en nombre complexe, d'après la méthode du n° 224; dans le cas contraire, on effectuera le calcul sur les nombres complexes.* Comme malgré cette règle abrégée, les multiplications et les divisions complexes, conduisent à des calculs excessivement longs, dont la complication est capable de rebuter les commençans, je vais faire connaître par quels procédés on peut obtenir le résultat le plus simplement possible. Les règles données (nᵒˢ 228 et 230), pour effectuer l'*addition* et la *soustraction* des nombres complexes, réunissent tous les avantages; nous ne parlerons en conséquence que de la *multiplication* et de la *division* complexe.

253. Nous avons vu qu'une fraction ne changeait pas de valeur, quand on multipliait ou divisait ses deux termes par un même nombre (nᵒˢ 113 et 138); mais toute fraction peut être considérée comme indiquant le quotient de son numérateur par son dénominateur (n° 120), *un quotient ne change donc pas de valeur lorsqu'on multiplie, ou lorsqu'on divise, le dividende et le diviseur par un même nombre.* Ce principe conduit à un procédé très-simple, *pour diviser l'un par l'autre deux nombres complexes de même nature ; on cherche par quels nombres il faut multiplier le dividende et le diviseur, pour les rapporter à la*

même unité. Les deux nombres entiers qui en résultent considérés comme abstraits et divisés ensuite l'un par l'autre, donnent un quotient abstrait qui est celui demandé. S'agit-il, par exemple, de diviser l'un par l'autre les deux nombres complexes de même nature,

$$10^{t}\ 2^{pi}\ 4^{po} \quad \text{et} \quad 2^{t}\ 3^{pi}\ 7^{po}.$$

On observera que, 1^{pi} valant 12^{po}, pour faire disparaître les pouces, il suffit de multiplier le dividende et le diviseur par 12, ce qui ne change pas le quotient, et donne les nouveaux nombres $124^{t}\ 4^{pi}$, $31^{t}\ 1^{pi}$; comme 6^{pi} valent 1^{t}, on fera disparaître les pieds en multipliant chaque nombre complexe par 6, ce qui donne 748^{t} et 187^{t}; ces deux nombres entiers considérés comme abstraits et divisés l'un par l'autre, donneront le nombre abstrait 4, pour le quotient demandé; le diviseur $2^{t}\ 3^{pi}\ 7^{po}$ multiplié par le quotient 4, reproduit effectivement le dividende $10^{t}\ 2^{pi}\ 4^{po}$. On opérerait d'une manière analogue pour toute autre espèce d'unité concrète; s'il s'agit, par exemple, de diviser $3^{\#}\ 7^{ſ}\ 5^{d}$ par $2^{\#}\ 4^{ſ}\ 11^{d}\frac{1}{3}$, ou ce qui revient au même, de déterminer combien de fois le 1er nombre contient le 2e; comme le quotient demandé ne change pas de valeur quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre, on fera d'abord disparaître le tiers de denier du diviseur, en multipliant chaque nombre par 3, ce qui donnera $10^{\#}\ 2^{ſ}\ 3^{d}$ et $6^{\#}\ 14^{ſ}\ 10^{d}$; or 12^{d} valent $1^{ſ}$, la multiplication par 12, convertit donc les deniers en sous, car chaque denier devient 12^{d} ou $1^{ſ}$; multipliant donc le nouveau dividende et le nouveau diviseur, par 12, il viendra $121^{\#}\ 7^{ſ}$ et $80^{\#}\ 18^{ſ}$; si l'on multiplie ces deux derniers nombres par 20, les sous disparaîtront, car chaque sou devenant $20^{ſ}$ ou $1^{\#}$, les $7^{ſ}$ et les $18^{ſ}$ deviendront $7^{\#}$ et $18^{\#}$, et l'on aura $2427^{\#}$ à diviser par $1618^{\#}$; le quotient est exprimé par la fraction abstraite $\frac{2427}{1618}$, qui se réduit à $\frac{3}{2}$, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur 809; ensorte que le quotient cherché est $\frac{3}{2}$; le diviseur $2^{\#}\ 4^{ſ}\ 11^{d}\frac{1}{3}$, multiplié par le quotient $\frac{3}{2}$, reproduit effectivement le dividende $3^{\#}\ 7^{ſ}\ 5^{d}$. On trouverait de la même manière que le quotient de 3℔ $1^{m}\ 2^{o}\ 5^{gros}\ 1^{d}$ par 1℔ 1^{m} 3ʒ $1^{d}\ 16^{grains}$, est exprimé par la fraction irréductible $\frac{12}{5}$.

254. *Lorsque dans un problème les nombres concrets qui déterminent le dividende et le diviseur sont de même nature, le quotient abstrait indique de combien d'unités se compose le nombre qui sert de réponse à la question. Pour déterminer directement cette réponse; on cherche par quels nombres il faut multiplier le dividende et le diviseur, pour les rapporter à la même unité concrète; ce qui donne deux nombres concrets entiers. On considère alors le* 1er *de ces deux nombres comme un dividende concret, dont l'unité principale est celle qui doit venir pour réponse à la question, et le nombre abstrait des unités du* 2e *nombre sert de diviseur; cette division effectuée d'après la règle du n° 224, donne un quotient concret qui sert de réponse à la question.* Pour appliquer cette règle à un exemple, reprenons la 2e question du n° 250 (page 308), où il s'agissait de déterminer combien on peut payer de toises d'ouvrage avec $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\frac{21}{72}$, lorsque la toise coûte $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$. Il est bien évident qu'on pourra payer autant de toises, que la somme donnée contient de fois le prix d'une toise; tout se réduit donc à diviser les deux nombres donnés l'un par l'autre; pour faire disparaître les 72^{ièmes} de denier du dividende, on multipliera successivement le dividende et le diviseur par les facteurs 8 et 9 de 72, ce qui donnera $3277^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$ et $253^{\#}\ 10^{s}$; multipliant chacun de ces deux nombres par 12, afin de faire disparaître les 11^{d}, il viendra $39334^{\#}\ 15^{s}$ et $3042^{\#}$; Enfin, pour faire disparaître les 15^{s}, on pourrait multiplier par 20, mais il est plus simple de multiplier par 4, car 4 fois 15^{s} font 60^{s}, ou $3^{\#}$; la multiplication effectuée donne $157339^{\#}$ et $12168^{\#}$; ensorte que le quotient de ces deux nombres entiers l'un par l'autre, est le même que celui des nombres complexes proposés; la réponse à la question devant être composée de toises, on considérera le 1er nombre $157339^{\#}$ comme un dividende concret ayant la toise pour unité principale, ce qui donnera le dividende 157339^{t}; le diviseur sera le nombre abstrait 12168, des unités concrètes du 2e nombre $12168^{\#}$, et le quotient de 157339^{t} par 12168, donnera $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ pour la réponse à la question. Cette règle s'appliquerait à toute autre espèce d'unité concrète. S'il s'agissait, par exem-

ple, de déterminer combien on peut payer de livres de cuivre avec $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$, lorsque la livre coûte $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$; comme il faudrait diviser le 1er nombre par le 2e, on les multiplierait d'abord par 12, afin de faire disparaître les deniers, ce qui donnerait $58^{\#}\ 15^{s}$ et $22^{\#}\ 10^{s}$; pour faire disparaître les sous, il suffirait de multiplier chaque nombre par 4, et la question serait réduite à diviser $235^{\#}$ par $90^{\#}$; la réponse à la question devant être composée de livres-poids, on considérera le 1er nombre concret $235^{\#}$, comme un dividende concret composé de livres-poids, ce qui donnera 235℔; le diviseur sera le nombre abstrait 90 des unités concrètes du 2e nombre $90^{\#}$; le quotient de 235℔ par 90, donnera $2℔\ 1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$, pour la réponse à la question.

255. *Si les nombres complexes qui déterminent le dividende et le diviseur, étaient composés d'unités concrètes de nature différente; on chercherait par quels nombres on doit les multiplier, pour faire disparaître les subdivisions de l'unité principale du nombre complexe qui détermine le diviseur; les multiplications effectuées donneraient deux nombres, dont le second serait incomplexe et entier; on diviserait alors le* 1er *nombre concret, par le nombre abstrait des unités du second, au moyen de la règle du n°236; le quotient servirait de réponse à la question.* Appliquons cette méthode, au 3e exemple du n° 248 (page 305), où il s'agissait de déterminer à combien revenait la toise d'un ouvrage, dont $2^{t}\ 2^{pi}$ avaient coûté $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$. La réponse à la question s'obtiendra en divisant le prix total $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$, par la fraction de toise qu'exprime $2^{t}\ 2^{pi}$, on pourrait faire disparaître les 2^{pi}, en multipliant chaque nombre par 6; mais il est plus simple de multiplier par 3, car cela donne $85^{\#}\ 4^{s}\ 6^{d}$ et 7 toises; divisant le 1er nombre, par le nombre abstrait 7 des unités de toises du 2e nombre 7^{t}, le quotient $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$, exprimera le prix de la toise. On se rend aisément compte de ce procédé; car $2^{t}\ 2^{pi}$ ayant coûté $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$, trois fois $2^{t}\ 2^{pi}$, ou 7^{t}, doivent coûter le triple de $28^{\#}\ 8^{s}\ 2^{d}$, c'est-à-dire $85^{\#}\ 4^{s}\ 6^{d}$; une toise coûte donc le 7e de $85^{\#}\ 4^{s}\ 6^{d}$ c'est-à-dire $12^{\#}\ 3^{s}\ 6^{d}$. Si l'on demandait le prix d'une toise lorsque $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ coûtent $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$; On reconnaîtrait aisément que ce 2e nombre est le dividende, et que le nombre des unités

du 1er détermine le diviseur abstrait ; appliquant la règle, on ferait d'abord disparaître les pouces, en multipliant les deux nombres complexes par 12, ce qui donnerait $545^{\#}\ 6^{s}\ 3^{d}\ \frac{5}{8}$, pour le prix de $155^{t}\ 1^{pi}$; afin de convertir les pieds en toises, on multipliera ces deux nombres par 6, et l'on trouvera $3277^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$ pour le prix de 931^{t}; divisant donc $3277^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$ par 931, le quotient $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, exprimera le prix de la toise. On opérerait d'une manière analogue pour toute autre espèce d'unité concrète ; s'il s'agissait de déterminer le prix d'une livre de cuivre, lorsque 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$ coûtent $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$; au lieu d'effectuer des calculs excessivement longs pour convertir ces deux nombres complexes en fractions irréductibles, on les multipliera d'abord par 3, les produits $14^{\#}\ 13^{s}\ 9^{d}$, 7℔ $1^{m}\ 5^{o}\ 2^{G}\ 2^{d}$, multipliés par 3, donneront $44^{\#}\ 1^{s}\ 3^{d}$ et 23℔ 1^{m}; ces deux derniers nombres multipliés par 2, donneront enfin $88^{\#}\ 2^{s}\ 6^{d}$ pour le prix de 47℔ ; la division de $88^{\#}\ 2^{s}\ 6^{d}$ par 47, donnera $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$, pour le prix d'une livre de cuivre.

256. La *multiplication complexe* comporte des simplifications analogues. S'il s'agit, par exemple, de déterminer le prix de $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ d'un ouvrage, dont la toise revient à $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$; au lieu de calculer successivement les prix de 12^{t}, de 5^{pi}, et de 7^{po}, par la méthode des parties aliquotes, il est plus simple de raisonner de la manière suivante. Le prix cherché s'obtiendrait évidemment en multipliant le prix, $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, d'une toise, par le nombre des toises de l'ouvrage total $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$; la réponse à la question est donc un produit dont le multiplicande est $5^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, et dont le multiplicateur est déterminé par le nombre abstrait des toises et parties de toise de $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$; pour faire disparaître les 5 deniers du multiplicande, on le multipliera par 12, ce qui donnera $42^{\#}\ 5^{s}$; ce nombre multiplié par 4 deviendra $169^{\#}$; le nombre $169^{\#}$ est 48 fois plus grand que le multiplicande $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, car on l'a obtenu après avoir successivement multiplié par les facteurs 12 et 4 de 48. De même, si l'on multiplie successivement le nombre $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$, par 12 et par 6, ce qui revient à multiplier par 72, on aura pour dernier produit le nombre 931^{t} qui sera 72 fois plus grand que celui $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$, qui doit déterminer le multiplicateur ; d'après cela, si l'on prend,

pour multiplicande le nombre $169^{\#}$, qui est 48 fois trop grand, et pour multiplicateur le nombre 931, qui est 72 fois trop grand, le produit $157339^{\#}$ que l'on obtiendra sera celui demandé, multiplié par 48 fois 72, ou par 3456; conséquemment, la division de $157339^{\#}$ par 3456, donnera pour résultat le produit demandé $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$. Si l'on examine la marche du calcul, on verra qu'on a successivement multiplié les nombres complexes, qui déterminent le multiplicande et le multiplicateur, par les nombres 12, 4, 12, 6, qui ont fait disparaître les subdivisions de l'unité principale, dans chaque nombre complexe, ce qui a donné les nombres entiers $169^{\#}$ et 931^{t}; on a multiplié le 1er nombre concret $169^{\#}$, par le nombre abstrait 931, des toises du 2e nombre 931^{t}, et le résultat $157339^{\#}$ divisé par le produit 3456, des nombres 12, 4, 12, 6, qui avaient servi de multiplicateurs, lorsqu'on avait fait disparaître les subdivisions de l'unité principale dans chaque nombre complexe, a donné le produit demandé $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$.

257. Les mêmes raisonnemens et la même manière d'opérer pouvant s'appliquer à tous les nombres, nous établirons cette règle générale : *Lorsque dans une question, les nombres concrets qui déterminent le multiplicande et le multiplicateur, sont complexes, il suffit de chercher par quels nombres on doit les multiplier pour faire disparaître les subdivisions de chaque unité principale. Les multiplications effectuées donnent deux nombres concrets incomplexes et entiers. On multiplie le premier de ces deux nombres, par le nombre abstrait des unités du second, le résultat divisé par le produit des nombres qui ont servi à faire disparaître les subdivisions de chaque unité principale, exprime le produit demandé.* Pour s'assurer que cette règle est applicable aux unités concrètes de toute espèce, il suffit d'observer qu'en multipliant successivement les nombres qui déterminent le multiplicande et le multiplicateur par certains nombres, on multiplie les facteurs du produit demandé par ces nombres, on doit donc diviser le produit déterminé par ces nouveaux nombres, par les nombres qui ont servi de multiplicateurs, ce qui revient à diviser par leur produit (n° 233). Si l'on demande, par exemple, quel doit être le prix de 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$, d'une

qualité de cuivre dont la livre coûte $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$; au lieu de calculer successivement les prix des diverses parties de cuivre, au moyen des parties aliquotes, comme on l'a fait dans le 2eme exemple du n° 247 (page 303), il est beaucoup plus simple d'appliquer la règle actuelle ; on observera d'abord que le prix inconnu doit s'obtenir en multipliant le prix $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$, d'une livre de cuivre, par le nombre de livres exprimé par 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$; ces deux nombres complexes sont donc ceux qui déterminent le multiplicande et le multiplicateur; cela posé : on fera disparaître les deniers et les sous du multiplicande $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$, en le multipliant successivement par 2 et par 4, ce qui revient à le multiplier par 8 ; le résultat sera $15^{\#}$; de même, pour faire disparaître les subdivisions de la livre-poids, unité principale du nombre 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$ qui détermine le multiplicateur; on multipliera ce nombre complexe par 3 ; le produit 7℔ $1^{m}\ 5^{o}\ 2^{G}\ 2^{d}$, multiplié par 3, donnera 23℔ 1^{m}; ce dernier nombre multiplié par 2, donnera 47℔ ; les nombres qui déterminent le multiplicande et le multiplicateur sont alors devenus $15^{\#}$ et 47℔; multipliant $15^{\#}$ par 47, on aura $705^{\#}$; ce dernier nombre divisé par le produit 144, des nombres 2, 4, 3, 3, 2, qui ont servi à faire disparaître les subdivisions de chaque unité principale, donnera $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$ pour le prix demandé, des 2℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 6^{G}\ 0^{d}\ 16^{g}$ de cuivre. Cette règle convient au cas où l'un des nombres qui déterminent le dividende et le diviseur est incomplexe. S'il s'agit du produit de $987^{t}\ 2^{pi}\ 4^{po}\ 9^{li}\ \frac{3}{5}$ par $\frac{113}{4}$; on multipliera le 1er de ces deux nombres par 5 et le 2e par 4 ; ce qui donnera les nouveaux facteurs 4937^{t} et 113; leur produit $557881^{\#}$ divisé par 20, produit des nombres 5 et 4 qui ont servi à faire disparaître les subdivisions de chaque unité principale, donne le produit cherché $27894^{\#}\ 1^{s}$. Si le multiplicande étant $\frac{355}{113}$℔, le multiplicateur était déterminé par le nombre d'années et de divisions d'années du nombre complexe $19^{a}\ 3^{m}\ 12^{j}\ 20^{h}\ 34'\ 17''\ \frac{1}{7}$, on ferait disparaître les subdivisions de la livre-poids et de l'année, en multipliant le 1er nombre par 113 et le 2e par 7, ce qui donnerait 355℔ et 135^{a}; alors 135 fois 355℔, ou 47925℔, divisé par 7 fois 113, ou 791, donnera 60℔ $1^{m}\ 1^{o}\ 3^{G}\ 0^{d}\ 17^{g}\ \frac{503}{791}$ pour le produit demandé. On opérerait de la même manière sur toute autre espèce d'unité concrète.

258. *La règle donnée dans le n° 179, pour convertir une fraction ordinaire en décimales, s'applique aux fractions concrètes ; on effectue la division du nombre abstrait des unités du numérateur, par le dénominateur, les unités du quotient sont de même nature que celles du numérateur. On doit en conséquence avoir l'attention de désigner la nature de l'unité concrète du quotient par un* SIGNE *mis sur la droite du chiffre des unités.* S'il s'agit, par exemple, de réduire en décimales la fraction $\frac{3}{8}$₶ ; on pourra effectuer la division du numérateur 3₶ par le dénominateur 8, de la manière suivante :

Dividende 3₶	8 Diviseur.
30 dixièmes de livre.	0₶,375 Quotient.
60 centièmes de livre.	
40 millièmes de livre.	
dernier reste..... 0	

La division de 3₶ par 8, ne donnant pas d'unités de livre, on mettra 0₶, au quotient : la *virgule décimale* mise sur la droite du zéro, fixe le rang des unités : le zéro indique l'absence des unités : le *signe* ₶ mis à droite du zéro, exprime que les unités du quotient sont des livres tournois ; on convertira le dividende 3₶ en 30 dixièmes de livre, et l'on aura 30 dixièmes de livre à diviser par 8 ; ce qui donnera 3 dixièmes de livre au quotient, avec le reste 6 dixièmes de livre ; on écrira donc 3 au rang des dixièmes de livre du résultat, c'est-à-dire sur la droite de la *virgule*, et pour continuer la division, on convertira le reste, 6 dixièmes de livre, en 60 centièmes de livre ; la division de 60 centièmes de livre par 8, donnera 7 centièmes de livre au quotient, et 4 centièmes de livre de reste ; on écrira donc 7 au rang des centièmes de livre du résultat ; enfin, le reste 4 centièmes de livre, converti en 40 millièmes de livre, et divisé par 8, donnera le quotient exact, 5 millièmes de livre, avec le reste zéro ; on écrira donc 5 au rang des millièmes de livre du résultat. La division est alors terminée, et l'on a 0₶,375 pour la valeur exacte, du quotient de 3₶ par 8, ou de la fraction concrète $\frac{3}{8}$₶ ; le quotient 0₶,375, multiplié par le diviseur abstrait 8, donne un produit 3₶,000 équivalent au dividende 3₶.

On doit bien observer, dans le quotient $0^{\#},375$, que les chiffres décimaux 3, 7, 5, expriment respectivement, des dixièmes, des centièmes et des millièmes de livre. On eût été conduit plus simplement au même résultat, en observant que la division du nombre concret $3^{\#}$ par le nombre abstrait 8, donne un quotient composé d'unités de même nature que le dividende (n° 213, page 236), et que par conséquent il suffit, après avoir divisé 3 par 8, d'exprimer que les unités du quotient 0,375 sont des livres tournois, ce qui donne $0^{\#},375$. S'il s'agit de convertir en décimales, la fraction concrète $\frac{117^t}{5}$; on divisera 117 par 5, ce qui donnera 23,4; on en conclura que la fraction concrète $\frac{117^t}{5}$, a pour valeur décimale $23^t,4$, c'est-à-dire 23 toises et 4 dixièmes de toise. On trouvera de la même manière, que les fractions concrètes

$\frac{17}{20}$℔; $\frac{3}{4}^h$; $\frac{9601}{200}^{pi}$; $\frac{9601}{200}^{pouces}$; $\frac{37}{64}^{ans}$

ont pour expressions décimales exactes,

0℔,85; $0^h,75$; $48^{pi},005$; $48^{po},005$; $0^{ans},578125$.

Les méthodes exposées, pour convertir une fraction abstraite en décimales, et pour exprimer un nombre décimal abstrait en fraction ordinaire, s'appliquent aux unités concrètes de toute espèce. Les règles des n°s 178 et 179, montreront que les fractions ordinaires

$\frac{307^t}{100}$; $\frac{38}{10000}^{\#}$; $\frac{3}{11}^{pi}$; $\frac{230}{44}$℔; $\frac{349}{10100}^{ans}$,

ont pour valeurs décimales exactes

$3^t,07^t$; $0^{\#},0038$; $0^{pi},27\ 27$ etc; 5℔,27 27 etc; $0^{ans},034554\ 4554$ etc.

Si l'on veut remonter de ces dernières expressions aux premières, il suffira de leur appliquer les règles des n°s 149, 186, 189 et 190. Les principes énoncés dans les n°s 193, 194, 195, 196, conviennent aux nombres concrets de toute espèce; on en déduira: 1°. que le nombre concret . . . . $97^{\#},895\ 999$ etc, a pour valeur 97℔,896, ou $\frac{97896^{\#}}{1000}$ (n° 193); 2°. que la valeur du nombre $3^t,754\ 348$, à un dixième, ou à un centième de *toise* près, est $3^t,8$, ou $3^t,75$ (n° 194); 3°. que les valeurs les plus approchées possibles du nombre $3^{pi},42759$, lorsqu'on conserve une décimale, ou 2 décimales, ou 3 décimales, sont $3^{pi},4$, ou $3^{pi},43$, ou $3^{pi},428$; chaque erreur est moindre

moindre qu'une demi-unité décimale du dernier ordre conservé, ensorte que $3^{pi},4$ est la valeur de $3^{pi},42759$, à moins d'un demi-dixième, ou d'un vingtième de pied près (n° 195); 4°. que la valeur de la fraction concrète $\frac{2}{7}^{\#}$, à un millième de livre près, est $0^{\#},285$, tandis que sa valeur la plus approchée possible avec 3 décimales, est $0^{\#},286$ (n° 196).

259. *Pour convertir un nombre, composé d'unités concrètes de grandeurs différentes, en décimales de l'une quelconque des unités concrètes de son espèce; on rapporte ce nombre à l'unité concrète demandée* (n° 223); *la fraction qui en résulte, réduite à sa plus simple expression et convertie ensuite en décimales, donne le nombre décimal cherché.* Par exemple; pour convertir en décimales du *sou*, pris comme unité principale, le nombre complexe $2^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$; on convertira ce nombre en sous, ce qui donnera $\frac{91}{2}^{s}$, car $2^{\#}\ 5^{s}$ et 6^{d}, valant respectivement 45^{s} et $\frac{1}{2}^{s}$, les $2^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$ valent $45^{s}\frac{1}{2}$, ou $\frac{91}{2}^{s}$; la fraction $\frac{91}{2}^{s}$, convertie en décimales, donne le résultat demandé $45^{s},5$; ensorte que $2^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$ valent 45 sous et 5 dixièmes de sou. Si l'on veut convertir le nombre complexe $2^{t}\ 3^{pi}\ 4^{po}\ 6^{li}$, en décimales du pied; on réduira tout en pieds; à cet effet, on remarquera, que $2^{t}\ 3^{pi}$ valent 15^{pi} et que $4^{po}\ 6^{li}$ font 54 lignes, ou $\frac{54}{144}^{pi}$, ou $\frac{3}{8}^{pi}$; les $2^{t}\ 3^{pi}\ 4^{po}\ 6^{li}$, valent donc $15^{pi}\frac{3}{8}$, ou $\frac{123}{8}^{pi}$; la conversion de cette dernière fraction en décimales, donnera le résultat demandé $15^{pi},375$; ensorte que le nombre concret $2^{t}\ 3^{pi}\ 4^{po}\ 6^{li}$, vaut 15 pieds plus 375 millièmes de pied. On trouvera de la même manière en convertissant les nombres complexes

$4^{t}4^{pi}2^{po}4^{li}9^{pt}\frac{3}{5}$; $3^{\#}5^{s}4^{d}\frac{4}{5}$; $0^{lb}1^{m}4^{o}3^{g}1^{d}16^{g}$; $1^{t}2^{pi}0^{po}6^{li}\frac{2}{5}$; $13^{a}3^{m}26^{j}18^{h}\frac{6}{7}$,

en décimales de leur plus haute unité, qu'ils ont pour valeurs

$4^{t},7$; $3^{\#},27$; $0^{lb},777777$ etc; $1^{t},3407407$ etc; $13^{a},324324$ etc.

260. *Réciproquement; pour ramener une fraction décimale d'une unité concrète déterminée, aux subdivisions de cette même unité, telles qu'elles sont établies et reçues par l'usage, ou ce qui revient au même, pour convertir un nombre décimal concret en nombre complexe; on considérera comme unité principale, celle de la fraction décimale proposée, et le problème pourra se résoudre des deux manières suivantes.* 1°. *On convertira la*

partie décimale en fraction ordinaire; on réduira cette fraction à sa plus simple expression; la fraction irréductible, qui en résultera, convertie en nombre complexe, d'après la règle du n° 224, exprimera les unités fractionnaires du nombre complexe demandé. **2°.** *On multipliera le nombre abstrait des unités décimales, par le nombre qui indique combien de fois l'unité principale contient sa 1ère espèce de subdivision; dans le produit, l'entier, qui se trouvera à gauche de la* VIRGULE DÉCIMALE, *exprimera le nombre des 1ères subdivisions, et la partie décimale multipliée par le nombre de fois que la 1ère subdivision contient celle de l'ordre inférieur, donnera un nouveau produit dont la partie entière exprimera le nombre des secondes subdivisions; on continuera à opérer de la même manière, jusqu'à la plus petite espèce de subdivision de l'unité principale; alors, si le dernier produit contient une partie décimale, on la convertira en fraction ordinaire de la plus petite unité concrète, et la somme de toutes les parties ainsi déterminées, jointe aux unités principales de la fraction décimale proposée, composera le nombre complexe demandé.* Prenons pour 1er exemple la fraction 0#,625, qui exprime des parties décimales de la livre tournois; en suivant le 1er procédé, on convertira 0#,625 en fraction ordinaire de la livre tournois, ce qui donnera $\frac{625}{1000}$#; on réduira cette dernière à sa plus simple expression, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur 125; la fraction résultante $\frac{5}{8}$#, convertie en nombre complexe, donnera le nombre complexe demandé 0# 12s 6d; en suivant le 2e procédé, on multipliera le nombre abstrait 0,625 des unités décimales, par le nombre 20, qui indique combien de fois une livre contient un sou : dans le produit 12,5, l'entier 12 exprime le nombre des sous et la partie décimale 0,5 multipliée par le nombre 12, qui indique combien un sou vaut de deniers, donnera le nouveau produit 6, qui exprime des deniers; ensorte que 0#,625 vaut 0# 12s 6d. S'il s'agit de convertir le nombre concret 1t,3 407 407 etc, dont la période est 407, en nombre complexe; on observera qu'il se compose de l'entier 1t et de la fraction de toise 0,3 407 407 etc, dans laquelle les chiffres décimaux 3, 4, etc, expri-

ment respectivement, des dixièmes de toise, des centièmes de toise, etc; pour extraire de cette fraction les pieds pouces lignes et fraction de ligne qu'elle peut contenir, on substituera à la *fraction décimale périodique mixte* 0^t,3 407 407 etc., la fraction irréductible $\frac{46}{135}{}^t$ qui l'exprime; la conversion de cette fraction en nombre complexe, donnera 2^{pi} 0^{po} $6^{li}\frac{2}{5}$ pour la valeur de la partie décimale 0^t,3 407 407 etc; ensorte que le nombre décimal proposé 1^t,3 407 etc, est exprimé par le nombre complexe 1^t 2^{pi} 0^{po} $6^{li}\frac{2}{5}$; si l'on applique le 2e procédé au même nombre 1^t,3 407 407 etc, composé de 1^t et de 0^t,3 407 407 etc; comme une toise vaut 6 pieds, on multipliera 0,3 407 407 etc, par 6, dans le produit 2,0 444444 etc (*), l'entier 2 exprime des pieds, et la partie 0,0444 etc, est une fraction décimale du pied; pour trouver les pouces, comme 1^{pi} vaut 12^{po}, on multipliera 0,0 4444 etc par 12, ce qui donnera 0,5 3333 etc; le zéro, qui tient la place des unités, nous indique qu'il n'y a pas de pouces; les lignes s'obtiendront en multipliant 0,5 3333333 etc, par 12; dans le produit 6,3 99999 etc, l'entier 6 exprime des lignes et la partie 0,3 9999 etc, est une fraction de ligne équivalente à $\frac{4}{10}$, ou à $\frac{2}{5}$; la réunion des parties 1^t, 2^{pi}, 0^{po}, $6^{li}\frac{2}{5}$, compose le nombre complexe demandé 1^t 2^{pi} 0^{po} $6^{li}\frac{2}{5}$. Si l'on compare les calculs relatifs aux exemples précédens, on en déduira que des deux procédés indiqués dans la règle générale, le 1er est le plus simple lorsque le nombre décimal proposé est périodique; dans le cas contraire, on doit préférer le second. D'après cette observation; on appliquera le 2e procédé aux nombres décimaux suivans :

(*) Si ne conservant que les deux premières périodes du multiplicande 0,3 407 407 407 etc, on multipliait 0,3 407 407 par 6, le produit serait exactement 2,0444 442; si l'on conservait les trois premières périodes, le produit serait 2,0444.444 442; on voit donc qu'en conservant toutes les périodes, le produit de 0,3 407 407 etc, par 6, doit être 2,04444444 etc. On peut d'ailleurs s'en convaincre, en substituant au multiplicande 0,3 407 407 etc, la fraction irréductible $\frac{46}{135}$, qui l'exprime; cette fraction multipliée par 6, devient $\frac{276}{135}$; la conversion de cette dernière en décimales, donne le résultat périodique 2,04444 etc, qui exprime le produit demandé. On trouvera, d'après cette observation, que le produit de 0,5333 etc, par 12 est 6,3999 etc; que celui de 0,47 47 47 etc, par 5, est 2,37 37 37 etc; que celui de 0,7777 etc, par 9, est 6,9999 etc, ou 7; et en effet, 0,777 etc, valant $\frac{7}{9}$, son produit par 9 doit être 7.

$4^{t},7$; $3^{\#},27$; $12^{lb},36$; $0^{pi},07$

et l'on reconnaîtra qu'ils sont exprimés par les nombres complexes

$4^{t}4^{pi}2^{po}4^{li}9^{pt}\frac{3}{5}$; $3^{\#}5^{s}4^{d}\frac{4}{5}$; $12^{lb}0^{m}5^{o}6^{G}0^{d}5^{g}\frac{10}{27}$; $0^{pi}0^{po}10^{li}\frac{2}{25}$.

L'application du 1[er] procédé aux fractions décimales périodiques

$9^{\#},7\,9999$ etc ; $0^{lb},777$ etc ; $1^{t},3\,407\,407$ etc ; $13^{ans},324\,324$ etc.

donnera les nombres complexes équivalens,

$9^{\#}\,16^{s}$; $0^{lb}\,1^{m}4^{o}3^{G}1^{d}16^{g}$; $1^{t}2^{pi}0^{po}6^{li}\frac{2}{5}$; $13^{a}\,3^{m}\,26^{j}\,18^{h}\,\frac{6}{7}$.

261. *Les règles données, dans la* 1[ere] *partie de cette arithmétique, pour le calcul des nombres décimaux abstraits, s'appliquent aux nombres décimaux concrets ; il suffit d'avoir égard aux conditions que la nature de chaque règle impose aux nombres sur lesquels on opère (page* 231 , *n°* 205*). L'*ADDITION *et la* SOUSTRACTION, *des nombres décimaux concrets rapportés à la même unité principale, s'exécutent au moyen des règles des n*os 164, *et* 167. *Les* PREUVES *s'effectuent comme dans le n°* 175.

	$3^{t},57$	$3994^{\#},45897003$	De.. $16^{t},51$	De.. $4803^{\#},828752 9756$
	$12^{t},94$	$809^{\#},3697829456$	ôtez.. $3^{t},57$	ôtez.. $809^{\#},3697829456$
Sommes	$16^{t},51$	$4803^{\#},8287529756$	Reste. $12^{t},94$	Reste $3994^{\#},45897003$
Preuves.	$01^{t},10$	$1110^{\#},1111000000$	$16^{t},51$	$4803^{\#},8287529756$

262. *Lorsque les nombres décimaux sont composés d'unités de grandeurs différentes, on les rapporte tous à la plus petite unité concrète. Pour effectuer cette conversion, il suffit de multiplier le nombre d'unités et de parties d'unité de chaque nombre concret, par le nombre abstrait qui indique combien son unité principale vaut des plus petites unités concrètes auxquelles on veut le rapporter.* S'il s'agit, par exemple, des nombres concrets $2^{t},11$, $3^{pi},7$, $2^{po},5$, qui expriment respectivement, 2 toises plus 11 centièmes de *toise*, 3 pieds plus 7 dixièmes de *pied*, 2 pouces plus 5 dixièmes de *pouce*; comme ces nombres sont composés d'unités différentes, la *toise* le *pied* et le *pouce*, on les rapportera tous à leur plus petite unité principale, qui est le *pouce*; pour convertir $2^{t},11$ en pouces, on observera que chaque toise vaut 72 pouces, et que parconséquent la conversion des toises en pouces doit s'effectuer en multipliant le nombre 2,11 des toises par 72 : le produit 151,92, nous apprend

que les $2^{t},11$ valent $151^{po},92$; par une raison semblable, comme chaque pied vaut 12 pouces; les $3^{pi},7$ valent un nombre de pouces marqué, par 12 fois 3,7, ou par 44,4; ensorte que $3^{pi},7$ valent $44^{po},4$. On serait conduit aux mêmes résultats en observant, que $2^{t},11$ valent $\frac{211^{t}}{100}$, ou $\frac{211 \text{ fois } 1^{t}}{100}$, ou $\frac{211 \text{ fois } 72^{po}}{100}$, ou $\frac{15192^{po}}{100}$ ou enfin $151^{po},92$; et que $3^{pi},7$ valent $\frac{37^{pi}}{10}$, ou $\frac{37 \text{ fois } 1^{pi}}{10}$, ou $\frac{37 \text{ fois } 12^{po}}{10}$, ou $\frac{444^{po}}{10}$, ou enfin $44^{po},4$. On voit donc que les nombres proposés rapportés à leur plus petite unité, ont pour valeurs respectives... $151^{po},92$, $44^{po},4$, $2^{po},5$; l'addition de ces trois derniers nombres donnera $198^{po},82$, pour la somme des nombres proposés. S'il faut rapporter à la même unité les nombres concrets

$5^{\#},47$; $3^{\#},73$; $2^{s},7$; $0^{s},3$; $9^{d},245$;

dont les unités différentes sont la *livre* le *sou* et le *denier*, on convertira tout en deniers; à cet effet, on observera que $1^{\#}$ valant 240^{d}, pour convertir des livres en deniers, il suffit de multiplier leur nombre par 240; ainsi on multipliera 5,47 et 3,73 par 240, les produits 1312,8 et 895,2, indiqueront que les nombres $5^{\#},47$ et $3^{\#},73$ valent $1312^{d},8$ et $895^{d},2$; de même, comme 1^{s} vaut 12^{d}, pour convertir $2^{s},7$ et $0^{s},3$ en deniers, on multipliera 2,7 et 0,3 par 12, les produits 32,4 et 3,6 montrent que $2^{s},7$ et $0^{s},3$ valent $32^{d},4$ et $3^{d},6$; ensorte que les nombres proposés, convertis en deniers, deviennent...

$1312^{d},8$; $895^{d},2$; $32^{d},4$; $3^{d},6$; $9^{d},245$;

Si l'on additionne ces derniers nombres, on verra que la somme des nombres concrets proposés est $2253^{d},245$. S'il s'agissait de soustraire $9^{d},245$ de $2^{s},7$; on convertirait ces deux nombres en deniers, et il ne s'agirait plus que de soustraire $9^{d},24$ de $32^{d},4$; le reste $23^{d},16$ serait celui demandé. De même, pour trouver la différence entre $3^{pi},784$ et $32^{li},29$; on convertira ces nombres en décimales de la ligne, ce qui donnera $544^{li},896$ et $32^{li},29$; la différence $512^{li},606$, entre ces deux nombres, est celle demandée.

263. *La* MULTIPLICATION *d'un nombre concret, entier ou décimal, par un nombre abstrait quelconque, s'effectue d'après*

les règles établies pour le calcul des nombres abstraits. Les unités du produit sont égales à celles du multiplicande ; leur nombre s'obtient en multipliant le nombre abstrait des unités du multiplicande, par le multiplicateur. S'agit-il, par exemple, de multiplier $3^t,7$ par $1,2$; on observera, que le résultat doit être composé de toises, et que leur nombre est déterminé par le produit $4,44$ des nombres abstraits $3,7$ et $1,2$; ensorte que le produit demandé est $4^t,44$. De même, pour multiplier $3^{\#},7$ par $\frac{4}{5}$; on effectuera le produit de $3,7$ par $\frac{4}{5}$, en multipliant $3,7$ par le numérateur 4 et divisant le résultat $14,8$ par 5, ce qui donnera $2,96$; le produit cherché est donc $2^{\#},96$; et en effet : $3^{\#},7$ valent $\frac{37^{\#}}{10}$, qui multipliés par $\frac{4}{5}$, donnent $\frac{148^{\#}}{50}$, ou $2^{\#},96$. On trouvera de la même manière : que le produit de 36℔,279 par $0,02$ est 0℔,72558 : que celui de 367^{pi} par $0,00012$ est $0^{pi},04404$: que celui de $34^t,562494$ par $0,012366459$ est $0^t,427\,415\,664\,988\,746$.

264. *Pour diviser deux nombres décimaux l'un par l'autre, on distinguera trois cas ; 1°. si le dividende et le diviseur sont rapportés à la même unité concrète, on les divisera l'un par l'autre, en faisant abstraction de la nature de leur unité commune ; le quotient abstrait sera celui des nombres proposés ; 2°. si le dividende et le diviseur sont composés d'unités concrètes de grandeurs différentes, on les rapportera à leur plus petite unité concrète (n° 221) ; la question se trouvera alors réduite à diviser l'un par l'autre deux nombres rapportés à la même unité concrète, ce qui s'exécutera, en faisant abstraction de leur unité commune ; le quotient abstrait sera celui demandé. 3°. Si le diviseur est abstrait, on effectuera la division, en faisant abstraction de la nature des unités du dividende ; le quotient sera composé d'unités concrètes égales à celles du dividende.* Donnons quelques exemples ; 1°. s'il s'agit de diviser l'un par l'autre les deux nombres décimaux $4^{\#},8$ et $0^{\#},12$, rapportés à la même unité concrète $1^{\#}$; on effectuera la division sur les nombres abstraits $4,8$ et $0,12$; le quotient 40 sera celui demandé ; la division a été bien faite, car le diviseur $0^{\#},12$ multiplié par le quotient 40, reproduit le dividende $4^{\#},8$. La division de $3^t,73$ par $1,^t1$, s'effectuera sur les nombres abstraits

3,73 et 1,1 ; le quotient abstrait $\frac{371}{110}$, ou 3 $\frac{43}{110}$, est celui demandé; si on veut l'exprimer en décimales, on convertira $\frac{43}{110}$ en décimales, ce qui donnera 0,30 90 90 etc; le quotient des nombres proposés sera alors exprimé par la fraction décimale périodique mixte 3,30 90 90 etc; 2°. pour diviser l'un par l'autre les deux nombres $3^{\#},71$ et $1^{s},5$, composés d'unités concrètes de grandeurs différentes, la *livre* et le *sou* ; on convertira $3^{\#},7$ en sous, et la question sera réduite à diviser $74^{s},2$ par $1^{s},5$; ce qui donnera $\frac{742}{15}$, ou 49,4 6666 etc, pour le quotient demandé. 3°. S'il s'agit de diviser le nombre concret $0^{\#},204$ par le nombre abstrait 1,2; on effectuera le calcul sur les nombres abstraits 0,204 et 1,2, ce qui donnera 0,17; on en conclura que le quotient demandé est $0^{\#},17$; ce quotient multiplié par le diviseur 1,2 reproduit effectivement le dividende $0^{\#},204$.

Les exemples précédens suffisent pour mettre en état d'effectuer toutes les opérations de l'arithmétique sur les nombres décimaux concrets ; mais ces nombres se combinant quelquefois avec des nombres complexes et fractionnaires, il est important de faire connaître comment on doit les calculer; voici la règle générale : *Pour opérer sur des nombres décimaux, concrets et abstraits, combinés avec des nombres complexes et incomplexes, on effectue le calcul sur les fractions irréductibles* (*) *équivalentes aux nombres proposés. Lorsque dans l'addition la soustraction ou la division, les fractions irréductibles, ne sont pas rapportées à la même unité concrète, on les rapporte toutes à leur plus haute unité, d'après la règle du n° 222. Quand le résultat est une fraction concrète, on peut le convertir en nombre complexe ou en décimales, à l'aide des règles des nos 224 et 258.* S'il s'agit de trouver la somme des nombres $2^{t},25$, $5^{pi},7$, $1^{t}\,3^{pi}\,\frac{1}{10}$; on substituera à ces nombres les fractions irréductibles équivalentes $\frac{9}{4}^{t}$, $\frac{57}{10}^{pi}$; $\frac{91}{60}^{t}$; pour convertir

(*) *Tout nombre entier, abstrait ou concret, peut être mis sous forme de fraction irréductible, en l'affectant d'un dénominateur égal à l'unité abstraite.* Ainsi les nombres $7^{\#}$, 9, 11^{t}, sont équivalens aux fractions $\frac{7}{1}^{\#}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{11}{1}^{t}$; on peut dire que ces fractions sont irréductibles, car elles ont le plus petit dénominateur possible. Cette remarque est générale.

$\frac{57}{10}^{pi}$ en fraction de toise, on observera que 1^{pi} valant $\frac{1}{6}^{t}$, les $\frac{57}{10}$ d'un pied valent les $\frac{57}{10}$ de $\frac{1}{6}^{t}$, ou $\frac{57}{60}^{t}$; les nombres proposés sont alors exprimés par les fractions de toise $\frac{9}{4}^{t}$, $\frac{57}{60}^{t}$, $\frac{91}{60}^{t}$; on pourrait réduire ces fractions au même dénominateur, d'après la règle du n° 115, mais il est plus simple de multiplier les deux termes 9 et 4 de la 1ere par 15, car elle devient $\frac{135}{60}^{t}$; cette fraction ajoutée aux deux autres donne $\frac{283}{60}^{t}$; si l'on convertit cette fraction concrète en nombre complexe et en décimales, on reconnaîtra que la somme des nombres proposés est également exprimée, par $\frac{283}{60}^{t}$, par $4^{t}\ 4^{pi}\ 3^{po}\ 7^{li}\ \frac{1}{5}$, et par $4^{t},7166666$ etc. Pour soustraire la fraction périodique $3^{pi},27\,27\,27$ etc, du nombre complexe $2^{t}\ 0^{pi}\ 10^{po}\ 3^{li}\ \frac{3}{7}$; on substituera à ces deux nombres les fractions irréductibles $\frac{36}{11}^{pi}$ et $\frac{15}{7}^{t}$ qui les expriment; pour rendre la soustraction possible, on convertira la 1ere fraction en fraction de toise, et la question sera réduite à soustraire $\frac{6}{11}^{t}$ de $\frac{15}{7}^{t}$; si l'on convertit le reste $\frac{123}{77}^{t}$, en nombre complexe et en décimales, on verra que la différence entre les nombres proposés est également exprimée, par $\frac{123}{77}^{t}$, par $1^{t}\ 3^{pi}\ 7^{po}\ \frac{1}{77}$, et par $1^{t},597402\,597402$ etc. Pour multiplier $2^{t}\ 0^{pi}\ 10^{po}\ 3^{li}\ \frac{3}{7}$ par $0,27\,27\,27$ etc; on substituera à ces deux nombres les fractions irréductibles équivalentes $\frac{15}{7}^{t}$ et $\frac{3}{11}$; leur produit $\frac{45}{77}^{t}$ est celui demandé; ce produit converti en nombre complexe et en décimales, deviendra $0^{t}\ 3^{pi}\ 6^{po}\ 0^{li}\ \frac{72}{77}$ et $0^{t},584415\,584415$ etc. Pour diviser $0^{t},584415\,584415$ etc, par $2^{t}\ 0^{pi}\ 10^{po}\ 3^{li}\ \frac{3}{7}$, on effectuera le calcul sur les fractions irréductibles équivalentes $\frac{45}{77}^{t}$, $\frac{15}{7}^{t}$, le quotient $\frac{3}{11}$, sera celui demandé; pour diviser $0^{t}\ 3^{pi}\ 6^{po}\ 0^{li}\ \frac{72}{77}$ par $0,27\ 27$ etc, on substituera à ces deux nombres les fractions irréductibles $\frac{45}{77}^{t}$ et $\frac{3}{11}$ qui les expriment; la division de la 1ere fraction par la 2e donnera $\frac{15}{7}^{t}$ pour le quotient demandé; ce quotient est exprimé par $2^{t}\ 0^{pi}\ 10^{po}\ 3^{li}\ \frac{3}{7}$ et par $2^{t},1428\,1428$ etc; s'il s'agissait de diviser $5^{pi},7$ par $2^{t}\ 1^{pi}\ 6^{po}$, on substituerait à ces deux nombres, les fractions irréductibles $\frac{57}{10}^{pi}$ et $\frac{9}{4}^{t}$ qui les expriment; afin de rendre la division possible, on convertira $\frac{57}{10}^{pi}$ en fraction de toise, ce qui donnera $\frac{57}{60}^{t}$; la division de $\frac{57}{60}^{t}$ par $\frac{9}{4}^{t}$, donnera $\frac{228}{540}$, pour le quotient demandé. On verra de même que le quotient de $2^{t}\ 3^{pi}$ par $2,7$ est également exprimé, par $\frac{25}{27}^{t}$, par $0^{t}\ 5^{pi}\ 6^{po}\ 8^{li}$, et par $0^{t},925\,925$ etc; ces quo-

tiens sont exacts, car chacun d'eux multiplié par la fraction $\frac{27}{10}$, équivalente au diviseur 2,7, donne un produit, dont la conversion en nombre complexe, reproduit le dividende $2^{t}\,3^{pi}$.

265. *Les observations du* n° 191 (*page* 209), *conviennent aux fractions décimales périodiques concrètes. Lorsqu'on veut obtenir un résultat rigoureusement exact, on doit effectuer les calculs sur les fractions concrètes équivalentes aux proposées.* Ainsi, pour déterminer la valeur exacte de la somme des deux nombres concrets $0^{\#},2$ 285714 285714 285714 285 714 etc... $0^{\#},2$ 142857 142857 etc, on leur substituera les fractions équivalentes $\frac{2}{7}^{\#}$ et $\frac{3}{14}^{\#}$; la somme $\frac{1}{2}^{\#}$ de ces dernières, convertie en décimales, donnera $0^{\#},5$ pour la valeur exacte du résultat demandé. Si l'on veut déterminer la différence exacte entre les expressions décimales $0^{t},86$ 81 81 etc, $0^{t},18$ 18 etc; on leur substituera les fractions équivalentes $\frac{71}{88}^{t}$ et $\frac{16}{88}^{t}$; leur différence $\frac{55}{88}^{t}$, ou $\frac{5}{8}^{t}$, convertie en décimales, donnera le reste demandé $0^{t},625$. Si l'on proposait de multiplier $1^{\#},571428$ 571428 etc, par 0,39 772 772 etc; on substituerait à ces fractions, les fractions équivalentes $\frac{11}{7}^{\#}$ et $\frac{35}{88}$; le produit $\frac{385}{616}^{\#}$, de la 1ère fraction par la 2ème, converti en décimales, sera le produit demandé $0^{\#},625$. Enfin, pour obtenir le quotient concret de. . . $0^{t},39$ 772 772 etc, par 0,63 63 etc; on opérera sur les fractions équivalentes $\frac{35}{88}^{t}$ et $\frac{7}{11}$; le quotient $\frac{5}{8}^{t}$, de la 1ère par la 2ème, réduit en décimales, donnera le quotient demandé $0^{t},625$.

266. La méthode du n° 199 (page 223), s'applique aux nombres concrets; on trouvera par son moyen, que la valeur la plus approchée du produit, de $3^{\#},456$ par 96,3, en ne conservant que les unités, est $333^{\#}$; que les valeurs les plus approchées possibles du produit de $576^{t},2486395$ par 269,457, en ne conservant que 2, ou 3, ou 4, décimales au résultat, sont $155274^{t},23$, ou $155274^{t},230$, ou $155274^{t},2296$; le 1er produit est trop fort, mais il n'excède pas sa valeur d'un deux-centième de toise; le 2ème est trop faible, mais augmenté d'un demi-millième, ou de 0,0005, il devient trop grand, ensorte que l'erreur est moindre qu'un-deux-millième de toise; le 3ème produit est trop fort, mais l'erreur est moindre qu'un

dix-millième ; on trouvera de même, que la valeur la plus approchée possible du produit des deux fractions décimales périodiques mixtes $32^{t},94161\,52333$ etc, $5544,7333$ etc, lorsqu'on ne veut conserver que 3 décimales, est $182652^{t},472$.

267. *Lorsque dans une* MULTIPLICATION *ou dans une* DIVISION, *les nombres complexes sur lesquels on doit opérer sont susceptibles d'être exprimés exactement par des nombres décimaux peu composés; on abrège beaucoup les calculs, en les effectuant sur les nombres décimaux équivalens aux nombres complexes proposés.* Pour en donner un exemple, proposons-nous de déterminer le prix de $4^{t}\,4^{pi}\,2^{po}\,4^{li}\,9^{points}\,\frac{3}{5}$ d'un certain ouvrage, dont la toise revient à $3^{\#}\,5^{s}\,4^{d}\,\frac{4}{5}$. Il est bien évident que le prix de la totalité de l'ouvrage s'obtiendra en répétant le prix d'une toise autant de fois qu'il y a de toises dans l'ouvrage total ; ensorte que $3^{\#}\,5^{s}\,4^{d}\,\frac{4}{5}$ est le multiplicande, et le multiplicateur abstrait est déterminé par le nombre de toises et de parties de toise qu'exprime $4^{t}\,4^{pi}\,2^{po}\,4^{li}\,9^{pts}\,\frac{3}{5}$; si l'on convertit ces nombres complexes en décimales de leur plus haute unité, on trouvera $3^{\#},27$ et $4^{t},7$; le multiplicande est donc $3^{\#},27$ et le multiplicateur est le nombre abstrait $4,7$; la multiplication effectuée donnera $15^{\#},369$ pour le prix cherché. Si l'on convertit ce nombre décimal en nombre complexe, on trouvera $15^{\#}\,7^{s}\,4^{d}\,\frac{14}{25}$. Dans cet exemple, la *méthode des parties aliquotes* conduirait à des calculs beaucoup plus longs, en effet : le prix d'une toise étant $3^{\#}\,5^{s}\,4^{d}\,\frac{4}{5}$; celui de 4^{t} en est le quadruple, c'est-à-dire $13^{\#}\,1^{s}\,7^{d}\,\frac{1}{5}$; la moitié du prix d'une toise donnera $1^{\#}\,12^{s}\,8^{d}\,\frac{2}{5}$ pour le prix de 3^{pi}, et le tiers du prix de 3^{pi} donnera $10^{s}\,10^{d}\,\frac{4}{5}$ pour le prix d'un pied. Le 6e de ce dernier prix donne celui, $1^{s}\,9^{d}\,\frac{4}{5}$, de 2^{po}, ou de 24 lignes ; le 6e du prix de 24^{li}, donne celui, $3^{d}\,\frac{10}{30}$, de 4 lignes ; or 4 lignes valent 48 points ; le prix des 8 points sera donc le 6e du prix de 4 lignes ; ce 6e est $\frac{109}{180}{}^{d}$; ce dernier nombre divisé par 8 donnera $\frac{100}{1440}{}^{d}$ pour le prix d'un point ; enfin le prix des $\frac{3}{5}$ d'un point sera les $\frac{3}{5}$ de $\frac{100}{1440}{}^{d}$, c'est-à-dire $\frac{327}{7200}{}^{d}$. L'addition des prix obtenus pour 4^{t}, pour 3^{pi} et 1^{pi}, pour 2^{po}, pour 4^{li}, pour 8 points et 1 point, enfin pour $\frac{3}{5}$ de point, donnera toutes réductions faites, $15^{\#}\,7^{s}\,4^{d}\,\frac{14}{25}$ pour le prix demandé, des $4^{t}\,4^{pi}\,2^{po}\,9^{pts}\,\frac{3}{5}$. On eût consi-

dérablement abrégé les calculs en substituant aux nombres complexes $4^{t}\,4^{pi}\,2^{po}\,4^{li}\,9^{pts}\,\frac{3}{5}$, $3^{\#}\,5^{s}\,4^{d}\,\frac{4}{5}$, les fractions irréductibles $\frac{47}{10}{}^{t}$ et $\frac{327}{100}{}^{\#}$, qui les expriment ; car on eût dit alors, une toise coûte $\frac{327}{100}{}^{\#}$, les $\frac{47}{10}$ d'une toise coûtent donc les $\frac{47}{10}$ de $\frac{327}{100}{}^{\#}$, c'est-à-dire $\frac{15369}{1000}{}^{\#}$; la conversion de cette dernière fraction en nombre complexe eût donné $15^{\#}\,7^{s}.\,4^{d}\,\frac{14}{25}$ pour le prix demandé. La méthode du n° 257 conduit fort simplement au même résultat ; on multiplie le multiplicande $3^{\#}\,5^{s}\,4^{d}\,\frac{4}{5}$ par 5, le résultat $16^{\#}\,7^{s}$ multiplié par 20, donne $327^{\#}$; pour faire disparaître les subdivisions de la toise, dans le nombre $4^{t}\,4^{pi}\,2^{po}\,4^{li}\,9^{pt}\,\frac{3}{5}$, qui détermine le multiplicateur, on multiplie ce nombre par 5, le résultat $23^{t}\,3^{pi}$ multiplié par 2, donne 47^{t} ; la multiplication de $327^{\#}$ par 47, donne $15369^{\#}$; ce dernier nombre divisé par le produit 1000, des nombres 5, 20, 5, 2, qui ont servi à faire disparaître les subdivisions de l'unité principale dans le multiplicande et le multiplicateur, donne enfin $15^{\#}\,7^{s}\,4^{d}\,\frac{14}{25}$, pour le prix cherché. Si l'on examine attentivement les calculs relatifs à chaque méthode, on reconnaîtra que celle des parties aliquotes est la plus compliquée. Le contraire arriverait si l'on se proposait de déterminer le prix de $3^{t}\,1^{pi}\,6^{po}$ d'un ouvrage dont la toise coûte $1^{\#}\,14^{s}\,3^{d}\,\frac{3}{7}$; le triple de ce prix donnerait celui, $5^{\#}\,2^{s}\,10^{d}\,\frac{2}{7}$, de 3 toises ; le 6e du prix de la toise donnera $5^{s}\,8^{d}\,\frac{4}{7}$ pour le prix d'un pied ; la moitié de ce dernier prix donnera le prix $2^{s}\,10^{d}\,\frac{2}{7}$ des 6 pouces; la somme de ces trois prix donnera $5^{\#}\,11^{s}\,5^{d}\,\frac{1}{7}$ pour le prix cherché, des $3^{t}\,1^{pi}\,6^{po}$. Si l'on voulait convertir en décimales les nombres complexes $1^{\#}\,14^{s}\,3^{d}\,\frac{3}{7}$, $3^{t}\,1^{pi}\,6^{po}$, on trouverait que le 1er est exprimé par la fraction décimale périodique $1^{\#},714285\,714285$ etc, et que le 2e a pour valeur exacte $3^{t},25$; or il est impossible d'effectuer la multiplication sur la totalité des chiffres décimaux du multiplicande; par conséquent, les décimales ne peuvent donner qu'une valeur approchée du résultat ; mais comme dans beaucoup de circonstances on peut négliger les fractions de denier, nous allons faire voir comment on doit alors opérer; la livre valant 240 deniers, un denier vaut $\frac{1}{240}{}^{\#}$, ou $0^{\#},0041666$ etc ; conséquemment, si l'on cherche la valeur du produit à moins d'un millième près, l'erreur commise, devenant moindre que $0^{\#},001$, sera plus pe-

tite qu'un denier ; et en effet, si on effectue le produit de $1^{\#},714285$ etc par $3,25$, d'après la méthode abrégée du n° 199, en poussant l'exactitude du produit jusqu'aux millièmes de l'unité principale du multiplicande, c'est-à-dire jusqu'aux millièmes de *livre*, on trouvera $5^{\#},571$; ce résultat converti en nombre complexe, donne $5^{\#}\ 11^{s}\ 5^{d}\ \frac{4}{100}$; cette valeur approchée n'est au-dessous du produit exact $5^{\#}\ 11^{s}\ 5^{d}\ \frac{1}{7}$ que de $\frac{72}{700}$ de denier, ensorte que l'erreur est effectivement moindre qu'un denier. Si l'on voulait déterminer avec la même exactitude, le prix de $12^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}$ à raison de $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$ la toise ; on pourrait substituer à ces deux nombres complexes les fractions décimales périodiques mixtes $12^{t},930555$ etc, $3^{\#},5208333$ etc, qui les expriment ; la question serait alors réduite à multiplier $3^{\#},520833$ etc, par $12,93055$ etc, en poussant l'exactitude du produit jusqu'aux millièmes de livre, c'est-à-dire jusqu'à la 3ᵉ décimale ; la multiplication effectuée, d'après la méthode du n° 199, donnera $45^{\#},526$ pour la valeur du produit à moins d'un millième près ; or $45^{\#},526$ valent $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{24}{100}$; ce nombre complexe exprime donc le prix demandé, à moins d'un denier près ; et en effet, le prix exact est $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$; l'erreur commise est donc moindre qu'un denier.

268. L'emploi des décimales étant de la plus grande importance, lorsqu'on veut obtenir promptement la valeur d'un résultat, à un degré d'exactitude déterminé ; nous allons chercher une règle générale pour chaque espèce d'unité concrète. Dans les usages ordinaires, on se contente de pousser l'exactitude : pour les *monnaies*, jusqu'aux *deniers* : pour les *longueurs*, jusqu'aux *lignes* : pour la *livre-poids* jusqu'aux *grains* : et pour le *temps*, jusqu'aux *minutes* ; mais

1^{d} vaut $\frac{1}{240}{}^{\#}$, ou $0^{\#},0041$ etc ; 1^{li} vaut $\frac{1}{864}{}^{t}$, ou $0^{t},0011$ etc ;
1^{grain} vaut $\frac{1}{9216}$ ℔, ou 0℔,0001 etc ; 1 minute vaut $\frac{1}{518400}{}^{a}$, ou $0^{a},000001$ etc.

Il suffit donc de pousser l'exactitude : pour les monnaies comme pour les subdivisions de la toise, jusqu'aux millièmes, c'est-à-dire jusqu'à la 3ᵉ décimale : pour la livre-poids, jusqu'aux dix-millièmes, c'est-à-dire jusqu'à la 4ᵉ décimale : enfin pour le temps, jusqu'aux millionièmes d'année, c'est-à-dire jusqu'à la 6ᵉ décimale. On en

déduit cette règle générale. *Pour multiplier un nombre complexe, dont l'unité principale est la* LIVRE TOURNOIS *ou la* TOISE *ou la* LIVRE-POIDS *ou l'*ANNÉE, *par un nombre complexe ou incomplexe, en poussant l'exactitude du produit jusqu'aux deniers, ou jusqu'aux lignes, ou jusqu'aux grains, ou jusqu'aux minutes; il faut convertir le multiplicande et le multiplicateur en décimales de leur plus haute unité (n° 259 page 321). On multipliera alors les deux nombres décimaux l'un par l'autre (n° 199), en poussant l'exactitude du produit: pour la livre tournois et pour la toise, jusqu'à la 3ᵉ décimale: pour la livre-poids, jusqu'à la 4ᵉ décimale: enfin pour l'année, jusqu'à la 6ᵉ décimale. Le produit décimal, converti en nombre complexe (n° 260), servira de réponse à la question. Pour éviter, dans la réduction des nombres complexes en décimales, de calculer plus de chiffres que n'en exige l'approximation demandée, on doit commencer par déterminer le nombre des décimales de chaque facteur (n° 199); ainsi: au nombre des décimales que l'on veut conserver dans le produit, on ajoutera le nombre des chiffres des unités principales d'un facteur, la somme, augmentée d'un, indiquera combien l'autre facteur doit contenir de décimales.* Appliquons cette règle à la question du n° 247 (page 303), où il s'agissait de déterminer combien on peut payer de toises avec $5544^{tt}\ 14^{s}\ 8^{d}$, lorsque $32^{t}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\frac{5}{9}$ coûtent 1^{tt}. La méthode des parties aliquotes a donné $182\,652^{t}\ 2^{pi}\ 9^{po}\ 11^{li}\ \frac{100}{135}$; la valeur du résultat, à moins d'une ligne près, est donc $182652^{t}\ 2^{pi}\ 9^{po}\ 11^{li}$; voyons si les décimales conduiront à ce dernier résultat. Le produit doit exprimer des toises; il suffit donc de pousser son exactitude, jusqu'à la 3ᵉ décimale; pour connaître combien on doit calculer de chiffres décimaux dans chaque facteur, on observera que les unités principales des nombres qui déterminent le multiplicande et le multiplicateur sont 32^{t} et 5544^{tt}; ajoutant donc au nombre 3 des décimales que l'on veut conserver dans le produit, les nombres 4 et 2 des chiffres des unités principales de chaque facteur, les sommes 7 et 5 augmentées d'un, donneront 8 et 6 pour les nombres des décimales que l'on doit calculer dans le multiplicande et dans le

multiplicateur; les unités fractionnaires $5^{pi}\ 7^{po}\ 9^{li}\ \frac{1}{9}$, du multiplicande, converties en fraction de la toise, qui est l'unité principale, valent $\frac{7322^{t}}{7776}$; comme le multiplicande doit contenir 8 décimales, on réduira cette fraction de toise en décimales, d'après la 2e règle du n° 196, en conservant 8 décimales, ce qui donnera $0^{t},9416152$3; on en conclura que la valeur la plus approchée possible du multiplicande, lorsqu'on conserve 8 décimales, est $32^{t},94161523$; de même, comme il suffit de calculer les 6 premières décimales du multiplicateur, on cherchera la valeur la plus approchée possible de $5544^{\#}\ 14^{s}\ 8^{d}$, en conservant 6 décimales; on trouvera que $14^{s}\ 8^{d}$ valent $\frac{176^{\#}}{240}$, ou $0^{\#},733333$, à moins d'un demi-millionième près; ensorte que les valeurs les plus approchées du multiplicande et du multiplicateur, en conservant 8 décimales dans l'un et 6 décimales dans l'autre, sont $32^{t},94161523$ et $5544,733333$; si l'on effectue la multiplication du 1er nombre par le 2e, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 3e décimale, on trouvera $182\ 652^{t},472$ pour le produit demandé; ce produit converti en nombre complexe, donnera $182\ 652^{t}\ 2^{pi}\ 9^{po}\ 11^{li}$ (on a négligé la fraction de ligne); c'est effectivement la valeur du résultat à moins d'une ligne près.

269. Le multiplicateur étant essentiellement abstrait, *un produit ne peut jamais contenir plus d'un facteur concret*, car s'il en contenait seulement deux, on serait conduit à multiplier deux nombres concrets l'un par l'autre, ce qui est impossible. *Pour former le produit de plusieurs facteurs, dont un seul est concret, on doit choisir le facteur concret pour 1er multiplicande; lorsque les facteurs sont des nombres entiers, il est plus simple d'effectuer le produit en faisant abstraction de l'espèce de leurs unités; le produit est de la nature du facteur concret.* S'agit-il, par exemple, de former le produit des facteurs 2, $3^{\#}$, 5; on multipliera $3^{\#}$ par 2, le résultat $6^{\#}$, multiplié par 5, donnera $30^{\#}$, pour le produit demandé; on serait conduit au même résultat, en observant que le produit demandé exprime des livres, et que leur nombre doit être exprimé par le produit 30, des facteurs 2, 3, 5. S'il s'agit du produit des facteurs 2, $7^{t}\ 5^{pi}$, $\frac{4}{7}$, 0,9; on choisira pour 1er multiplicande le facteur

concret $7^{t}\,5^{pi}$, que l'on multipliera par 2 ; le résultat $15^{t}\,4^{pi}$, multiplié par $\frac{4}{5}$, donnera $12^{t}\,3^{pi}\,2^{po}\,4^{li}\,\frac{4}{5}$; multipliant ce dernier nombre par la fraction ordinaire $\frac{9}{10}$, équivalente au facteur 0,9 ; le résultat $11^{t}\,1^{pi}\,8^{po}\,1^{li}\,\frac{46}{50}$, exprimera le produit des facteurs proposés. Il est quelquefois plus commode de multiplier le facteur concret par le produit des facteurs abstraits ; pour en donner un exemple, proposons-nous de former le produit des facteurs $124^{\#}\,7^{s}\,9^{d}\,\frac{3}{4}$, $\frac{7}{3}$, 3, 5, 0,1 ; si l'on multipliait successivement par chaque facteur, on trouverait : que le produit du 1er nombre par $\frac{7}{3}$, est $290^{\#}\,4^{s}\,10^{d}\,\frac{3}{4}$: ce nombre, multiplié par 3, donnerait $870^{\#}\,14^{s}\,8^{d}\,\frac{1}{4}$: ce résultat multiplié par 5, deviendrait $4353^{\#}\,13^{s}\,5^{d}\,\frac{1}{4}$; ce dernier nombre multiplié par la fraction $\frac{1}{10}$, équivalente au dernier facteur 0,1, donnerait enfin $435^{\#}\,7^{s}\,4^{d}\,\frac{1}{8}$, pour le produit des facteurs proposés ; on sera conduit plus simplement au même résultat, en formant d'abord le produit $\frac{7}{2}$, des facteurs abstraits $\frac{7}{3}$, 3, 5, 0,1 ; le facteur concret $124^{\#}\,7^{s}\,9^{d}\,\frac{3}{4}$, multiplié par $\frac{7}{2}$, donnera $435^{\#}\,7^{s}\,4^{d}\,\frac{1}{8}$, pour le produit cherché. S'il s'agissait des facteurs $9^{\#}\,7^{s}\,11^{d}$, $\frac{5}{3}$, 0,699999 etc, 0,999 etc ; on substituerait d'abord aux deux fractions décimales, les fractions irréductibles $\frac{7}{10}$ et $\frac{1}{1}$, qui les expriment ; on multiplierait ensuite le facteur concret $9^{\#}\,7^{s}\,11^{d}$ par le produit $\frac{7}{6}$, des nombres $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{1}$, équivalens aux facteurs abstraits ; le résultat $10^{\#}\,19^{s}\,2^{d}\,\frac{5}{6}$ exprimerait le produit demandé.

270. Les règles des nos 128 et 129, s'appliquent aux *fractions de fractions concrètes ;* ainsi la fraction de fraction concrète exprimée par les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{6^{\#}}{7}$, a pour valeur le produit $\frac{48}{105}^{\#}$ des fractions simples $\frac{6^{\#}}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$. Si l'on demandait, quels sont les $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$ d'un écu de $3^{\#}$; on observerait que les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ étant $\frac{8}{15}$, il suffit de prendre les $\frac{8}{15}$ de $3^{\#}$, ou de 60^{s} ; mais le 15ème de 60^{s} est 4^{s}, les $\frac{8}{15}$ de 60^{s} sont donc 32^{s} ; et en effet, les $\frac{2}{3}$ d'un petit écu étant 40^{s}, les $\frac{4}{5}$ de ces $\frac{2}{3}$ d'un petit écu, valent les $\frac{4}{5}$ de 40^{s}, ou 32^{s}. On verrait de même, que prendre les $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$, de $840^{\#}$, revient à prendre les $\frac{48}{105}$ de $840^{\#}$; le résultat $384^{\#}$ serait celui demandé. On doit observer que *parmi les fractions simples qui composent la fraction de fraction, une seule peut être concrète.* Ainsi, la fraction de fraction exprimée par

les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$# de $\frac{5}{7}$#, ne saurait exister, car un produit ne peut jamais contenir plus d'un facteur concret (n° 269).

Je terminerai la théorie des nombres concrets, en observant que *les diverses opérations de l'Arithmétique sur les nombres, complexes et décimaux, concrets et abstraits, se vérifient comme celles sur les nombres entiers*. La complication de ces opérations, due au peu d'uniformité des subdivisions de chaque espèce d'unité concrète, conduit naturellement à chercher s'il ne serait pas possible de soumettre les subdivisions de chaque espèce d'unité concrète à une même loi ; le *système des nouvelles mesures*, que nous allons exposer, fera voir comment on y est parvenu.

Exposition du système des nouvelles Mesures.

271. *Pour donner à un système de mesures, toute la perfection possible, il faudrait ;* 1°. *choisir une unité principale, qui pût se vérifier dans tous les temps et dans tous les pays où elle serait établie ;* 2°. *faire dépendre toutes les mesures de cette unité principale ;* 3°. *choisir pour valeurs des multiples et des subdivisions de chaque espèce d'unité concrète, celles qui ont le plus de rapport avec notre système de numération, et qui conduisent aux calculs les plus simples ;* 4°. *composer la nomenclature du plus petit nombre de mots possible ;* 5°. *donner aux multiples et aux subdivisions de chaque espèce d'unité concrète des noms qui indiquent leurs rapports avec l'unité principale ;* 6°. *éviter le plus possible les fractions, en subdivisant chaque espèce d'unité concrète de la manière la plus convenable à ses usages*. Il est sans doute impossible de réunir tous ces avantages ; les uns exigent quelques modifications, les autres sont absolument contradictoires ; le dernier surtout est incompatible avec les cinq autres, car les usages différens de chaque espèce d'unité concrète, semblent nécessiter les subdivisions différentes établies dans le système des anciennes mesures ; mais le faible avantage qui résulte de la variété de ces subdivisions, disparaît devant les nombreux inconvéniens qu'il entraîne avec lui ; les lois particulières aux subdivisions de chaque espèce d'unité concrète

concrète (voyez le tableau du n° 216), forment autant de systèmes de numération, qui exigent autant de règles particulières. Le peu d'uniformité de ces subdivisions, et leur opposition avec notre système de numération, conduisent à des calculs excessivement compliqués, dont la longueur est capable de rebuter les hommes les plus exercés, et d'induire en erreur ceux qui commencent. Si l'on compare la simplicité des opérations de l'arithmétique sur les nombres entiers et décimaux, à la complication du calcul des nombres complexes, on sentira combien il était important d'établir une harmonie parfaite entre les subdivisions de chaque espèce d'unité, et notre système de numération; on y est parvenu d'une manière infiniment heureuse, dans le *système des nouvelles mesures*, en adoptant la loi décimale pour les multiples et les subdivisions de chaque espèce de mesure; la beauté de ce système, les obstacles qu'il a fallu surmonter, assureraient sans doute la réputation de ses inventeurs, s'ils ne s'étaient pas déjà illustrés par les découvertes les plus sublimes; ceux qui osent attaquer ce système, sont ou ignorans ou de mauvaise foi. Les bornes que je me suis prescrites, ne me permettant pas de rendre compte des travaux immenses qui ont été exécutés, je suis contraint de me borner à en offrir les résultats. On verra qu'on est parvenu à simplifier en même temps la nomenclature et les calculs, en diminuant le nombre des noms, et en réduisant toutes les opérations de l'arithmétique à celles sur les décimales, ce qui bannit entièrement le calcul des fractions et celui des nombres complexes.

272. On peut compter sept espèces de mesures, essentiellement différentes, savoir; 1°. les *mesures linéaires, ou de longueur;* 2°. les *mesures agraires, ou de superficie*; 3°. les *mesures de volumes, ou de capacité*; 4°. les *mesures de pesanteur, ou* les *poids;* 5°. les *mesures des valeurs, ou* les *monnaies*; 6°. les *mesures circulaires, ou* les *degrés;* 7°. les *mesures temporaires, ou de durée*. L'unité de longueur, ou l'unité linéaire, est le MÈTRE; l'unité de superficie se nomme *are;* l'unité de volume est le *stère;* l'unité de capacité est le *litre;* l'unité de poids s'appelle *gramme;* l'unité monétaire est le *franc;* l'unité circulaire

est le *quadrans*; enfin l'unité de temps est l'*heure*. Pour déterminer le MÈTRE; on a mesuré la distance du pôle à l'équateur, sur le méridien qui passe à Paris; cette distance s'est trouvée de 5 130 740 toises, ou de 30 784 440 pieds; on l'a divisée par dix millions, ou par 10 000 000, et le quotient $3^{pieds},0784440$, a exprimé la longueur de l'unité fondamentale appelée *mètre*; ensorte que le *mètre* est la dix-millionième partie du quart de la circonférence de la terre. Voici comment on en a déduit les valeurs des autres unités; le *quarré* (*) dont chaque côté aurait dix mètres de longueur, forme l'*are*; il équivaut à *cent mètres quarrés*, c'est-à-dire à cent quarrés d'un mètre de côté; le mètre *cube* a formé le *stère*; le *litre* contient un décimètre *cube*. Le poids d'un centimètre *cube* d'eau distillée, a composé le *gramme*; une pièce d'argent pesant cinq grammes et alliée d'un dixième de cuivre, a formé le *franc*. L'unité circulaire est le *quadrans*, quart de la circonférence et mesure de l'angle droit. La nouvelle heure est la dixième partie du jour *naturel*; l'ancienne heure en était la 24ème partie.

273. La division décimale a été adoptée, pour remplacer dans chaque espèce d'unité concrète, les divisions qu'on en avait faites jusqu'ici. Ainsi, pour composer des mesures plus grandes ou plus petites que l'unité principale, on fait précéder cette unité des mots *myria*, *kilo*, *hecto*, *déca*, *déci*, *centi*, *milli*, qui désignent respectivement des *dixaines de mille*, des *mille*, des *centaines*, des *dixaines*, des *dixièmes*, des *centièmes*, des *millièmes*. Pour plus de clarté, nous écrirons sous ces nouveaux mots, les noms des nombres qu'ils expriment, comme on le voit ici. . . . .

myria	kilo	hecto	déca	unité	déci	centi	milli
dix mille.	mille.	cent.	dix.	un,	dixième.	centième.	millième.

(*) La définition exacte du *quarré* ne peut être donnée qu'en *géométrie*; il nous suffit de savoir que le quarré est une figure de cette forme □, dont les côtés et les *angles* sont égaux; on démontre en *géométrie*; qu'un quarré de dix mètres de côté se compose de cent mètres quarrés. Le corps terminé par six faces quarrées et égales, se nomme *cube*. Un dé à jouer est un cube; chacune de ses faces est un *quarré*.

On eût sans doute pu étendre plus loin les multiples et les subdivisions de l'unité principale ; mais cela n'eût présenté aucun avantage réel. D'après ces conventions ; le *myria*-mètre vaut *dix mille* mètres, le *kilo*-mètre vaut *mille* mètres, un *hecto*-mètre vaut *cent* mètres, le *déca*-mètre vaut *dix* mètres, le *déci*mètre exprime la *dixième* partie du mètre, le *centi*mètre vaut le *centième* du mètre, enfin le *milli*-mètre est la *millième* partie du mètre. Les multiples et les subdivisions des autres unités concrètes suivent la même loi. Ainsi ; comme *déca* signifie *dix*, pour exprimer dix litres, on dira un *décalitre ;* de même, pour exprimer dix mille grammes, on dira un *myriagramme ;* le *centilitre* vaut le centième d'un litre ; le *kilogramme* vaut mille grammes ; etc. On observera seulement, par rapport au mot *are*, de supprimer la dernière lettre de chacun des mots myria, kilo, hecto, déca, quand ils devront être liés avec lui ; ainsi, pour exprimer cent ares, on dira *hectare* et non pas *hectoare ;* les multiples de l'are seront donc, le *décare* valant dix ares, l'*hectare* valant cent ares, le *kilare* valant mille ares, et le *myriare* valant dix mille ares ; ses subdivisions de dix en dix fois plus petites seront, le *déciare*, le *centiare*, le *milliare ;* elles expriment respectivement, un dixième d'are, un centième d'are, et un millième d'are. En vertu de ces conventions ; dix millimètres valent un centimètre, car dix-millièmes valent un centième ; dix centimètres valent un décimètre ; dix décimètres valent un mètre ; dix mètres valent un décamètre ; dix décamètres, ou dix dixaines de mètre, valent un hectomètre, ou cent mètres ; dix hectomètres valent un kilomètre, car dix centaines font un mille ; enfin, dix kilomètres forment un myriamètre, car dix mille forment une dixaine de mille. La cent-millième partie d'un hectomètre est un millimètre ; en effet, un hectomètre valant 100 mètres, ou 100^m, la cent-millième partie d'un hectomètre vaut la 100 000ème partie de 100^m, ou $\frac{100}{100\,000}{}^m$, ou $\frac{1}{1000}{}^m$; ou un millième de mètre, ou enfin un millimètre ; la centième partie du décamètre, est le décimètre, car le centième de dix se réduit à un dixième ; dix mille centièmes valant une centaine, dix mille centimètres valent un hectomètre ;

dix millions de fois un millième, ou 10 000 000 fois $\frac{1}{1000}$, valant $\frac{10\,000\,000}{1000}$, ou dix mille, dix millions de millimètres forment dix mille mètres, ou un myriamètre. On ne saurait trop s'exercer à ces sortes de conversions; elles deviennent indispensables dans les calculs relatifs aux nouvelles mesures, et elles conviennent aux unités concrètes de chaque espèce.

274. Nous allons actuellement faire connaître les noms synonymes qu'on pourra substituer dans le commerce aux nouveaux noms; 1°. Les mesures des LONGUEURS comprennent : les mesures *itinéraires*, ou de grande étendue, telles que le *degré* terrestre et la lieue : les mesures *linéaires* ou de petite étendue, telles que la toise, l'aune, etc. Pour exprimer la distance d'un lieu à un autre, on emploiera les mots, myriamètre et kilomètre, qui peuvent être traduits par lieue et mille; le myriamètre, ou la lieue nouvelle, vaut dix kilomètres, ou dix milles; le kilomètre, ou le nouveau mille, vaut mille mètres, ou 513 toises environ. Les *mesures linéaires* peuvent s'exprimer, en décamètres, en mètres, en décimètres, en centimètres et en millimètres; on leur a donné pour synonymes les mots *perches*, *mètres*, *palmes*, *doigts* et *traits ;* le mètre, comme unité fondamentale des nouvelles mesures, n'a pas de synonyme. Ainsi; le décamètre, ou la perche nouvelle, vaut dix mètres; le mètre vaut dix décimètres, ou dix palmes; le décimètre, ou la palme, vaut dix centimètres, ou dix doigts; enfin le centimètre, ou le doigt, vaut dix millimètres, ou dix traits. Le mètre et ses subdivisions remplacent, la toise, le pied, le pouce, etc; il remplace aussi l'aune, et en diffère peu; ainsi le mesurage des draps doit se faire : en mètres : en dixièmes de mètres, ou décimètres : en centièmes de mètre, ou centimètres; les millimètres expriment des subdivisions trop petites, pour le mesurage des étoffes. 2°. Les *mesures agraires* servent à exprimer les surfaces des terreins; on doit faire usage des mots : hectare, are, et centiare, qui peuvent être traduits par les mots, *arpent*, *perche quarrée et mètre quarré ;* l'hectare, ou l'arpent nouveau, vaut cent ares, ou cent perches quarrées nouvelles; l'are, ou la nouvelle perche quarrée, vaut cent mètres quarrés; le centiare, centième partie de la nouvelle perche quarrée, vaut un mètre quarré. Pour les petites surfa-

ces; le mètre quarré vaut cent décimètres quarrés, ou cent *palmes quarrées ;* le décimètre quarré, ou la palme quarrée, vaut cent centimètres quarrés, ou cent *doigts quarrés ;* enfin le centimètre quarré, ou le doigt quarré, vaut cent millimètres quarrés, ou cent *traits quarrés*. 3°. Pour les VOLUMES, lorsqu'il s'agit de mesurer les bois de chauffage, on doit employer le *stère,* ou mètre cube : cela suppose des bûches de la longueur d'un mètre, placées dans un châssis, d'un mètre quarré de base sur un mètre de hauteur; on peut adopter tout autre arrangement équivalent. Pour les bois de charpente, le stère vaut dix décistères, ou dix *solives* nouvelles. Dans l'exploitation des terres ou des pierres, dans le calcul des *terrasses*, et dans le toisé des corps massifs, on exprimera le volume, en mètres cubes, et en subdivisions du mètre cube. Les *mesures de capacité*, servent aux liquides, et aux matières sèches qui peuvent s'y assimiler; les fluides, tels que les vins, les liqueurs, etc, se mesurent, avec le décalitre le litre et le décilitre, auxquels on a donné pour synonymes les mots, *velte*, *pinte*, et *verre ;* le décalitre ou la velte nouvelle, vaut dix litres, ou dix pintes nouvelles; et le litre, ou la pinte nouvelle, vaut dix décilitres, ou dix verres. Les matières sèches, telles que le seigle, l'orge, etc, se mesurent avec le kilolitre, l'hectolitre, le décalitre et le litre, auxquels on a donné pour synonymes les anciens noms, *muid*, *septier*, *boisseau* et *litron ;* le kilolitre, ou le muid nouveau, se compose de dix hectolitres, ou de dix septiers nouveaux ; l'hectolitre, ou le septier nouveau, vaut dix décalitres, ou dix boisseaux nouveaux; le décalitre, ou le boisseau nouveau, vaut dix litres, ou dix litrons nouveaux; le litre est le nouveau litron. Toutes les mesures de capacité ont la forme cylindrique ; cette forme est la plus propre à leurs usages. 4°. Les POIDS qui servent à peser les marchandises sont, le kilogramme, l'hectogramme, le décagramme, le gramme et le décigramme ; leurs synonymes sont, la *livre*, l'*once*, le *gros*, le *denier* et le *grain*. Le kilogramme, ou la livre nouvelle, vaut dix hectogrammes, ou dix onces nouvelles ; l'hectogramme, ou la nouvelle once, vaut dix décagrammes, ou dix gros nouveaux; le décagramme, ou le gros nouveau, se compose de dix grammes,

ou de dix deniers nouveaux ; enfin le gramme, ou le denier nouveau, est équivalent à dix décigrammes, ou à dix grains nouveaux. Les fortes pesées se font en *milliers*, de mille livres nouvelles, et en *quintaux*, de cent livres nouvelles. 5°. Pour les MONNAIES ; le *franc* remplace la livre tournois, il vaut dix décimes et le décime vaut dix centimes ; le franc vaut donc cent centimes. Les pièces de cinq francs en circulation, sont au *titre* de neuf dixièmes de fin, elles pèsent chacune 25 grammes, ensorte que le *franc pèse* 5 *grammes ;* 4 pièces de 5 francs, pèsent donc 100 grammes, ou un hectogramme, ou une once nouvelle ; 40 pièces de 5 francs, ou 200 francs, pèsent donc 1000 grammes, ou un kilogramme, ou enfin une livre-poids nouvelle ; on n'a pas donné de noms particuliers aux multiples du franc ; les expressions *déca-franc*, *hecto-franc*, *kilo-franc*, *myria-franc*, ne sont pas usitées ; on dit, dix francs, cent francs, mille francs, et dix mille francs ; la dixième partie du franc, se nomme *décime ;* et non pas *déci-franc ;* la centième partie du franc se nomme *centime* et non pas *centi-franc ;* on s'arrête à cette dernière subdivision ; ensorte que l'on compte par francs décimes et centimes. A l'égard du *titre* des matières d'or et d'argent, on prend pour unité le titre le plus fin et on détermine, dans cette hypothèse, le titre des deux métaux, en dixièmes, centièmes et millièmes d'unité. 6°. Pour les *mesures circulaires ;* la *circonférence* se divisait anciennement en 360 parties égales, nommées degrés ; le degré en 60 minutes ; la minute en 60 secondes, etc. D'après la nouvelle division, l'unité principale est le *quadrans*, quart de la circonférence et mesure de l'angle droit ; le quadrans se divise en 100 degrés ; le degré en cent minutes ; la minute en 100 secondes, etc. La circonférence, composée de quatre quadrans, vaut donc 400 des nouveaux degrés, mais elle vaut 360 des anciens degrés ; 360 degrés anciens valent donc 400 degrés nouveaux. 7°. Pour les *mesures temporaires ;* la nouvelle année commence avec l'AUTOMNE ; les trois mois d'automne sont, *Vendémiaire*, *Brumaire et Frimaire ;* les trois mois d'HIVER sont nommés, *Nivose, Pluviose* et *Ventose ;* les trois mois du PRINTEMPS sont *Germinal*, *Floréal* et *Prairial ;* enfin les trois mois d'ÉTÉ

sont *Messidor*, *Thermidor* et *Fructidor*; chacun de ces mois a 30 jours; les 12 mois nouveaux valent donc 360 jours; pour compléter les 365 jours de l'*année commune*, on a joint *cinq jours complémentaires* à la suite des 12 mois; dans les *années bissextiles*, on complète les 366 jours, au moyen de *six jours complémentaires*. On aperçoit aisément les avantages de cette division de l'année sur l'ancienne; les mois sont chacun de 30 jours, et leurs noms sont expressifs; vendémiaire rappelle l'époque des vendanges, brumaire celle des brouillards, frimaire celle des frimats, floréal celle des fleurs, messidor celle de la moisson, etc. Chaque saison commence au 1er d'un mois, et chaque changement de terminaison dans les noms de mois, indique le changement d'une saison; la terminaison *ose*, appartient aux trois mois d'hiver; la terminaison *al*, appartient aux trois mois du printemps, etc. Le nouveau mois se divise en 3 *décades*, de 10 jours chacune; dans chaque décade, le 1er jour se nomme *primidi*, le 2ème *duodi*, le 3ème *tridi*, ... le 10ème *décadi*. Le jour *naturel* se divisait anciennement en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes, etc; d'après la nouvelle division, le jour naturel se divise en 10 parties égales, appelées heures; l'heure vaut 100 minutes, la minute vaut 100 secondes, etc; 24 des anciennes heures, en valent donc 10 des nouvelles. Les mesures relatives, aux surfaces, aux volumes, et à la circonférence, dépendant de la *géométrie*, nous renvoyons ce qui les concerne au *Supplément* de cette Arithmétique; et comme la nouvelle division du jour n'est pas usitée, nous ne parlerons ici que des nombres dont l'unité concrète est le *mètre*, ou *le litre*, ou le *gramme*, ou le *franc*.

275. D'après le système précédent; les multiples et les subdivisions, du *mètre*, du *litre*, du *gramme* et du *franc*, sont soumis à la loi décimale; la numération et le calcul de ces nouvelles mesures, doivent donc être les mêmes que pour les nombres décimaux. Proposons-nous d'abord d'écrire en chiffres le nombre énoncé, 6 *décamètres* 4 *mètres* 7 *décimètres*; il s'agit de faire occuper: au chiffre 6, le rang des décamètres, ou des dixaines de mètre: au chiffre 4, le rang des unités de mètre;

4

enfin au chiffre 7, le rang des décimètres, ou des dixièmes de mètre; il suffit donc d'écrire $64^{mètres},7$; car le chiffre 4, des unités principales, exprimant des mètres, les chiffres 6 et 7, d'après leur position, exprimeront respectivement, 6 dixaines de mètres, ou 6 décamètres, et 7 dixièmes de mètre, ou 7 décimètres. Si le nombre énoncé était, 3 *hectomètres* 2 *mètres* 5 *centimètres;* on observerait que ce nombre vaut, 3 centaines de mètre plus 2 mètres plus 5 centimètres; il suffit donc d'écrire $302^{mètres},05$; car le chiffre 2, des unités principales, exprimant 2 mètres, les chiffres 3 et 5, qui occupent les rangs des centaines et des centièmes, expriment respectivement 3 centaines de mètre, ou 3 hectomètres, et 5 centièmes de mètre, ou 5 centimètres. Pour écrire en chiffres le nombre, 64 mètres 75 centimètres; on observera que le mètre étant considéré comme l'unité principale, il suffit d'écrire 64 unités 75 centièmes, et d'exprimer ensuite que dans le résultat 64,75, l'unité principale est le mètre, ce qu'on indiquera ainsi $64^{m},75$.

276. En général; *Pour mettre en chiffres une nouvelle mesure, dictée ou énoncée en lettres; on l'écrira d'après les règles relatives aux nombres décimaux abstraits, en faisant abstraction de l'espèce de l'unité concrète; on placera ensuite au-dessus du chiffre des unités du résultat, la lettre initiale du nom de l'unité concrète; c'est-à-dire une* m, *ou une* f, *ou un* G, *ou une* l, *lorsqu'il s'agira de mètres, ou de francs, ou de grammes, ou de litres.* Par exemple; si l'énoncé était.....

deux cent vingt-sept grammes, trente-six centigrammes,

on écrirait ce nombre comme s'il s'agissait d'unités abstraites, ce qui donnerait 227,36; et au-dessus du chiffre 7 des unités, on mettrait la lettre G, initiale de gramme; le résultat $227^{G},36$, serait l'écriture en chiffres du nombre proposé. Pour mettre en chiffres le nombre, *trois cent quarante-cinq centigrammes*, qui équivaut à 345 centièmes de gramme; on écrira 345 centièmes, et l'on exprimera que le gramme est l'unité principale du résultat 3,45, en plaçant au-dessus du chiffre 3 des unités, la lettre G initiale de gramme, ce qui donnera $3^{G},45$. S'il s'agit du nombre *trois cent sept francs quarante-deux centimes;* on observera

qu'il exprime 307 francs et 42 centièmes de franc, on écrira donc $307^f,42$. On reconnaîtrait avec la même facilité ; que *deux mille litres trois centilitres*, doivent s'écrire $2000^l,03$; que 5 kilomètres 3 millimètres, doivent s'écrire $5000^m,003$; que dix francs dix centimes s'écrivent $10^f,10$, ou $10^f,1$.

277. La solution du problème inverse n'offre pas plus de difficulté : *pour énoncer une nouvelle mesure, exprimée par un nombre décimal concret ; il suffit d'énoncer le nombre décimal en faisant abstraction de la nature de ses unités ; on remplace ensuite, dans cet énoncé, l'unité abstraite par l'unité concrète dont il s'agit.* Par exemple ; le nombre abstrait 34,72, ayant pour énoncés, 34 unités 72 centièmes, ou 3 dixaines 4 unités 7 dixièmes 2 centièmes, ou 3472 centièmes ; si l'on remplace l'unité abstraite par l'unité concrète égale au *mètre*, le nombre concret $34^m,72$, aura pour énoncés, 34 mètres 72 centimètres, ou 3 décamètres 4 mètres 7 décimètres 2 centimètres, ou 3472 centimètres. Par une raison semblable ; le nombre $3009^m,007$, dont l'unité principale est le mètre, peut s'énoncer des trois manières suivantes : 3 mille 9 mètres 7 millimètres : 3 kilomètres 9 mètres 7 millimètres : 3 millions 9 mille 7 millimètres. La 2ᵉ règle du n° 153 (page 162), est celle qui conduit à l'énoncé le plus simple ; en l'appliquant aux nouvelles mesures, exprimées par les nombres décimaux....

$37^m,007$; $402^G,5$; $3094^f,37$; $0^f,57$

on trouvera pour énoncés correspondans

37 mètres 7 millim. ; 402 gram. 5 décigram. ; 3094 fr. 37 centimes ; 57 centimes.

278. *Lorsque la nouvelle mesure est exprimée par un nombre décimal périodique ; on doit joindre à l'énoncé des unités entières, celui de la fraction ordinaire équivalente à la partie décimale.* Si l'on voulait énoncer directement le nombre concret $3^m,17\,17\,17$ etc ; on aurait l'énoncé, 3 mètres, 1 décimètre, 7 centimètres, 1 millimètre, etc, qui se prolonge indéfiniment ; pour obtenir l'énoncé sous forme finie, on observera que le nombre proposé $3^m,17\,17$ etc, est équivalent au nombre $3^m\frac{17}{99}$, dont l'énoncé est 3 mètres $\frac{17}{99}$ de mètre. Par une raison semblable ; $37^G,345\,345$ etc, a pour énoncé, 37 grammes $\frac{345}{999}$ de gramme ;

l'expression $3000^{f},599\,99$ etc, étant équivalente à 3000f,6, a pour énoncé, trois mille francs six décimes.

279. Je dois faire observer ici, un des grands avantages du système des nouvelles mesures; *pour convertir les unes dans les autres les subdivisions d'une même espèce de mesure, il suffit de déplacer la* VIRGULE *décimale.* S'il s'agit, par exemple, de convertir en décimètres le nombre $7^{m},53$, dont l'unité principale est le *mètre;* comme chaque mètre vaut dix décimètres, il suffit de multiplier le nombre des mètres par 10, pour obtenir le nombre des décimètres : mais la multiplication d'un nombre décimal par 10, s'effectue en avançant la *virgule* d'un rang vers la droite; le nombre proposé $7^{m},53$, converti en décimètres, devient donc $75^{décimètres},3$. pour se convaincre de l'exactitude de ce résultat, on observera qu'il se compose : de 7 dixaines de décimètres, ou *de 7 mètres* : *de 5 décimètres* : de 3 dixièmes de décimètre, ou *de 3 centimètres;* La réunion de ces trois parties donne effectivement le nombre proposé $7^{m},53$. Par une raison semblable, si l'on veut convertir $7^{m},456$ en centimètres, comme chaque mètre vaut 100 centimètres, il suffit de multiplier le nombre des mètres par 100, en avançant la *virgule* de deux rangs vers la droite, ce qui revient à placer la *virgule* sur la droite du chiffre 5, qui occupe le rang des centimètres, ensorte que le nombre $7^{m},456$, converti en centimètres, devient $745^{centim},6$: ce dernier nombre a le centimètre pour unité principale; le chiffre 5 exprimant des centimètres, le chiffre 4 exprime des dixaines de centimètres, ou des décimètres; le chiffre 7, placé au rang des centaines, exprime des centaines de centimètres, ou des mètres; enfin, le chiffre 6, placé au rang des dixièmes, exprime des dixièmes de centimètre, ou des millimètres; les nombres $7^{m},456$ et $745^{centim},6$, sont donc équivalens, puisque dans chacun d'eux, les chiffres 7, 4, 5, 6, expriment également, des mètres, des décimètres, des centimètres et des millimètres. S'il s'agit de convertir en hectomètres, le nombre $1324^{m},7$, dont l'unité principale est le mètre; comme l'hectomètre vaut 100 mètres, il suffit de diviser le nombre des mètres par 100, en avançant la *virgule* de deux rangs vers la

gauche, c'est-à-dire sur la droite du chiffre 3 qui est au rang des hectomètres; on écrira donc $13^{hectom},247$.

280. En général; l'unité abstraite valant, 10 dixièmes, ou 100 centièmes, ou 1000 millièmes, ou etc; l'unité de mètre vaut, 10 décimètres, ou 100 centimètres, ou 1000 millimètres, ou etc; conséquemment, *pour convertir des* MÈTRES, *en décimètres, ou en centimètres, ou en millimètres, etc; il suffit de multiplier le nombre des mètres par* 10, *ou par* 100, *ou par* 1000, *etc, en avançant la virgule, d'un, ou deux, ou trois, etc, rangs vers la droite*. Par une raison semblable, l'unité abstraite étant le 10ème de dix, ou le 100ème de cent, ou le 1000ème de mille, ou le $10\,000^{ème}$ de dix mille; le mètre est, la dixième partie du décamètre, la centième partie de l'hectomètre, la millième partie du kilomètre, la dix-millième partie du myriamètre; conséquemment: *pour convertir des* MÈTRES, *en décamètres, ou en hectomètres, ou en kilomètres, ou en myriamètres, il suffit de diviser le nombre des mètres, par* 10, *ou par* 100, *ou par* 1000, *ou par* 10 000, *en avançant la virgule, d'un, ou deux, ou trois, ou quatre rangs, vers la gauche*. Ainsi; pour convertir $4567^{m},8$, en hectomètres, ou en centaines de mètres, on avancera la *virgule* de deux rangs vers la gauche, et l'on écrira $45^{hectom},678$; de même, pour convertir $4567^{grammes},8$, en hectogrammes, on avancera la *virgule* de deux rangs vers la gauche, et l'on écrira $45^{hectogrammes},678$. *Si le nombre des chiffres nécessaires au déplacement de la virgule, n'était pas suffisant, on y suppléerait par des zéros;* ainsi, pour convertir $27^{m},5$ en millimètres, comme on doit avancer la *virgule* de trois rangs vers la droite, on mettra deux zéros sur la droite du 5, ce qui donnera $27^{m},500$; avançant alors la *virgule* de trois rangs vers la droite, ce qui revient à la supprimer, on écrirait 27 500 millimètres; de même, pour convertir $53^{m},7$ en myriamètres, comme il faut avancer la *virgule* de quatre rangs vers la gauche, on transformera le nombre proposé en $0053^{m},7$, avançant alors la *virgule* de quatre places vers la gauche, il viendra $0^{myriam},00537$.

281. En général; comme d'après le système des nouvelles mesures, les multiples et les subdivisions de chaque espèce

d'unité concrète, sont assujétis à la loi décimale : *Lorsqu'il s'agit de rapporter une nouvelle mesure, exprimée par un nombre décimal, à l'une quelconque des unités concrètes de son espèce, il suffit de transporter la* VIRGULE *décimale, sur la droite du chiffre qui exprime des unités de l'ordre demandé.* Ainsi, pour convertir $4567^{m},8$ en hectomètres, ou en centaines de mètres, on transportera la *virgule* sur la droite du chiffre 5 des centaines de mètres, et l'on écrira $45^{hectom},678$; pour convertir le même nombre en kilomètres, comme le kilomètre vaut mille mètres, on transportera la *virgule* sur la droite du chiffre 4, qui occupe le rang des mille, et l'on écrira $4^{kilom},5678$. Cette règle s'applique également au cas où le nombre proposé est déjà rapporté à un multiple, ou à une subdivision de l'unité principale. Par exemple ; pour convertir $45^{hectom},678$ en mètres ; on transportera la *virgule* sur la droite du chiffre 7, qui exprime des centièmes d'hectomètres, ou des mètres, ce qui donnera $4567^{m},8$; de même, pour convertir $7^{kilom},3456892$ en centimètres ; on cherchera d'abord le chiffre des centimètres ; à cet effet, on observera, que l'unité principale étant le kilomètre, le 1er chiffre décimal 3, exprime des dixièmes de kilomètre, ou des hectomètres ; le 2ème chiffre 4, exprime des centièmes de kilomètres, ou des centièmes de mille mètres, ou des dixaines de mètres, ou des décamètres ; le chiffre 5 exprimant des unités dix fois plus petites, exprime des mètres ; et conséquemment les chiffres 6 et 8, qui expriment des unités de dix en dix fois plus petites, expriment respectivement des décimètres et des centimètres, ensorte que le chiffre 8 occupe le rang des centimètres ; transportant donc la *virgule* sur la droite de ce dernier chiffre, on aura $734\,568^{centim},92$; on eût été conduit plus simplement au même résultat, en observant qu'un kilomètre vaut mille mètres, ou 1000 fois 100 centimètres, ou 100 000 centimètres ; les centimètres expriment donc des cent-millièmes de kilomètre ; il suffit donc de transporter la *virgule* sur la droite du chiffre 8, des cent millièmes de kilomètre. Ce dernier procédé doit être préféré comme plus simple dans la pratique ; ainsi, pour convertir le nombre $3^{myriam},123\,4567$, dont

l'unité principale est le myriamètre, en centimètres, on cherchera d'abord combien un myriamètre vaut de centimètres : or un myriamètre, vaut dix mille mètres, ou 10 000 fois 100 centimètres, ou 1000 000 centimètres ; les centimètres sont donc des millionièmes de myriamètre ; conséquemment, dans le nombre proposé, où l'unité principale est le myriamètre, les centimètres occupent le rang des cent-millièmes ; transportant donc la virgule sur la droite du chiffre 6, des millionièmes de myriamètre, ou des centimètres, on verra que le nombre proposé, converti en centimètres, est 3 123 456^{centim},7. *Si le nombre des chiffres, nécessaires au déplacement de la* VIRGULE, *n'était pas suffisant, on y suppléerait par des zéros ;* ainsi, pour convertir 0^{m},7 en kilomètres, comme le kilomètre vaut 1000 mètres, le chiffre des kilomètres occupe le rang des mille ; on doit donc mettre 3 zéros sur la gauche du nombre proposé, ce qui donne 0000^{m},7 ; transportant alors la *virgule* sur la droite du 1er zéro, qui occupe le rang des kilomètres, on aura 0^{kilom},0007.

282. *Pour rapporter une nouvelle mesure, écrite en toutes lettres, à l'une quelconque des unités concrètes de son espèce ; on exprimera d'abord cette nouvelle mesure par un nombre décimal ; on rapportera ce nombre à l'unité concrète déterminée ; l'énoncé du nombre qui en résultera sera celui demandé.* S'il s'agit de convertir en hectomètres le nombre, quatre mille cinq cent soixante-sept mètres huit décimètres, équivalent à 4567 mètres 8 décimètres ; on exprimera cette nouvelle mesure par le nombre décimal 4567^{m},8 ; sa conversion en hectomètres, donnera 45^{hectom},678 ; l'énoncé quarante-cinq hectomètres six cent septante-huit millièmes d'hectomètre, de ce dernier nombre, est celui demandé ; dans l'énoncé de la partie décimale, on se dispense ordinairement de répéter le nom de l'unité principale ; ensorte que le nombre 45^{hectom},678 s'énonce, 45 hectomètres 678 millièmes. D'après cette observation ; pour convertir 3227 décamètres 456 dix-millièmes, en myriamètres, ou en millimètres, on exprimera cette mesure par le nombre décimal 3227^{decam},0456 ; ce nombre converti en myriamètres, ou en millimètres, deviendra 3^{myriam},2270456, ou 32 270 456 milli-

mètres ; les énoncés, 3 *myriamètres* 2 *millions* 270 *mille* 456 *dix-millionièmes*, ou 32 *millions* 270 *mille* 456 *millimètres*, de ces deux nombres décimaux, sont ceux du nombre proposé, converti en myriamètres, ou en millimètres.

283. Les nouvelles mesures étant exprimées exactement au moyen des décimales, leur calcul est le même que celui des nombres décimaux. Nous nous bornerons en conséquence à rappeler les règles principales, en les appliquant à un petit nombre d'exemples de chaque espèce. *Lorsqu'il s'agira d'*AJOUTER *ou de* SOUSTRAIRE *plusieurs nombres rapportés à la même unité concrète ; on effectuera le calcul d'après la règle du nº* 261 (*page* 324). On trouvera, d'après cette règle, que la somme des nombres $37^m,74$ et $9^m,368$ est $47^m,108$, et que leur différence est $28^m,372$. *Pour ajouter ou soustraire des nombres composés d'unités de grandeurs différentes ; on rapportera ces nombres à la même unité, d'après la règle du nº* 281, *on effectuera ensuite le calcul d'après la règle du nº* 261 ; ainsi, pour additionner ou soustraire les nombres $377^{décim},4$ et $0^{kilom},009368$, dont les unités principales sont le *décimètre* et le *kilomètre* ; on les rapportera d'abord à la même unité, au *mètre* par exemple ; ce qui donnera $37^m,74$ et $9^m,368$; effectuant le calcul sur ces deux derniers nombres, on trouvera que la somme des nombres proposés est $47^m,108$, et que leur différence est $28^m,372$. *La* MULTIPLICATION *s'effectue d'après la règle du nº* 263 ; on trouvera, au moyen de cette règle ; que le produit de $20^m,4$ par 2,4489 est $49^m,95756$; que celui de $0^m,204$ par 0,0024489 est $0^m,0004995756$. *La* DIVISION *s'effectue d'après la règle du nº* 264 (*page* 326). Pour diviser l'un par l'autre les deux nombres $49^m,95756$ et $20^m,4$, dont l'unité principale est le mètre ; on effectuera la division, en faisant abstraction de la nature de l'unité principale, le quotient abstrait 2,4489 sera celui demandé ; si changeant l'ordre des facteurs, on propose de diviser le nombre concret $49^m,95756$ par le nombre abstrait 2,4489 ; on effectuera la division, en faisant abstraction de la nature des unités du dividende, le quotient 20,4, devant être de la nature du dividende, sera $20^m,4$; enfin, s'il s'agissait de diviser $4995^{centim},756$

par 20^{m},4, on convertirait le dividende en mètres, et la question serait réduite à diviser 49^{m},95756 par 20^{m},4; ce qui donnerait 2,4489 pour le quotient demandé. *Quand le quotient ne peut pas s'exprimer exactement en décimales, il est plus simple de le laisser sous la forme d'une fraction ordinaire;* Par exemple, le quotient de 2^{f},7 par 0^{f},0011 ayant pour valeur décimale, la fraction périodique 2454,54 54 54 etc; on peut se contenter d'indiquer la division, et le quotient exact est alors exprimé par la fraction ordinaire $\frac{27000}{11}$. *Si les nouvelles mesures étaient écrites en toutes lettres, on effectuerait le calcul sur les nombres qui les expriment;* par exemple, pour ajouter dix-sept mètres sept millimètres avec cinquante-sept décimètres trois millimètres, on écrira ces nombres en chiffres, ce qui donnera 17^{m},007 et 57^{décim},03; ce 2ème nombre converti en mètres et ajouté au 1er, donnera 22^{m},71, pour la somme des nombres proposés; cette somme a pour énoncé, vingt-deux mètres septante-un centimètres.

284. Les exemples précédens, suffisent pour mettre en état d'effectuer les diverses opérations de l'Arithmétique sur les nouvelles mesures. Les règles des n°s 194, 195, 199, s'appliquent aux nombres décimaux qui expriment les nouvelles mesures; les valeurs approchées du nombre 24^{m},4807, à un décimètre, ou à un centimètre près, sont 24^{m},4, ou 24^{m},48; et les valeurs les plus approchées du même nombre, lorsqu'on néglige les unités inférieures aux décimètres, ou aux centimètres, sont 24^{m},5 et 24^{m},48; les erreurs commises sont alors moindres, qu'un demi-décimètre, ou qu'un demi-centimètre. Si l'on demandait la valeur la plus approchée possible du nombre 3^{f},4258, en négligeant les unités inférieures aux décimes, ou aux centimes, on écrirait 3^{f},4, ou 3^{f},43; les erreurs correspondantes sont moindres qu'un demi-décime, ou qu'un demi-centime. Dans les calculs ordinaires, on néglige les unités décimales inférieures aux millimètres. D'après cette observation, si l'on voulait multiplier 71532^{m},9 par 514,000 000 108 568 7 et pousser l'exactitude du produit jusqu'aux *millimètres*, c'est-à-dire jusqu'aux millièmes de l'unité principale du multiplicande; on effectue-

rait la multiplication d'après la règle du n° 199, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 3ème décimale ; on trouvera 22 461 $330^{m},608$ pour la valeur du produit demandé, à moins d'un demi-millimètre près (voyez le détail du calcul à la page 224). Pour les monnaies, on néglige assez ordinairement les subdivisions du franc inférieures aux centimes ; il suffit alors d'appliquer la règle du n° 199, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la seconde décimale ; on trouvera de cette manière que le produit de $32^{f},94161 52333$ etc, par 5544,73333 etc, à moins d'un centime près, est $182652^{f},47$. Pour les poids, on néglige ordinairement les unités inférieures aux centigrammes ; si l'on se contente de cette approximation, on trouvera que le produit de $0^{G},35\,48\,48$ etc, par 2,400787777 etc, à moins d'un demi-centigramme près, est $8^{G},51$.

285. Les ouvrages antérieurs à l'établissement des nouvelles mesures, exprimant les grandeurs des quantités au moyen des anciennes mesures, et les actes publics, devant exprimer ces dernières au moyen des nouvelles mesures, il est de la plus grande importance de faire connaître comment on peut passer d'un système à l'autre. Les données nécessaires sont les rapports des mesures à comparer ; on les obtient en exprimant l'une des mesures par l'autre ; mais ce calcul offrant quelques difficultés, nous allons expliquer comment les rapports qui existent entre les mesures anciennes et les nouvelles, se déduisent de la valeur du mètre en pieds. Pour les *mesures linéaires*, le MÈTRE vaut $3^{pieds},0784440$, à moins d'un dix-millionième de pied près ; conséquemment, lorsqu'on se borne à cette approximation, qui est suffisante dans la pratique, 1^{m} vaut $3^{pi},0784440$; 10 000 000 fois 1^{m}, ou $10\,000\,000^{m}$, valent donc 10 000 000 fois $3^{pi},0784440$, ou 3 078 4440 pieds ; comme 30 784 440 pieds valent $10\,000\,000^{m}$; un pied vaut $\frac{10000000^{m}}{30784440}$, ou $0^{m},32483943 1$ etc, ou $3^{decim},24839$ etc. La toise, composée de 6 pieds, vaut donc 6 fois la valeur du pied, c'est-à-dire $1^{m},94903659 1$; la 12ème partie de la valeur du pied donnera $0^{m},027069953$ etc, ou .. $2^{centim},70699$ etc. pour la valeur du pouce ; si l'on divise la valeur du pouce par 12, on trouvera que 1^{li} vaut $0^{m},002255829$, ou $2^{millim},25$ etc.

2^{millim},25 etc. Le mètre valant 3^{pi},0784440; si on veut l'exprimer en toises, on observera qu'il faut 6 pieds pour composer une toise, et que par conséquent le 6e du nombre 3,07844 etc, des pieds, donnera 0,5130740 etc, pour le nombre des toises contenues dans le mètre; ensorte que 1^{m} vaut 0^{t},5130740 etc; chaque pied valant 12 pouces, si l'on multiplie le nombre 3,078 etc, des pieds contenus dans le mètre, par 12, le produit 36,94132 etc, marquera le nombre des pouces contenus dans le mètre, ensorte que 1^{m} vaut 36^{po},941328 etc; la conversion des pouces en lignes s'effectuera en multipliant leur nombre par 12; on trouvera que 1^{m} vaut 443^{li},2959360 etc.

Le rapport de l'aune de Paris au mètre, et celui du mètre à l'aune de Paris, se déduisent aisément de ce qui précède. En effet; l'aune de Paris vaut 3^{pi} 7^{po} 10^{l} $\frac{1}{6}$, ou 526^{li} $\frac{1}{6}$, ou 3161 sixièmes de ligne; or nous avons trouvé que 1^{li} valait ..... 0^{m},002 255 829; un sixième de ligne vaut donc le 6ème de 0^{m},002 255 829, c'est-à-dire 0^{m},000 375 9715; l'aune de Paris, composée de 3161 sixièmes de ligne, vaut donc 3161 fois 0^{m},00037597 etc; si l'on effectue cette multiplication en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 8ème décimale, on trouvera 1^{m},18844591 pour la valeur de l'aune de Paris en mètres. Réciproquement, pour calculer la valeur du mètre en aunes, on a dit : 1^{m},18844591 valent 1 aune; 118 844 591 mètres valent donc 100 000 000 d'aune; la division de 100 000 000 d'aune par 118 844 591, effectuée d'après la règle du n° 174, en conservant 9 décimales au quotient, donnera 0^{a},841435013 pour la valeur du mètre en aunes de Paris; ainsi l'aune de Paris vaut 1^{m},1884459 etc, et le mètre vaut 0^{a},84143501 etc.

Les calculs relatifs aux *mesures itinéraires*, s'effectuent d'après les mêmes principes. La lieue terrestre de 25 au degré, vaut 2280 toises 2 pieds, c'est-à-dire 13 682 pieds; la lieue marine vaut 2850 toises 2 pieds, ou 17 102 pieds; mais d'après ce qui précède, 1 pied vaut 0^{m},32483432; la lieue terrestre, composée de 13682 pieds, vaut donc 13682 fois 0^{m},32483432, ou 4444^{m},466100406, ou 4^{kilom},444466100; la lieue marine, composée de 17102 pieds, vaut donc 17102 fois 0^{m},32483432,

ou $5555^{m},55338959$, ou $5^{kilom},5555390$. Réciproquement; puisqu'une lieue terrestre vaut $4^{kilom},4444$ etc; un kilomètre vaut une lieue terrestre divisée par 4,4444 etc, c'est-à-dire . . $0^{lieue\ terr.},225$; on trouvera de même que le kilomètre vaut en lieues marines $0^{lie.\ marin.},18$.

Pour les *poids*, le gramme est la nouvelle unité; mais cette mesure étant trop petite, on considère ordinairement le kilogramme comme l'unité principale. Des expériences fort délicates ont appris que le kilogramme pesait $18827^{grains},15$; mais le grain est la 9216ème partie de la livre-poids; le kilogramme composé de $18827^{g},15$, vaut donc 18827,15 fois $\frac{1}{9216}$℔, ou 2℔,042876519. Si l'on rapporte ce nombre décimal aux anciennes subdivisions de la livre-poids, le marc l'once le gros le denier et le grain, on trouvera au moyen de la règle du n° 219, qu'un kilogramme vaut 2℔,042876519, ou $4^{m},085753038$, ou $32^{o},686024305$, ou $261^{G},488194444$, ou $784^{d},46458333$ etc, ou $18827^{g},1499999$ etc. Réciproquement, pour convertir les livres-poids en kilogrammes, on dira: le kilogramme vaut $18827^{grains},15$; 100 kilogrammes valent donc 1 882 715 grains; un grain vaut donc $\frac{100}{1882715}{}^{kilog}$; la livre-poids, composée de 9216 grains, vaut donc 9216 fois $\frac{100}{1882715}{}^{kilog}$, ou $\frac{921600}{1882715}{}^{kilog}$, ou $0^{kilog},48950584$etc; conséquemment le marc, moitié de la livre-poids, vaut $0^{kilog},24475292З$; l'once, 8ème partie du marc, vaut . . . . $0^{kilog},0305941 15$; le gros, 8ème partie de l'once, vaut . . . . . . $0^{kilog},003824264$; le denier, tiers du gros, vaut $0^{kilog},001274755$; enfin le grain, 24ème partie du denier, vaut $0^{kilog},000053115$, ou $5^{centig},3115$.

Pour les *monnaies*; le rapport de la livre tournois au franc, peut se calculer de la manière suivante; le kilogramme vient d'être trouvé de $18827^{grains},15$; le gramme, qui en est la millième partie, pèse donc $18^{grains},82715$; le franc pèse 5 grammes, ou 5 fois $18^{grains},82715$, ou $94^{gr},13575$; mais le franc est un alliage dont les $\frac{9}{10}$ seulement sont en argent fin; ainsi le franc contient en argent fin les $\frac{9}{10}$ de son poids $94^{g},13575$, c'est-à-dire $84^{g},722175$; or l'ancienne livre tournois, calculée d'après l'écu de 6#, contient en argent fin $83^{g},675936$; le franc contient donc $1^{g},046239$ d'argent fin de plus que la livre tournois,

c'est par cette raison que le franc a plus de valeur que la livre. La valeur de la livre tournois en francs, et celle du franc en livres tournois, se déduisent aisément de ce qui précède. En effet,

En argent fin 1^{f} contient $84^{g},722175$, et $1^{\#}$ contient $83^{g},675936$.

Le grain d'argent fin vaut donc $\frac{1^{f}}{84,722175}$, ou $\frac{1^{\#}}{83,675936}$.

$1^{\#}$ composée de $83^{g},675936$ d'argent fin, vaut donc $\frac{83^{f},675936}{84,722175}$, ou $0^{f},987650945$.

1^{f} composé de $84^{g},722175$ d'argent fin, vaut donc $\frac{84^{\#},722175}{83,675936}$, ou $1^{\#},012500346$.

les valeurs des livres sous et deniers, en francs, et celles des francs décimes et centimes en livres, se déduisent aisément des valeurs, de la livre en franc et du franc en livre. En effet ; $1^{\#}$ valant $0^{f},987650945$, le sou, 20ème de la livre, vaut le 20ème de $0^{f},987650945$, ou $0^{f},049382547$; le denier, 12ème du sou, vaut $0^{f},004115212$. Le franc valant $1^{\#},012500346$, le décime, 10ème du franc, vaut $0^{\#},101250035$, et le centime, 100ème du franc, vaut $0^{\#},010125003$.

286. Pour plus de clarté, nous réunirons les rapports que nous venons d'obtenir, dans le tableau suivant :

1^{t} vaut $1^{m},949036591$; 1^{pi} vaut $0^{m},324839432$; 1^{po} vaut $0^{m},027069954$; 1^{li} vaut $0^{m},002255829$.

1^{m} vaut $0^{t},5130740$, ou $3^{pi},078444000$, ou $36^{po},941328000$, ou $443^{li},295936000$.

1^{aune} vaut $1^{m},188441591$, ou $11^{decim},88441591$; 1^{m} vaut $0^{a},841435012$.

$1^{lie\ ter}$ vaut $4444^{m},453105888$, ou $4^{kil},444453106$, 1^{kil} vaut $0^{li\ ter},224995506$.

$1^{li\ mar}$ vaut $5555^{m},403962644$, ou $5^{kil},555403962 6$; 1^{kil} vaut $0^{li\ mar},180004912$.

1lb vaut $0^{kil},489505846$; 1^{m} vaut $0^{kil},244752923$; 1^{o} vaut $0^{kil},030594115$; 1G vaut $0^{kil},003824264$; 1^{d} vaut $0^{kil},001274755$; 1^{g} vaut $0^{kil},000053115$.

1^{kil} vaut 2lb,042876519, ou $4^{m},085753038$, ou $32^{o},686024304$, ou .... 261G,488194432, ou $784^{d},464583296$, ou $18827^{g},149999104$.

$1^{\#}$ vaut $0^{f},987650945$; 1^{s} vaut $0^{f},049382547$; 1^{d} vaut $0^{f},004115212$.

1^{f} vaut $1^{\#},012500346$; 1^{decim} vaut $0^{\#},101250035$; 1^{cent} vaut $0^{\#},010250035$.

287. Le passage d'un système à l'autre ne peut plus offrir aucunes difficultés. Les rapports établis dans la 1ère ligne donnent le moyen de réduire en mètres et en parties décimales du mètre, un nombre quelconque de toises pieds pouces et lignes ;

par exemple, pour réduire en mètres, $5^t\ 4^{pi}\ 0^{po}\ 9^{li}$, on prendra, 5 fois la valeur d'une toise, 4 fois celle d'un pied, et 9 fois celle d'une ligne ; la somme des trois produits partiels exprimera le résultat demandé ; voici le détail du calcul . . . . .

5^t valent 5 fois 1^t, ou 5 fois $1^m,949036591$, ou $9^m,745\ 182\ 956$
4^{pi} valent 4 fois 1^{pi}, ou 4 fois $0^m,324839432$, ou $1^m,299\ 357\ 727$
9^{li} valent 9 fois 1^{li}, ou 9 fois $0^m,002255829$, ou $0^m,020\ 302\ 465$

les $5^t\ 4^{pi}\ 0^{po}\ 9^{li}$ valent donc . . . . $11^m,064\ 843\ 143$

On eût été conduit plus longuement au même résultat, en convertissant le nombre complexe $5^t\ 4^{pi}\ 0^{po}\ 9^{li}$ en décimales de la toise ; on eût trouvé $5^t,6770833$ etc ; la valeur $1^m,949036591$ d'une toise, multipliée par le nombre 5,677083333 etc, des toises, eût donné, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 8ème décimale, $11^m,06484314$ pour la valeur du nombre complexe $5^t\ 4^{pi}\ 9^{li}$. Si l'on proposait de convertir 3987 toises en mètres, il suffirait de multiplier la valeur $1^m,949036591$ d'une toise, par le nombre 3987 des toises ; le produit $7770^m,80888$ etc, exprimerait la valeur des 3987 toises. La conversion de $39^t,87$ en mètres, s'effectuerait de la même manière, on multiplierait la valeur $1^m,949$ etc, d'une toise, par le nombre 39,87 des toises, le produit $77^m,70808$ etc, exprimerait la valeur des $39^t,87$. Les rapports établis dans la 2ème ligne, donnent le moyen de convertir un nombre quelconque de mètres, en toises ou en pieds ou en pouces ou en lignes ; il suffit de multiplier la valeur du mètre par le nombre des mètres ; ainsi, pour convertir . . . . $7770^m,80888$ etc, en toises et parties décimales de la toise, on multipliera $0^t,513074$ etc, valeur du mètre en toise, par le nombre 7770,808 88 etc, des mètres ; la multiplication effectuée, en poussant l'exactitude jusqu'aux toises (n° 199), donnera 3987 toises ; on serait conduit au même résultat, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 4ème décimale, ensorte que 3987^t est la valeur des $7770^m,808$ etc, à moins d'un demi dix-millième de toise près. Nous venons de trouver que $5^t\ 4^{pi}\ 9^{li}$ valaient $11^m,064\ 843\ 143$; afin de vérifier l'exactitude de ce résultat, nous chercherons sa valeur en toises pieds pouces et lignes,

nous devrons retrouver $5^t\ 4^{pi}\ 9^{li}$ à peu-près ; en effet : 1^m vaut $0^t,513074$ etc, les $11^m,064$ etc, valent donc, $0^t,513074$etc, multiplié par $11,064$etc ; or une ligne vaut $0,001$ etc ; par conséquent, si l'on veut négliger les divisions de la toise inférieures aux lignes, il suffit d'effectuer la multiplication de $0^t,51307$etc, par $11,064$etc, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 3ème décimale ; on trouvera $5^t,677$; ce produit converti en nombre complexe, d'après la 2ème règle du n° 260, donnera $5^t\ 4^{pi}\ 0^{po}\ 9^{li}$ pour la valeur des $11^m,06484$ etc. Si l'on proposait de convertir en toises pieds pouces et lignes le nombre $11064^{millim},84$ etc, dont l'unité principale est le milli-mètre ; on le rapporterait d'abord au mètre, et la question se trouverait réduite à convertir $11^m,06484$ etc, en toises pieds, etc, ce qui donnerait $5^t\ 4^{pi}\ 9^{li}$. On opérerait d'une manière semblable pour toute autre unité concrète. Ainsi, par exemple, s'il s'agit de convertir 8℔ $4^o\ 2^G\ 2^d\ 17^g\ \frac{5}{11}$ en kilogrammes, on réduira les parties 8℔, 4°, 2^G, 2^d, 17^g, $\frac{5}{11}$, en kilogrammes ; la somme des parties ainsi réduites, donnera $4^{kilog},049\ 548\ 364$ pour la valeur des 8℔ $4^o\ 2^G\ 2^d\ 17^g\ \frac{5}{11}$; afin de vérifier l'exactitude de ce résultat, on convertira les kilogrammes en livres poids ; or un kilogramme vaut . . . . 2℔,042 876 519, les $4^{kilog},049\ 548\ 364$ valent donc . . . . 2℔,042 876 519, multiplié par $4,049\ 548\ 364$; si l'on veut pousser l'exactitude du produit jusqu'aux grains, on effectuera la multiplication en conservant 4 décimales au résultat (n° 268), ce qui donnera 8℔,27 27 ; ce dernier nombre converti en nombre complexe, d'après la 2e règle du n° 260, *page* 321, donnera 8℔ $4^o\ 2^G\ 2^d\ 17^g$.

288. En général. *Lorsque dans la conversion des nouvelles mesures en mesures anciennes, on peut négliger les unités inférieures aux deniers, aux lignes et aux grains, il suffit d'appliquer la règle du n° 268, en poussant l'exactitude du résultat, pour la livre tournois et pour la toise jusqu'à la 3ème décimale ; pour la livre-poids jusqu'à la 4ème décimale.* Ainsi, par exemple ; pour convertir en toises pieds pouces et lignes le nombre $11^m,06484314 3$, dont l'unité principale est le mètre ; on multipliera la valeur $0^t,513074$ du mètre, par le nombre

11,064 843 143 des mètres; la multiplication effectuée d'après la règle du n° 199, en poussant l'exactitude du résultat jusqu'à la 3ème décimale, donnera $5^t,677$, ou $5^t\ 4^{pi}\ 0^{po}\ 9^{li}$, pour la valeur du nombre $11^m,064$ etc, à moins d'une ligne près. S'il s'agit de calculer, à moins d'un grain près, la valeur de $4^{kilog},049\ 548\ 364$ en livres-poids; on multipliera la valeur 2℔,04287651 9 du kilogramme, par le nombre 4,049 etc, des kilogrammes, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 4ème décimale; le résultat 8℔,27 27, converti en nombre complexe, donnera 8℔ $4^o\ 2^G\ 2^d\ 17^g$.

289. La solution du problème inverse n'offre aucunes difficultés, *lorsque l'approximation demandée est en nouvelles mesures; il suffit de pousser l'exactitude du résultat jusqu'à la décimale qui exprime les plus petites unités que l'on veut conserver;* mais comme dans beaucoup de circonstances, cette approximation est exprimée en mesures anciennes, nous allons faire connaître comment on doit opérer. On a trouvé (n° 286), que le denier converti en francs, valait $0^f,004$ etc; que la ligne convertie en mètres, valait $0^m,002$ etc, et que le grain converti en kilogrammes, valait $0^{kilog},00005$ etc; conséquemment, si l'on veut pousser l'exactitude, pour les monnaies jusqu'aux deniers, pour la toise jusqu'aux lignes, et pour la livre-poids jusqu'aux grains, il suffira de conserver 3 décimales dans les francs comme dans les mètres, et 5 décimales dans les kilogrammes.

290. On en déduit cette règle générale. *Pour convertir des mesures anciennes en mesures nouvelles, et négliger les unités inferieures, aux deniers, ou aux lignes, ou aux grains; il suffit de pousser l'exactitude du résultat, jusqu'aux millièmes de franc, ou jusqu'aux millièmes de mètre, ou jusqu'aux cent-millièmes de kilogramme, ce qui revient à conserver 3 decimales dans le résultat lorsqu'il exprime des francs ou des metres, et 5 decimales lorsqu'il exprime des kilogrammes.* Appliquons cette règle aux exemples du n° 288; pour convertir $5^t,677$ en mètres, et trouver sa valeur à moins d'une ligne près, on multipliera la valeur $1^m,949\ 036$ etc, d'une toise, par

le nombre 5,677 des toises, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 3ème décimale, le résultat $11^{m},065$ est la valeur de $5^{t},677$, à moins d'une ligne près ; il est aisé de s'en convaincre en convertissant ces deux nombres en toises pieds pouces et lignes; on trouvera, en négligeant les fractions de ligne, qu'ils ont tous deux pour valeur approchée $5^{t}\ 4^{pi}\ 9^{li}$. S'il s'agit de convertir 8℔,27 27 en kilogrammes, et de trouver la valeur du résultat à moins d'un grain près, on multipliera la valeur $0^{kilog},489$etc, d'une livre-poids, par le nombre 8,27 27 des livres-poids, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 5ème décimale, le résultat $4^{kilogrammes},049\ 535$, sera la valeur des 8℔,27 27 à moins d'un grain près; et en effet, si l'on convertit les deux nombres 8℔,27 27 et $4^{kilog},049535$ en livres poids, marcs, onces, gros, deniers et grains, on trouvera que leur valeur, à moins d'un grain près, est 8℔ $4^{o}\ 2^{G}\ 2^{d}\ 17^{g}$.

291. Pour faciliter es conversions des anciennes mesures en mesures nouvelles, et réciproquement celles des nouvelles en anciennes, on a formé des tableaux qui renferment les valeurs des mesures anciennes et nouvelles, exprimées par des nombres d'un seul chiffre, en mesures nouvelles et anciennes ; la formation de ces tables n'offre aucunes difficultés, car le tableau du n° 286, donnant la valeur de chaque espèce d'unité, si l'on multiplie ces valeurs par les nombres d'un seul chiffre, les produits exprimeront les valeurs correspondantes à ces nombres. Ainsi, par exemple, une toise valant $1^{m},949036591$; 2^{t} valent 2 fois $1^{m},949$ etc, ou $3^{m},898\ 073\ 182$; par la même raison, 9 toises valent 9 fois la valeur $1^{m},949$ etc, d'une toise, c'est-à-dire $17^{m},541\ 329\ 321$. La disposition du 1er tableau n'a besoin d'aucune explication ; on voit, que 5 toises valent $9^{m},745\ 182,956$, que 7^{pieds} valent $2^{m},273876023$, et ainsi de suite. Les tableaux numérotés 1, 2, 3, 4, 5, ont été calculés et disposés de la même manière. Les tableaux numérotés 6, 7, 8 etc, étant relatifs à la *Géométrie*, nous n'en parlerons que dans le *Supplément*.

292. Si l'on réfléchit sur la nature du système des nouvelles mesures, et sur les effets produits sur la valeur d'un nombre

décimal par le déplacement de la *virgule*, on en déduira facilement les usages des tableaux que nous venons de former. Par exemple, pour convertir 3987 toises en mètres ; on décomposera ce nombre en ses unités des différens ordres, c'est-à-dire, en 3000^t plus 900^t plus 80^t plus 7^t ; les conversions de ces diverses parties en mètres, s'effectueront à l'aide du 1er tableau, et du déplacement de la *virgule*; car 3^t valant $5^m,847\,109\,774$ etc, les 3000^t valent 1000 fois $5^m,847$ etc ; mais pour multiplier un nombre décimal par 1000, il suffit d'avancer la *virgule* de trois rangs vers la droite, les 3000 toises valent donc $5847^m,109\,774$; par la même raison, si l'on avance la virgule de deux rangs vers la droite de la valeur $17^m,54$ etc, de 9^t; le résultat $1754^m,1329321$ sera la valeur des 900 toises ; on trouvera de même que 80^t valent $155^m,922$ etc, et que 7^t valent 13,643etc. Si l'on additionne les valeurs obtenues pour 3000^t, 900^t, 80^t, 7^t, la somme $7770^m,808889538$, sera la valeur en mètres des 3987 toises. Pour éviter les erreurs, on doit disposer les calculs précédens de la manière suivante :

3^t valant $5^m,847109774$;	3000^t valent 1000 fois $5^m,847$ etc,	ou $5847^m,109774$
9^t valant $17^m,541329321$;	900^t valent 100 fois $17^m,541$ etc,	ou $1754^m,1329321$
8^t valant $15^m,592292730$;	80^t valent 10 fois $15^m,592$ etc,	ou $155^m,92292730$
7^t valent		$13^m,643255138$
Les 3987 toises valent donc		$7770^m,808889538$

S'il s'agit de convertir en mètres le nombre $39^t,87$, dont l'unité concrète est la toise, on convertira successivement les parties exprimées par les chiffres significatifs 3, 9, 8, 7; comme 3^t valent $5^m,847$ etc, les 30 toises valent $58^m,47$ etc ; les 9^t valent $17^m,541$ etc; afin d'évaluer les parties décimales, on se rappellera que pour diviser un nombre décimal par 10, ou par 100, il suffit d'avancer la *virgule* d'un ou deux rangs vers la gauche ; or 8^t valent $15^m,59$ etc, les $0^t,8$ valent donc $1^m,559$ etc ; 7^t valent $13^m,643$ etc, les $0^t,07$ valent donc $0^m,13643$ etc ; si l'on réunit ces diverses parties, on trouvera que les $39^t,87$ valent. . . . $77^m,708\,088\,895$ etc, ou $77^m,708$, à moins d'un millimètre près. Pour convertir en mètres le nombre $3987^t\ 4^{pi}\ 0^{po}\ 9^{li}\ \frac{7}{8}$; on cherchera dans le 1er tableau les valeurs en mètres des parties

3000^t, 9000^t, 80^t, 7^t, 4^{pi}, 9^{li}, $\frac{7}{8}^{li}$; leur somme donnera . . . . . 7772^m,130 523 580 pour la valeur en mètres du nombre proposé. La valeur des $\frac{7}{8}^{li}$, pourrait s'obtenir en prenant les $\frac{7}{8}$ de la valeur d'une ligne, mais il est plus simple de prendre le 8e de la valeur 0^m,015 etc, de 7 lignes; cette remarque est générale. Si la mesure à convertir était exprimée par un nombre décimal périodique, on chercherait la valeur de la fraction irréductible qui l'exprime; par exemple, pour convertir en mètres . . . . 2^{pi},27 27 etc; on substituera à ce nombre la fraction irréductible $\frac{25}{11}^{pi}$ qui l'exprime; la valeur de 25 pieds en mètres, divisée par 11, donnera 0^m,738 271 445, pour la valeur des 2^{pi},27 27 etc. La manière d'opérer serait la même, pour toute autre espèce de mesure; ainsi, la conversion en kilogrammes du nombre 8℔ 4° 2^G 2^d 17^g $\frac{5}{11}$, s'effectuera en cherchant dans le 4e tableau, les valeurs en kilogrammes, des parties 8℔, 4°, 2$_G$, 2^d, 17^g, $\frac{5}{11}^g$; leur somme 4^{kilog},0495480 etc, sera la valeur du nombre proposé en kilogrammes. Si l'on se contente de pousser l'exactitude de ce résultat jusqu'aux grains, il suffira de conserver 5 décimales (n° 290), et l'on aura 4^{kilog},04955, pour la valeur du nombre complexe proposé, à moins d'un denier près. On trouvera par des calculs absolument semblables, que 347^t 5^{pi} 7^{po} 11^{li} $\frac{13}{17}$ valent 677^m,832, à moins d'une ligne près; que 968$^{\#}$ 17^f 11^d $\frac{2}{3}$ valent 956^f,887, à moins d'un denier près; que 34℔ 5° 7^G 17^g valent 16^{kilog},82384, à moins d'un grain près.

Si l'on a bien compris les exemples précédens, on sera en état d'effectuer toutes les conversions possibles, des anciennes mesures en mesures nouvelles. La solution du problème inverse, n'offre pas plus de difficultés. Pour convertir . . . . . 7770^m,80888 etc, en toises, et trouver la valeur du résultat à moins d'une ligne près; on observera qu'il suffit de conserver 3 décimales dans les toises comme dans les mètres (n°s 268 et 290); on cherchera en conséquence, au moyen du 3e tableau, la valeur de 7770^m,809 en toises; afin de pouvoir compter sur les trois premières décimales du résultat, on en conservera quatre dans les valeurs en toises des parties 7000^m, 700^m, 70^m,

$0^m,8$, $0^m,009$; la somme sera $3987^t,0001$; si l'on supprime la dernière décimale, on aura 3987^t, pour la valeur des $7770^m,808$ etc, à moins d'une ligne près. S'il s'agit de trouver, à moins d'une ligne près, la valeur en toises de $7772^m,13052580$; comme il suffit alors de conserver 3 décimales dans les mètres, on cherchera au moyen de la 1re table la valeur de $7772^m,131$; conservant 4 décimales dans les calculs, on trouvera $3987^t,724$; ce nombre converti en nombre complexe, donnera $3987^t\ 4^{pi}\ 9^{li}$, pour la valeur du nombre proposé, à moins d'une ligne près; nous avons trouvé en effet que le nombre $3987^t\ 4^{pi}\ 9^{li}\ \frac{7}{8}$, valait . . . . . . $7772^m,1305235$ etc. Pour convertir $4^{kilog},049548$ etc, en livres-poids, et trouver sa valeur à moins d'un grain près, on se rappellera qu'il suffit de conserver 5 décimales dans les kilogrammes, et 4 décimales dans les livres-poids (n°s 268 et 290); on cherchera donc au moyen du 4e tableau, la valeur de $4^{kilog},04955$ en livres-poids; afin de pouvoir compter sur les quatre premières décimales du résultat, on en conservera 5 dans les calculs; avec cette attention, on trouvera 8℔,27273; supprimant la dernière décimale, et convertissant ensuite 8℔,27 27, en nombre complexe, le résultat 8℔ $4^o\ 2^e\ 2^d\ 17^g$ sera la valeur du nombre proposé, à moins d'un grain près. Opérant d'une manière semblable, on trouvera que la valeur de . . . $956^f,88757$ est égale à $968^{\#}\ 17^s\ 11^d$, à un denier près; que celle de $677^m,832\ 308\ 644$, est $347^t\ 5^{pi}\ 7^{po}\ 11^{li}$, à moins d'une ligne près; enfin que celle de $16^{kil},823\ 842\ 142$, est 34℔ $5^o\ 7^G\ 17^g$, à moins d'un grain près.

293. Les exemples précédens suffisent pour convaincre de l'utilité des tables; par leur moyen, le passage d'un système à l'autre s'effectue, à l'aide du déplacement de la virgule, et d'additions fort simples; mais ces avantages réels, cachent dans certains cas des défauts, qu'il est important de faire connaître. Les tables ont certaines limites, qu'on ne saurait passer sans commettre de grandes erreurs. Pour en donner un exemple, proposons-nous de convertir en mètres 100 000 000 toises; comme 1^t vaut $1^m,949\ 036\ 591$, les 100 000 000^t valent . . . . 194 903 $659^m,1$; ce résultat ne contenant qu'une décimale,

on ignore quel doit être le chiffre des centièmes, on sait seulement que l'erreur commise ne peut excéder un demi décimètre, ou 5 centimètres, ou $0^{m},05$; ensorte que l'erreur commise peut être $0^{m},04$; or 4 mètres valent en lignes $1673^{li},183\,744$; les $0^{m},04$ valent donc $16^{li},73183$ etc; l'erreur commise peut donc être plus grande que 16 lignes; ainsi lorsqu'on a besoin de conserver les lignes, on ne peut pas employer les tables, pour convertir 100 000 000^{t}, en mètres. Il est facile de déterminer les limites; en effet: nous avons vu (n° 290); que lorsque dans la conversion des toises en mètres, on veut conserver les lignes, il faut pousser l'exactitude jusqu'à la 3e décimale du résultat, ce qui exige que l'on conserve 4 décimales au moins dans les calculs; 1^{t} valant $1^{m},949\,036\,591$, 100 000 toises valent $194\,903^{m},6591$, et 1 000 000^{t} valent $1\,949\,036^{m},591$; ce dernier nombre ne renfermant que trois décimales, n'est pas assez exact; mais la valeur de 100 000 toises contient les 4 décimales nécessaires à l'approximation demandée; conséquemment, lorsqu'on veut conserver les lignes, les tables ne peuvent servir que pour les nombres de toises, moindres qu'un million; ensorte que le plus grand nombre que l'on puisse convertir en mètres, est 999 999 toises; si l'on convertit ce nombre en mètres, en conservant 4 décimales dans les calculs, on trouvera que sa valeur, à moins d'une ligne près, est $19\,489\,044^{m},662$. On trouverait la même limite pour la conversion des mètres en toises. S'il s'agit de livres-poids et de kilogrammes, on observera qu'un grain valant $0^{kilog},000\,05$ etc, ou 0℔,0001 etc; en poussant l'exactitude du résultat jusqu'aux cent-millièmes de kilogramme, et jusqu'aux dix-millièmes de livres-poids, l'erreur est nécessairement moindre qu'un grain; conséquemment, pour convertir des livres-poids en kilogrammes, et réciproquement des kilogrammes en livres-poids, il suffit de pousser l'exactitude du résultat, jusqu'à la 4e décimale lorsqu'il exprime des livres-poids, et jusqu'à la 5e décimale, pour les kilogrammes; mais d'après les remarques précédentes, on doit conserver dans les calculs une décimale de plus que n'en doit contenir le résultat. Il est donc nécessaire de conserver 6 décimales dans les kilogrammes,

et 5 décimales dans les livres-poids ; or on trouve dans le 4e tableau, que 1000℔ valent 489^{kilog},505 847, et que 10 000^{kilog} valent 20428℔,76519 ; ces résultats ne contenant que le nombre de décimales nécessaire à l'approximation demandée, le plus grand nombre de livres-poids ou de kilogrammes que l'on puisse convertir, au moyen du 4e tableau, est 9999℔ en kilogrammes, et 99999^{kilog} en livres-poids.

294. Si l'on réunit ce qui précède, on en déduira cette règle générale, très-utile dans la pratique, lorsqu'on fait usage des tables. 1°. *Pour convertir des* TOISES *pieds pouces et lignes en* MÈTRES, *et pousser l'exactitude du résultat jusqu'aux lignes ; décomposez les diverses parties du nombre proposé en leurs unités des différens ordres ; cherchez dans le* 1er *tableau les valeurs de ces diverses parties, en y conservant seulement quatre décimales ; effectuez l'addition de ces valeurs ; supprimez ensuite la dernière décimale de la somme ; le résultat, qui exprimera des mètres, sera la valeur du nombre proposé à moins d'une ligne près.* 2°. *Pour convertir des toises et parties décimales de la toise, en mètres ; conservez seulement trois décimales dans le nombre proposé ; décomposez le reste en ses unités des différens ordres ; cherchez les valeurs de ces diverses parties dans la table des toises en mètres, et conservez quatre décimales ; effectuez l'addition de ces valeurs ; supprimez ensuite la dernière décimale de la somme ; le résultat, qui exprimera des mètres, sera la valeur du nombre proposé, à moins d'une ligne près.* 3°. Réciproquement : *pour convertir des mètres, en toises et parties décimales de la toise, ou en toises pieds pouces lignes ; conservez trois décimales dans le nombre proposé ; décomposez le reste en ses unités des différens ordres ; cherchez les valeurs de ces unités dans la table des mètres en toises, et conservez quatre décimales ; supprimez la dernière décimale, dans la somme de ces parties ; le résultat, qui exprimera des toises, sera la valeur du nombre proposé en toises et parties décimales de la toise ; ce résultat, converti en toises pieds pouces et lignes, sera la valeur du nombre proposé, à moins d'une ligne près.* 4°. *Pour convertir en* KILOGRAMMES, *un nombre*

composé de LIVRES-POIDS *, marcs , onces , gros , deniers et grains , et pousser l'exactitude du résultat jusqu'aux grains ; décomposez les diverses parties du nombre proposé en leurs unités des différens ordres ; cherchez , dans le 4ᵉ tableau , les valeurs de ces diverses unités , en y conservant six décimales ; effectuez l'addition , et supprimez la dernière décimale de la somme ; le résultat , qui exprime des kilogrammes , est la valeur du nombre proposé à moins d'un grain près.* 5°. *Pour convertir en kilogrammes, des livres-poids et parties décimales de la livre-poids ; conservez seulement les quatre premières décimales du nombre proposé ; décomposez le reste en ses unités des différens ordres ; cherchez dans le 4ᵉ tableau , les valeurs de ces unités , en y conservant six décimales ; effectuez l'addition , et supprimez la dernière décimale de la somme ; le résultat, qui exprimera des kilogrammes , sera la valeur du nombre proposé , à moins d'un grain près.* 6°. Réciproquement ; *pour convertir des kilogrammes, en livres-poids et parties décimales de la livre-poids, ou en livres , marcs , onces , gros , deniers et grains ; conservez cinq décimales dans le nombre proposé; décomposez le reste en ses unités des différens ordres ; cherchez les valeurs de ces unités dans la table des kilogrammes en livres , et conservez cinq décimales ; effectuez l'addition , et supprimez ensuite la dernière décimale de la somme ; le résultat , qui exprimera des livres-poids , sera la valeur du nombre proposé en livres et parties décimales de la livre ; ce résultat converti en livres , marcs , onces , gros , deniers et grains , sera la valeur du nombre proposé , à moins d'un grain près. Cette règle exige , que le nombre des mètres ou des toises à convertir soit moindre qu'un million , que celui des kilogrammes soit moindre que cent mille , et que celui des livres-poids soit moindre que dix mille ; ensorte que les plus grands nombres que l'on puisse convertir au moyen des tables , en poussant l'exactitude du résultat, pour les toises et les mètres jusqu'aux lignes, pour les livres-poids et les kilogrammes jusqu'aux grains , sont* 999 999 *toises,* 999 999 *mètres,* 99 999 *kilogrammes , et* 9999 *livres-poids. La suppression des décimales doit toujours s'effectuer, d'après le*

principe du n° 195. (*page* 213). Appliquons cette règle à quelques exemples.

1°. Pour convertir 500 007^t 0^{pi} 0^{po} 11^{li} en mètres, et trouver la valeur du résultat à moins d'une ligne près ; on cherchera dans la 1ère table les valeurs des parties 500 000^t, 7^t, 10^{li}, 1^{li}, du nombre proposé, en conservant 4 décimales ; on trouvera : que 500 000^t valent 974 518^m,2956 : que 7^t valent 13^m,6433 : que 10^{li} valent 0^m,0226 : que 1^{li} vaut 0^m,0023 ; effectuant l'addition de ces diverses parties, et supprimant la dernière décimale de la somme 974 531^m,9638, le résultat 974 531^m,964, exprime la valeur du nombre proposé à moins d'une ligne près. 2°. Pour convertir en mètres le nombre . . . . 398 945^t,87 456 789 999 etc ; on conservera ses trois premières décimales ; on décomposera ensuite le reste 398 945^t,875, en ses unités des différens ordres ; on cherchera les valeurs de ces unités dans la table des toises en mètres, et l'on conservera quatre décimales ; effectuant l'addition de ces valeurs, et supprimant la dernière décimale de la somme, le résultat 777 560^m,108 sera la valeur du nombre proposé à moins d'une ligne près. 3°. *Réciproquement*, pour convertir 974 531^m,964 en toises et parties décimales de la toise, ou en toises pieds pouces lignes ; on cherchera les parties du nombre proposé dans la table des mètres en toises, et l'on conservera quatre décimales ; supprimant la dernière décimale de la somme, le résultat 500 007^t,013 sera celui demandé à moins d'une ligne près ; ce dernier nombre converti en nombre complexe, donnera 500 007^t 11^{li}, pour la valeur du nombre proposé, à moins d'une ligne près.

4°. Pour convertir en kilogrammes le nombre 7988℔ 1^m 7^o 5^G 2^d 23^g ; on cherchera ses parties 7000℔, 900℔, 80℔, 8℔, 1^m, 7^o, 5^G, 2^d, 20^g, 3^g, dans le 4e tableau, en conservant six décimales ; l'addition effectuée, on supprimera la dernière décimale de la somme, le résultat 3910^{kilog},65451 sera celui demandé, à moins d'un grain près. 5°. Pour convertir en kilogrammes le nombre 7788℔,579 877 777 etc ; on conservera quatre décimales, et l'on cherchera au moyen du 4e tableau, les valeurs des parties du reste 7988℔,5799 en conservant six

décimales ; l'addition effectuée, on supprimera la dernière décimale de la somme ; le résultat $3910^{kilog},45656$, sera la valeur du nombre proposé, à moins d'un grain près. 6°. *Réciproquement*, pour convertir en livres-poids le nombre ...... $3910^{kilog},454\,506$etc ; on conservera cinq décimales et l'on cherchera au moyen du 4e tableau, les valeurs des parties du reste $3910^{kilog},45451$; l'addition effectuée, on aura ...... 7988℔,98428 ; supprimant la dernière décimale, le reste 7988℔,9843, converti en nombre complexe, donnera 7988℔ $1^m\ 7^o\ 5^G\ 2^d\ 23^g$, à moins d'un grain près. On trouvera de la même manière, que le nombre $999\,999^t\ 3^{pi}\ 5^{po}\ 11^{li}$, converti en mètres, vaut $1\,949\,035^m,7768$, et que ce dernier nombre vaut $999\,999^t,5822$, ou $999\,999^t\ 3^{pi}\ 5^{po}\ 11^{li}$. On peut remarquer l'accord qui règne entre ces divers résultats.

295. Lorsque la mesure à convertir, est exprimée par une fraction ordinaire, on peut employer différens procédés, qui conduisent tous au même résultat. Pour en donner un exemple, proposons-nous de convertir en mètres, la fraction de toise $\frac{945738^t}{245}$, et de pousser l'exactitude jusqu'aux lignes ; 1°. On pourra convertir le numérateur $945\,738^t$ en mètres, en multipliant la valeur $1^m,949\,036\,591$ d'une toise, par le nombre 945 738 des toises ; si l'on pousse l'exactitude du produit jusqu'à la 3e décimale, on trouvera $1\,843\,277^m,967$, pour la valeur du numérateur $945\,738^t$; divisant ce dernier nombre par le dénominateur 245, de la fraction proposée, le quotient calculé avec trois décimales, donnera $7523^m,584$, pour la valeur de la fraction proposée, à moins d'une ligne près. 2°. On peut chercher au moyen de la règle du n° 294, la valeur du numérateur $945\,738^t$; on trouvera $184\,3277^m,767$; ce dernier nombre divisé par le dénominateur 245, donnera $7523^m,584$, pour la valeur de la fraction proposée, à moins d'une ligne près. 3°. Si l'on réduit en décimales, la fraction $\frac{945738^t}{245}$; on trouvera $3860^t,1551\,028$; la conversion de ce dernier nombre en mètres, pourra s'effectuer, au moyen des tables, ou en multipliant la valeur $1^m,94\,903\,591$, d'une toise, par le nombre 3860,155 102 etc, des toises ; ces deux procédés, donneront

également $7524^{m},583$, pour la valeur de la fraction proposée, à moins d'une ligne près. 4°. Si l'on convertit la fraction proposée en nombre complexe, on trouvera $3860^{t}\ 0^{pi}\ 11^{po}\ 2^{li}$ (on néglige les fractions de ligne); ce dernier nombre, converti en mètres, d'après la 1ère règle du n° 294, donnera $7523^{m},584$ pour la valeur de la fraction proposée, à moins d'une ligne près. 5°. Si l'on considérait la fraction proposée comme exprimant 945 738 fois $\frac{1}{245}{}^{t}$; on diviserait d'abord la valeur . . . . . . $1^{m},949\ 036\ 591$ d'une toise, par 245; ce qui donnerait . . . . . $0^{m},007\ 955\ 251$ etc, pour la valeur de $\frac{1}{245}{}^{t}$; si l'on multiplie cette valeur par 945 738, en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 3e décimale, on trouvera encore $7523^{m},584$. On voit que ces diverses méthodes s'accordent à donner $7523^{m},584$ pour la valeur de la fraction $\frac{945738^{t}}{245}$ à moins d'une ligne près. Il est facile de se convaincre que $7523^{m},584$ est effectivement la valeur de la fraction proposée, à moins d'une ligne près; car la conversion du nombre $7523^{m},584$ en toises, effectuée d'après la règle du n° 294, donne $3860^{t},155$, ou $3860^{t}\ 0^{pi}\ 11^{po}\ 1^{li},92$, ou $3860^{t}\ 0^{pi}\ 11^{po}\ 2^{li}$, à moins d'un dixième de ligne près; ce dernier nombre est précisément la valeur de la fraction proposée $\frac{945738^{t}}{245}$, à moins d'une ligne près.

Les différens procédés que nous venons d'indiquer, conduisent comme on voit au même résultat, quand on se contente de pousser l'exactitude du résultat jusqu'aux lignes; mais lorsqu'on desire une plus grande approximation, il faut commencer par convertir le numérateur; la division du numérateur ainsi converti, par le dénominateur, donne le résultat demandé, avec beaucoup d'exactitude; il est évident que ce dernier procédé est le plus exact, car l'erreur commise en convertissant le numérateur, se trouve ensuite divisée par le dénominateur, ce qui la rend autant de fois plus petite qu'il y a d'unités dans le dénominateur.

296. Lorsque la mesure à convertir excède les limites des tables, ce qui arrive très-rarement, on suit alors le procédé que nous allons indiquer, au moyen d'un exemple. S'il s'agit de trouver en mètres la valeur de 38 601 551 toises, à moins d'une

d'une ligne près ; on se rappellera que le quart de la circonférence de la terre, exprimé par 5 130 740 toises, vaut 10 000 000 mètres (n° 272, page 338) ; une toise vaut donc $\frac{10\,000\,000^m}{5\,130\,740}$; cette fraction réduite à sa plus simple expression, donne $\frac{500000^m}{256537}$ pour la valeur d'une toise en mètres ; les 38 601 551^t valent donc 38 601 551 fois $\frac{500000^m}{256537}$; effectuant la multiplication indiquée et divisant ensuite le produit par le dénominateur 256 537 ; le quotient, calculé avec 3 décimales, donnera 75 235 835^m,377 pour la valeur du nombre demandé, à moins d'une ligne près. Réciproquement, si l'on veut trouver, à moins d'une ligne près, la valeur en toises de 75 235 835^m,377 ; il suffira de se rappeler que 1^t valant $\frac{500000^m}{256537}$, 500 000^m valent 256 537^t ; et 1^m vaut $\frac{256537^t}{500000}$; les 75 235 835^m,377 valent donc 75 235 835,377 fois $\frac{256537^t}{500000}$; la multiplication effectuée donnera 38 601 551 toises, pour la valeur du nombre de mètres proposé, à moins d'une ligne près. Cette 2e opération confirme l'exactitude de la 1ère. On opérerait de la même manière pour toute autre espèce de mesures, excédant les limites des tables. S'il s'agit, par exemple, de convertir 3 900 007℔, en kilogrammes ; on se rappellera que la livre poids, exprimée en kilogrammes, vaut $\frac{921\,600^{kilog}}{1\,882\,715}$, ou $\frac{184320^{kil}}{376543}$; la multiplication de cette dernière fraction par 3 900 007, donnera 1 909 076^{kil},22 832 pour la valeur de 3 900 007℔ en kilogrammes. Réciproquement, pour convertir 1 909 076^{kil},22 832 en livres poids, on dira ; $\frac{184320^{kilog}}{376543}$ vaut 1℔ ; conséquemment : 184 320 kilogrammes, valent 376 543℔ : 1 kilogramme vaut donc $\frac{376543}{184320}$. Si l'on multiplie cette dernière fraction par le nombre 1 909 076,22 832 des kilogrammes, en poussant l'exactitude du résultat jusqu'à la 4e décimale, on trouvera 3 900 007℔,0000 pour la valeur de 1 909 076^{kilog},22 832, à moins d'un grain près. On obtiendrait de la même manière les valeurs des unités de chaque espèce en fraction.

297. Les rapports approchés, en nombres entiers, des nouvelles mesures aux anciennes, et des anciennes aux nouvelles, se déduisent aisément des tables formées dans l'article 291. En effet, en suivant l'ordre des tableaux, on trouve dans le 1er : que 4 pieds valent, 13 décimètres, ou 13 *palmes* : que 7

pouces valent, 19 centimètres, ou 19 *doigts* : que 4 lignes valent 9 millimètres, ou 9 *traits* : que 39 toises valent 76 mètres. On trouve dans le 2e tableau : que 69 aunes de Paris valent 82 mètres. Dans le 3e, on voit : que 9 lieues terrestres valent 4 myriamètres, ou 4 lieues nouvelles : que 36 lieues marines valent 20 myriamètres, ou 20 lieues nouvelles. On trouvera dans le 4e : que 143 livres, poids de marc, valent, 70 kilogrammes, ou 70 livres nouvelles : que 36 onces valent, 11 hectogrammes, ou 11 onces nouvelles : que 34 gros valent, 13 décagrammes, ou 13 gros nouveaux : que 11 deniers valent, 14 grammes, ou 14 deniers nouveaux : que 15 grains valent, 8 décigrammes, ou 8 grains nouveaux. Enfin, dans le 5e tableau, on trouve : que 8 francs valent $8^{\#},1$; ensorte que 80 francs, valent $81^{\#}$. Les autres rapports, qui sont relatifs au *Supplément*, fournissent des rapports analogues ; on les a réunis, dans le 14e tableau.

298. Les monnaies qui sont en circulation, exigeant des conversions continuelles de livres tournois en francs et de francs en livres tournois ; je vais donner une méthode abrégée pour effectuer ces sortes de conversions. 80 francs valant 81 livres tournois, un franc vaut $\frac{81}{80}{}^{\#}$, ou $1^{\#}\ \frac{1}{80}$; et $1^{\#}$ vaut $\frac{80}{81}{}^{f}$, ou $\frac{81}{81}{}^{f}$ moins $\frac{1}{81}{}^{f}$, ou 1 franc moins $\frac{1}{81}$ de franc ; conséquemment : *Pour convertir des francs en livres tournois, il suffit d'ajouter au nombre des francs sa 80e partie, la somme exprime le nombre des livres : pour convertir des livres tournois en francs, il suffit de soustraire du nombre des livres sa 81e partie, le reste exprime le nombre des francs.* Cette règle est fort utile lorsqu'on n'a pas de tables à sa disposition. S'il s'agit, par exemple, de convertir 968 francs en livres tournois ; on divisera 968 par 80, ce qui donnera 12,1 ; ajoutant au nombre 968, des francs, sa 80e partie 12,1, la somme 980,1 exprime le nombre des livres ; ensorte que les 968 francs valent $980^{\#},1$, ou $980^{\#}\ 2^{s}$. Réciproquement, pour convertir $980^{\#}\ 2^{s}$, ou $980^{\#},1$, en francs ; on divisera 980,1 par 81, ce qui donnera 12,1 pour quotient ; retranchant du nombre 980,1, des livres, leur 81e partie 12,1, le reste 968, exprimera le nombre des francs ; ensorte que

980# 2s, valent 968 francs. Le 5e tableau conduit aux mêmes resultats; pour convertir les 968 francs en livres, on cherchera dans la table des francs en livres, les valeurs de 900 francs de 60 francs et de 8 francs, ce qui donnera 911#,25, 60#,75 et 8#,1 ; additionnant, on verra que les 968 francs valent 980#,1 ; s'il s'agit de convertir les 980#,1 en francs, on cherchera, dans le tableau des livres en francs, les valeurs de 900#, de 80# et de 0#,1 ; leur somme 967f,9967, exprimera la valeur des 980#,1 ; ensorte que la valeur de 980#,1, à moins d'un centime près, est 968 francs.

Lorsque la somme à convertir est considérable, on peut négliger les unités inférieures aux livres tournois, ou aux francs; les règles précédentes conduisent alors plus promptement au résultat, que l'usage des tables. Le principe du n° 233, simplifie l'application de ces règles; en effet. pour diviser un nombre par 81, il suffit de le diviser successivement par les facteurs 9 et 9 de 81 ; et pour diviser par 80, il suffit de diviser par les facteurs 10 et 8 de 80: mais la division par 10 s'effectue en plaçant la *virgule* sur la droite du chiffre des dixièmes; par conséquent : 1°. *Pour convertir des francs en livres, il suffit, apres avoir mis la* VIRGULE *sur la droite du chiffre qui tient la place des dixaines, dans le nombre des francs, de prendre le huitième du resultat; ce huitième, ajouté au nombre des francs, donne le nombre des livres :* 2°. *Pour convertir des livres en francs, il suffit, après avoir pris le* 9e *du nombre des livres, de prendre le* 9e *du quotient ; le resultat soustrait du nombre des livres, donnera un reste qui exprimera le nombre des francs.* D'après cette règle ; pour convertir 9 452 786f,17 en livres, on avancera la *virgule* sur la droite du chiffre 8 des dixaines de franc, ce qui donnera 945 278,617 ; on prendra le huitième de ce dernier nombre, ce qui donnera 118 159,82 etc; ce résultat ajouté au nombre 9 452 786,17 des francs, donnera 9 570 945,99 etc, pour le nombre des livres; ensorte que les 9 452 786f,17 valent 9 570 946#, à moins d'un centième de livre près. Réciproquement ; pour convertir 9 570 946#, en francs; après avoir pris le neuvième du nombre des livres, on

2

prendra le 9ᵉ du quotient 1 063 438,44 ; le résultat 118 159,82 etc, soustrait du nombre 9 570 946 des livres, donnera 9 452 786,18 pour le nombre des francs ; ensorte que les 9 570 946# valent 9 452 786f,18 ; les tables conduisent plus longuement aux mêmes résultats. On néglige toujours les parties du franc, inférieures aux centimes.

299. Les exemples précédens suffisent pour mettre en état de convertir les anciennes mesures en nouvelles et réciproquement. Les tableaux, au moyen desquels on peut effectuer ces conversions, donnent la solution de tous les problèmes relatifs aux mesures anciennes et nouvelles. 1°. *Les valeurs des nouvelles mesures en mesures anciennes, servent à déterminer le prix d'une mesure nouvelle, lorsque le prix de la mesure ancienne est donné ; il suffit de multiplier le prix de l'ancienne mesure par le nombre qui exprime combien il faut de ces mesures pour composer la mesure nouvelle dont on cherche le prix ; le produit est le prix cherché.* Par exemple ; pour trouver le prix du mètre, lorsqu'une toise coûte 12# ; on cherchera combien il faut de toises pour composer un mètre ; on trouvera dans la 1ère table, qu'un mètre vaut 0t,51307 etc ; multipliant alors le prix 12# d'une toise, par le nombre abstrait 0,51307 etc, qui exprime combien il faut de toises pour composer un mètre, le produit 6#,156 84 etc, sera le prix du mètre ; si l'on veut exprimer ce prix en livres, sous et deniers, on le convertira en nombre complexe, au moyen de la 2ᵉ règle du n° 260, ce qui donnera 6# 3s 2d, pour le prix du mètre. S'il s'agit de déterminer le prix du kilogramme, à raison de 8 francs l'once, on cherchera combien il y a d'onces dans un kilogramme ; on trouvera dans le 4ᵉ tableau, qu'un kilogramme vaut 32onces,686 ; multipliant le prix 8 francs de l'once, par le nombre 32,686, qui exprime combien il y a d'onces dans un kilogramme ; le produit 261f,488 exprime le prix du kilogramme ; la valeur la plus approchée de ce prix, lorsqu'on néglige les subdivisions du franc inférieures aux centimes, est 261 francs 49 centimes. Pour trouver le prix du mètre lorsque l'aune coûte 17# ; on multipliera le prix 17# de l'ancienne mesure, par le nombre 0,8414, qui exprime combien il faut

d'aunes pour composer un mètre (le mètre vaut $0^{a},8414$), le produit $14^{\#},3$, ou $14^{\#}\ 6^{s}$, est le prix cherché. On peut obtenir le même résultat, en disant : 1 mètre vaut en aunes $0^{a},8414$; 10 000 mètres valent donc 8414 aunes; mais l'aune coûte $17^{\#}$; les 10 000 mètres, composés de 8414 aunes, coûtent donc 8414 fois $17^{\#}$, ou $143\,038^{\#}$; le mètre coûte donc la 10000ᵉ partie de $143\,038^{\#}$, ou $14^{\#},3038$; c'est-à-dire $14^{\#},3$, à moins d'un centième de livre près. Si l'on demandait le prix d'un mètre en francs, lorsque l'aune coûte $17^{\#}$; après avoir trouvé le prix $14^{\#},3$ du mètre, on convertirait ce prix en francs, le résultat $14^{f},12$, ou 14 francs 12 centimes, serait le prix du mètre en francs. Si l'on demandait le prix de 12^{m} en francs, lorsque l'aune coûte $17^{\#}$; après avoir trouvé le prix $14^{f},12$ du mètre, on multiplierait ce prix par le nombre 12, des mètres; le produit $169^{f},44$ exprimerait le prix des 12 mètres; enfin, si l'on voulait exprimer en francs, le prix de 12 mètres d'un drap, dont 56 aunes coûtent $952^{\#}$; on chercherait d'abord le prix de l'aune, en divisant $952^{\#}$ par 56, ce qui donnerait $17^{\#}$; opérant alors comme dans la question précédente, on trouverait qu'à $17^{\#}$ l'aune de drap, le prix de douze mètres, en francs, est $169^{f},44$.

2°. *Les valeurs des anciennes mesures en mesures nouvelles, servent à déterminer le prix d'une mesure ancienne, lorsque le prix de la mesure nouvelle est donné; il suffit de multiplier le prix de la mesure nouvelle, par le nombre qui exprime combien il faut de ces mesures pour composer la mesure ancienne dont on cherche le prix; le produit est le prix cherché. Lorsque le prix donné est en livres sous et deniers, on simplifie les calculs, en convertissant d'abord les sous et les deniers en décimales de la livre.* Ainsi, pour trouver le prix de la toise, lorsque le mètre coûte $6^{\#}\ 3^{s}\ 2^{d}$; on convertira d'abord les sous et les deniers en décimales de la livre, ce qui donnera $6^{\#},15\,684$; on cherchera ensuite combien il faut de mètres pour composer une toise; on trouvera qu'une toise vaut $1^{m},94\,904$; multipliant le prix $6^{\#},15\,684$ d'un mètre, par le nombre $1,94\,904$, qui indique combien il y a de mètres dans une toise, on trouvera,

en poussant l'exactitude du produit jusqu'à la 2ᵉ décimale, que le prix cherché est 12#, à moins d'un demi-centième de livre près. S'il s'agit de calculer le prix de l'once, à raison de 261ᶠ,488 le kilogramme ; on cherchera combien l'once vaut de kilogrammes ; on trouvera qu'une once vaut en kilogrammes, 0^{kilog},03 059 ; on multipliera le prix 261ᶠ,488 du kilogramme, par le nombre 0,03 059 des kilogrammes contenus dans une once, le produit, à moins d'un demi-centime près, est 8 francs ; ensorte que l'once coûte 8 francs. Pour trouver le prix de l'aune, lorsque le mètre coûte 14#,3 ; on cherchera de combien de mètres l'aune se compose ; on trouvera que 1^a vaut 1^m,18 845 ; multipliant alors le prix 14#,3 du mètre, par le nombre 1,18 845, qui exprime combien il faut de mètres pour composer une aune, le produit, à moins d'un centième de livre près, sera 17# ; ensorte que le prix de l'aune est 17#. Si l'on demandait le prix de l'aune en livres, lorsque le mètre coûte 14ᶠ,12 ; on convertirait les francs en livres, ce qui donnerait 14#,3 ; la question serait alors réduite à la précédente, où il s'agissait de déterminer le prix de l'aune lorsque le mètre coûte 14#,3 ; on trouvera que le prix de l'aune est 17#. Si l'on voulait calculer en livres tournois, le prix de 56 aunes de drap, à raison de 169ᶠ,44 les 12 mètres ; on chercherait d'abord le prix du mètre, en divisant 169ᶠ,44 par 12, ce qui donnerait 14ᶠ,12 pour le prix du mètre ; opérant alors comme dans la question précédente, on trouvera que le prix du mètre étant 14ᶠ,12, celui de l'aune est 17# ; les 56 aunes coûteront donc 56 fois 17#, ou 952#. Ces exemples vérifient l'exactitude des résultats obtenus dans l'article précédent.

Nous terminerons par un problême dont la solution exige l'application des principes précédens. *Un militaire a parcouru 34 lieues terrestres en 2 jours, et 85 lieues marines en 3 jours ; ses frais de route lui sont payés à raison de 2 décimes par kilomètre ; sa nourriture journalière est fixée à un kilogramme de pain et à 5 hectogrammes de viande ; sa paye est de 75 centimes par jour. On propose d'exprimer en nouvelles mesures*

et en anciennes, la totalité de sa route, ce qui lui est dû, et la quantité de vivres qu'il a consommé. On trouvera, au moyen du 3e tableau, que les 34 lieues terrestres valent 151^{kilom},112, et que les 85 lieues marines valent 472^{kilom},222; la route totale, composée de ces deux distances, est donc égale à leur somme 623^{kilom},334; pour exprimer cette distance en toises, on la convertira d'abord en mètres, ce qui donnera 623 334 mètres; on trouvera, au moyen de la table des mètres en toises, que les 623 334 mètres valent 319 816^t,47. Pour vérifier l'exactitude de ce résultat, nous calculerons la valeur exacte de cette même distance; la lieue terrestre vaut 2280^t,33; les 34 lieues terrestres valent donc 34 fois 2280^t,33, c'est-à-dire 77 531^t,22; la lieue marine valant 2850^t,41, les 85 lieues marines valent 85 fois 2850^t,41, c'est-à-dire 242 284^t,85; la route totale est donc équivalente à 319 816^t,07; ainsi, l'erreur due à l'usage des tables, est moindre qu'une demi toise; cette approximation est plus que suffisante pour le problême actuel. Les frais de route étant fixés à 2 décimes par kilomètre, il suffit pour les obtenir, de multiplier 2 décimes, ou 0^f,2, par le nombre 623,334 des kilomètres, ce qui donnera 124^f,67; si l'on convertit ces francs en livres tournois, on trouvera que les frais de route sont également exprimés par 124^f,67 et par 125^{tt},55, ou 125^{tt} 11^s. Le militaire a marché pendant 5 jours; il reçoit chaque jour 75 centimes de paye, un kilogramme de pain et cinq hectogrammes de viande; il a donc recu: en argent cinq fois 75 centimes, ou 375 centimes, ou 3^f,75: en pain, cinq kilogrammes, et en viande 25 hectogrammes, ou 2 kilogrammes $\frac{1}{2}$. Si l'on convertit ces nouvelles mesures en mesures anciennes, on trouvera, au moyen des tables, que les 3^f,75 valent 3^{tt},78, ou 3^{tt} 15^s 7^d; que les 5 kilogrammes valent 10℔,21, et que les 25 hectogrammes valent 5℔,10. Il est très-facile d'exprimer en livres tournois les frais de route relatifs à une lieue terrestre et à une lieue marine, car les frais de route étant fixés à 2 décimes par kilomètre, il suffit de multiplier 2 décimes par le nombre de kilomètres contenu, dans la lieue terrestre et dans la lieue marine; or d'après le 3e tableau, une lieue terrestre vaut

$4^{kilom},4444$, et une lieue marine vaut $5^{kilom},5556$; les produits $0^f,88888$, $1^f,11112$ de 2 décimes, ou de $0^f,2$, par 4,4444 et par 5,5556, nous montrent que les frais de route, par lieue terrestre et par lieue marine, sont, à moins d'un centime près, $0^f,89$ et $1^f,11$, c'est-à-dire 89 centimes, et 111 centimes. Si l'on fait usage du 5ᵉ tableau, on trouvera que 89 centimes valent $0^{\#},9$, ou 18 sous, et que les 111 centimes valent $1^{\#},1211$, ou $1^{\#}\ 2^f\ 5^d$. Ainsi, lorsque les frais de route sont payés à raison de 2 décimes par kilomètre, on donne 89 centimes, ou 18^f, par lieue terrestre, et 111 centimes, ou $1^{\#}\ 2^f\ 5^d$, par lieue marine.

300. L'excessive complication du calcul des nombres complexes, comparée à la simplicité de celui des nouvelles mesures, doit convaincre des grands avantages de ces dernières, et en même temps de la nécessité de faire disparaître les anciennes. C'est en comparant les deux systèmes, que les élèves éprouvent quelques difficultés, qui tiennent au peu d'uniformité des anciennes mesures; et d'ailleurs, lorsque le temps aura banni leur usage, ce rapprochement deviendra inutile. Si l'on a de la peine à se former une idée exacte des grandeurs des quantités exprimées en nouvelles mesures; il faut l'attribuer aux premières impressions que nous avons reçues dans notre enfance. On a reproché au nouveau système, l'incommodité des subdivisions décimales; par exemple, le tiers et le sixième d'un *pied* étaient exactement exprimés par les nombres entiers, 4 pouces et 2 pouces, tandis que les mêmes subdivisions du *mètre* sont exprimées par les fractions décimales périodiques $0^m,3333$ etc, et $0^m,1666$ etc. Cet inconvénient est réel, mais on ne saurait l'attribuer aux mesures nouvelles. Si l'on écarte tout préjugé, on verra que notre système de numération a exigé la subdivision décimale; pour changer ce système, il eût fallu changer une grande partie des mots de la langue, ce qui était sans doute impraticable.

Si l'on réfléchit sur ce qui précède, on reconnaîtra que toutes les opérations de l'Arithmétique se réduisent en dernière analyse, à l'*addition*, à la *soustraction*, à la *multiplication* et à la

division ; on soumet à ces opérations fondamentales les nombres de chaque espèce, que l'on peut diviser en sept grandes classes ; savoir : les *nombres entiers :* les *fractions ordinaires*, plus grandes et plus petites que l'unité : les *fractions de fractions :* les *nombres décimaux :* les *fractions décimales périodiques* : les *fractions décimales périodiques mixtes* : les *nombres complexes*, exprimant les anciennes mesures et les nouvelles. Toutes les opérations qu'on peut faire sur ces nombres ne dépendent que du calcul des nombres abstraits, que l'on peut en conséquence, considérer comme l'élément de tous les calculs. Il me resterait à faire connaître quelques propriétés curieuses des nombres ; mais ce volume est déjà trop étendu, quoique je me sois borné à donner les théories indispensables. J'ose espérer que ceux qui les connaîtront à fond, ne seront jamais arrêtés par les calculs numériques, relatifs aux hautes mathématiqnes.

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE.

TABLEAUX pour convertir les anciennes mesures en mesures nouvelles et réciproquement.

I	Mètres en pieds.	Mètres en pouces.	Mètres en lignes.	Mètres en toises.
	pi.	po.	li.	T.
1	3,078444000	36,941328000	443,295936000	0,513074000
2	6,156888000	73,882656000	886,591872000	1,026148000
3	9,235332000	110,823984000	1329,887808000	1,539222000
4	12,313776000	147,765312000	1673,183744000	2,052296000
5	15,392220000	184,706640000	2216,479680000	2,565370000
6	18,470664000	221,647968000	2659,775616000	3,078444000
7	21,549108000	258,589296000	3003,071552000	3,591518000
8	24,627552000	295,530624000	3346,367488000	4,104592000
9	27,705996000	332,471952000	3889,663424000	4,617666000

	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.	Toises en mètres.
	m.	m.	m.	m.
1	0,324839432*	0,027069954*	0,002255829	1,949036591
2	0,649678864*	0,054139907	0,004511659*	3,898073182
3	0,974518296*	0,081209861*	0,006767488	5,847109774*
4	1,299357727	0,108279814	0,009023318*	7,796146365*
5	1,624197159	0,135349768*	0,011279147	9,745182956
6	1,949036591	0,162420722*	0,013534977*	11,694219547
7	2,273876023	0,189489675	0,015790806	13,643256138
8	2,598715455*	0,216559629*	0,018046636*	15,592292730
9	2,923554887*	0,243629582	0,020302465	17,541329321*

II	Mètr. en aunes de Paris.	Aunes de Paris en mètres.	Fractions d'aunes de Paris en mètres.					
	a.	m.		m.		m.		m.
1	0,841435013*	1,188445912*	1/2	0,594223*	1/6	0,198074	5/16	0,371389
2	1,682870025	2,376891823	1/4	0,297112*	5/6	0,990372*	7/16	0,519945
3	2,524305038*	3,565337735*	1/8	0,148556*	1/12	0,099037	9/16	0,668501*
4	3,365740050	4,753783646	3/8	0,445667	5/12	0,495186*	11/16	0,817057*
5	4,207175063*	5,942229557	5/8	0,742779*	7/12	0,693260	13/16	0,965612
6	5,048610075	7,130675469	7/8	1,039890	9/12	0,891334	15/16	1,114168
7	5,890045088*	8,319121381*	3/4	0,891334	11/12	1,089409*	1/24	0,049519*
8	6,731480100	9,507567292	1/3	0,396149*	1/16	0,074278*	1/48	0,024759
9	7,572915113*	10,696013204*	2/3	0,792297	3/16	0,222834*	1/96	0,012380*

III	Lieues terrest. en kilomètres.	Lieues marines en kilomètres.	Kilomètres en lieues terrestres.	Kilomètres en lieues marines.
	kil.	kil.	li.	li.
1	4,444466100	5,555553390*	0,225021404*	0,180000070
2	8,888932200	11,111106780*	0,450042807	0,360000140
3	13,333398301	16,666660170*	0,675064211*	0,540000210
4	17,777864402*	22,222213560*	0,900085614	0,720000280
5	22,222330502	27,777766950*	1,125107018*	0,900000350
6	26,666796602	33,333320340*	1,350128421	1,080000420
7	31,111262703*	38,888873730*	1,575149825*	1,260000490
8	35,555728803	44,444427120*	1,800171229*	1,440000560
9	40,000194904*	49,999980510*	2,025192632	1,620000630

Nota. L'*étoile* indique que la dernière décimale est augmentée d'une unité de son ordre conformément à la règle du n° 195, page 213.

IV	Kilogrammes en livres.	Livres en kil. ou en gram.	Kilogrammes en marcs.	Marcs en kilog. ou en grammes.
	℔	kil. G.	m.	kil. G.
1	2,04287651 9	0,489.505847*	4,085753038	0,244.752923
2	4,085753038	0,979.011693	8,171506076	0,489.505847*
3	6,128629557	1,468.517540*	12,257259115*	0,734.258770*
4	8,171506076	1,958.023386	16,343012153*	0,979.011693
5	10,214382595	2,447.529233	20,428765191*	1,223.764617*
6	12,257259115*	2,937.035080*	24,514518229	1,468.517540*
7	14,300135634*	3,426.540926	28,600271267	1,713.270463
8	16,343012153*	3,916.046773*	32,686024305	1,958.023386
9	18,385888672*	4,405.552619	36,771777344*	2,202.776310*

	Kilogrammes en onces.	Onces en kil. ou en gram.	Kilogrammes en gros.	Gros en kilog. ou en gram.
	o.	kil. G.	G.	kil. G.
1	32,686024305	0,030.594115	261,488194444*	0,003.824264
2	65,372048611*	0,061.188231*	522,976388887	0,007.648529*
3	98,058072916	0,091.782346	784,464583331*	0,011.472793
4	130,744097222*	0,122.376462*	1045,952777774	0,015.297058*
5	163,430121527	0,152.970577	1307,440972218*	0,019.121322
6	196,116145833*	0,183.564692	1568,929166661	0,022.945587*
7	228,802170138	0,214.158808*	1830,417361105*	0,026.769851*
8	261,488194444*	0,244.752923	2091,905555548	0,030.594115
9	294,174218749*	0,275.347039*	2353,393749992*	0,034.418380*

	Kilogrammes en deniers.	Deniers en kil. ou en gram.	Kilogrammes en grains.	Grains en kilog. ou en gram.
	d.	kil. G.	G.	kil. G.
1	784,464583331*	0,001.274755*	18827,149999933	0,000.053115*
2	1568,929166661	0,002.549510*	37654,299999866	0,000.106230*
3	2353,393749992*	0,003.824264	56481,449999800*	0,000.159344
4	3137,858333322	0,005.099019	75308,599999733*	0,000.212459
5	3922,322916653*	0,006.373774	94135,749999666	0,000.265574*
6	4706,787499983	0,007.648529*	112962,899999599	0,000.318689*
7	5491,252083314*	0,008.923284	131790,049999533*	0,000.371803
8	6275,716666644	0,010.198038	150617,199999466*	0,000.424918
9	7060,181240075	0,011.472793	169444,349999399	0,000.478033

V	Francs en liv. tourn.	Livres tourn. en francs.	Decimes en livres.	Centimes en livres.	Sous en francs.
	#	f.	#	#	f.
1	1,012500346	0,987650945*	0,101250035*	0,010125003	0,049382547
2	2,025000692	1,975301890*	0,202500069	0,020250007*	0,098765094
3	3,037511038	2,962952834*	0,303750103	0,030375010	0,148147642
4	4,050001384	3,950603780*	0,405000138	0,040500014*	0,197530189
5	5,062511730	4,938254725*	0,506250173	0,050625017	0,246912736
6	6,075022076	5,925905669	0,607500208*	0,060750021*	0,296295283
7	7,087512422	6,913556614	0,708750242	0,070875024	0,345677830
8	8,100002768	7,901207559	0,810000277*	0,081000028*	0,395060378
9	9,112513074	8,888858504	0,911250311	0,001125031	0,444442925*

Deniers en francs					
1	0f,004115212	4	0f,016460849*	7	0f,028806485
2	0 ,008230424	5	0 ,020576061	8	0 ,032921698*
3	0 ,012345637*	6	0 ,024691273	9	0 ,037036910*

NOTA. Dans les conversions de la livre-poids en kilogram. les 3 premières décimales suivies d'un *point* représentent des grammes.

TABLEAUX relatifs, au supplément, pour convertir les nouvelles mesures en anciennes et réciproquement.

VI	Mètres quarrés en pieds quarrés.	Pieds quarrés en mèt. quar.	Mètres quarrés en pouces quarrés.	Pouces quarrés en mètres quar.
	pi. q.	m. q.	po. q.	m.q.
1	9,476817461	0,105520657*	1364,661714404*	0,000732781
2	18,953634922	0,211041313	2729,323428807	0,001465562
3	28,430452383	0,316561970*	4093,985143211*	0,002198343
4	37,907269845*	0,422082626	5458,646857614	0,003921124
5	47,384087306*	0,527603283*	6823,308572018*	0,003663905
6	56,860904767*	0,633123939	8187,970286422*	0,004396687*
7	66,337722228*	0,738644596	9552,632000825	0,005129468*
8	75,814539689	0,844165253*	10917,293715229*	0,005862249*
9	85,291357150	0,949685909	12281,955429632	0,006595030*
	Mètres quarrés en lignes quarrées.	**Lig. quarrées en mèt. quar.**	**Mètres quarrés en toises quarrées.**	**Toises quarrées en mèt. quar.**
	li. q.	m. q.	t. q.	m. q.
1	196511,2868-5116	0,000005100*	0,263244929	3,798743633
2	393022,57375o232	0,000010200*	0,526489859*	7,597487266
3	589533,860625348	0,000015300*	0,789734788	11,396230899
4	786045,147500464	0,000020400*	1,052979718*	15,194974532
5	982556,434375580	0,000025500*	1,316224647	18,993718165
6	1179067,721250697*	0,000030600*	1,579469958*	22,792461798
7	1375579,008125813*	0,000035700*	1,842714506	26,591205431
8	1572090,295000929*	0,000040799	2,105959436*	30,389949064
9	1768601,581876045*	0,000045899*	2,369204365	34,188692698*
VII	**Hectares en arpents des Eaux-et-Forêts.**	**Arp. des Ea.-et-F. en hect.**	**Hectares en arp. de Paris.**	**Arp. de Paris en hectares.**
	arp.	hect.	arp.	hect.
1	1,958020261	0,510719945	2,924943658	0,341886927
2	3,916040522	1,021439891*	5,849887317*	0,683773855*
3	5,874060783	1,532159836	8,774830975	1,025660782*
4	7,832081044	2,042879782*	11,699774634*	1,367547709
5	9,790101305	2,553599727	14,624718292	1,709434637*
6	11,748121566	3,064319673*	17,549661951*	2,051321564*
7	13,706141827	3,575039618	20,474605609	2,393208491
8	15,664162088	4,085759564*	23,399549268*	2,735095419*
9	17,622182350	4,596479509*	26,324492926	3,076982346*
VIII	**Mètres cubes en pieds cubes.**	**Pieds cubes en mèt. cubes**	**Mètres cubes en toises cubes.**	**Toises cubes en mètr. cubes.**
	pi. c.	m. c.	t. c.	m. c.
1	29,173851852*	0,034277270	0,135064129*	7,403890341*
2	58,347703704*	0,068554541*	0,270128257	14,807780681
3	87,521555556*	0,102831811*	0,405192386	22,211671022*
4	116,695407408*	0,137109081	0,540256515*	29,615561362
5	145,869259260*	0,171386351	0,675320644*	37,019451703*
6	175,043111111	0,205663622*	0,810384772	44,423342043
7	204,216962963	0,239940892*	0,945448901*	51,827232384*
8	233,390814815	0,274218162	1,080513030*	59,231122724
9	262,564666667	0,308495433*	1,215577158	66,635013065*

XI	Stères en cordes de bois (Eaux-et-Forêts.)	Cordes de bois (Eaux-et-Forets) en stères.	Mètres cubes en solives (charpente).	Solives (charpente) en mètres cubes.
	cord.	ster.	sol.	m.
1	0,260480818	3,839054272*	9,724617725	0,102831811*
2	0,520961636	7,678108544*	19,449235451*	0,205663622*
3	0,781442455*	11,517162815	29,173853176*	0,308495433*
4	1,041923273*	15,356217087	38,898470901	0,411327243
5	1,302404091*	19,195271359	48,623088626	0,514159054
6	1,562884909	23,034325631*	58,347706352*	0,616990865
7	1,823365727	26,873379903*	68,072324077*	0,719822676*
8	2,083846546*	30,712434175*	77,796941802	0,822654487*
9	2,344327364*	34,551488446	87,521559527	0,925486298*
X	Litres en pintes de Paris.	Pintes de Paris en litres.	Hectolitres en muids de vin de Paris.	Muids de vin de Paris en hect. et en litres.
	pin.	li.	muid.	hect.lit.
1	1,073748825	0,931316502	0,372829453	2,68.2191527*
2	2,147497650	1,862633005*	0,745658906	5,36.4383054*
3	3,221246476*	2,793949507	1,118488360*	8,04.6574581*
4	4,294995301	3,725266010*	1,491317813*	10,72.8766108*
5	5,368744126	4,656582512	1,864147266*	13,41.0957635*
6	6,442492952*	5,587899014	2,236976719	16,09.3149162*
7	7,516241777	6,519215517*	2,609806172	18,77.5340689*
8	8,589990602	7,450532019	1,982635626*	21,45.7532216*
9	9,663739428*	8,381848522*	3,355465079*	24,13.9723743*
XI	Hectolitres en muid de bled de Paris.	Muid de bled de Paris. en hectolitres.	Hectolitres en setiers de Paris.	Setiers de Paris en hectolitres.
	m.	hect. lit.	set.	hect. lit.
1	0,053384802	18,73.1922892*	0,640624034*	1,56.0993574
2	0,106769605*	37,46.3845784*	1,281248067	3,12.1987149*
3	0,160154407*	56,19.5768676*	1,921872101	4,68.2980723*
4	0,213539209	74,92 7691567	2,562496135*	6,24.3974297
5	0,266924011	93,65 9614459	3,203120169*	7,80.4967872*
6	0,320308814*	112,39.1537351	3,843744202	9,36.5961446*
7	0,373693616	131,12.3460243*	4,484368236	10,92.6955502
8	0,427078418	149,85.5383135*	5,124992270*	12,48.7948595*
9	0,480463221*	168,58.7306027*	5,765616303	14,04.8942169*
	Litres en boisseaux de Paris.	Boisseaux de Paris en litres.	Litres en litrons.	Litrons en litres.
	boiss.	lit.	lit.	lit.
1	0,076874115	13,008279786	1,229985845*	0,813017487*
2	0,153748231*	26,016559572	2,459971690*	1,626034973
3	0,230622346*	39,024839358	3,689957535*	2,439052460*
4	0,307496461	52,033119144	4,919943380*	3,252069947*
5	0,384370576	65,041398930	6,149929225*	4,065087433
6	0,461244692*	78,049678716	7,379915070*	4,878104920*
7	0,538118807	91,057958502	8,609900915*	5,691122406
8	0,614992922	104,066238288	9,839886760*	6,504139893
9	0,691867038*	117,074518074	11,069872604	7,317157380*

Nota. Les instrumens de mesurage pour les graines sèches sont de forme cylindrique, leur profondeur est égale à leur diamètre.

XII. *TABLEAU comparatif des nouvelles mesures avec les anciennes.*

Noms et synonimes des nouvelles mesures.	Valeurs en anciennes mesures.
Myriamètre ou lieue....	2 lieues terrestres, 25 ou 2 lieues $\frac{1}{4}$
Kilomètre ou mille.....	0 li., 225 ou 513 toises 074
Décamètre ou perche...	5 toises, 1307[illegible]000 ou 30 pi. 9 po. 5 lig.
Mètre..................	3 pi., 07844000 3 0 11 $\frac{296}{100}$
Décimètre ou palme....	3 po., 694132800 0 3 8 $\frac{33}{100}$
Centimètre ou doigt....	4 li., 432959360 0 0 4 $\frac{43}{100}$
Millimètre ou trait......	0 li., 44295936 0 0 0 $\frac{44}{100}$
Hectare ou arpent......	2632 tois. q., 44929476 ou 1 arp. 958020261
Are ou perche quarrée...	947 pi. q., 681746114 0 195802026
Centiare ou mètre quarré.	1364 po. q., 661714404 0 019580202
Décalitre ou velte.......	1 velte, 341095763 ou 1 velte $\frac{1}{3}$ environ
Litre ou pinte.........	1 pint., 07374825 1 pint. $\frac{1}{14}$
Décilitre ou verre.......	0 pint., 107374883 0 $\frac{1}{9}$
Kilolitre ou muid de bled.	0 muid, 53348023 ou 6 set. 4 bois. 14 litrons.
Hectolitre ou setier.....	0 setier, 64062034 7 11
Décalitre ou boisseau...	0 boiss., 76874153 12 $\frac{1}{10}$
Litre ou litron..........	1 lit., 22998584[illegible]5 ou 1 litron $\frac{1}{4}$ environ
Mètre cube ou stère....	0 tois. cub., 135064128 ou 0 corde de b. 2605
Décistère ou solive......	2 pi. cub., 917385185 0 sol. 97246
Kilogramme ou livre....	2℔, 0428765 19 ou 2℔ 0 onces 5 gr. 35 gr. $\frac{15}{100}$
Hectogramme ou once...	3 onces, 268602430 3 2 10 $\frac{7}{10}$
Décagramme ou gros....	2 gros, 61488 1944 2 44 $\frac{27}{100}$
Gramme ou denier.....	0 den., 78446 4583 18 $\frac{83}{100}$
Décigramme ou grain ..	1 grain, 882715 1 $\frac{88}{100}$

Nota. *Observations.* La distance du pôle à l'équateur est de 5130740 toises.

Le degré moyen est de 57008 toises. L'aplatissement de la terre est $\frac{1}{334}$ de son grand axe.

La longueur du pendule à seconde à Paris, est de 3 pieds 0 pouce 8 lignes $\frac{129}{100}$.

Le mètre, unité fondamentale, est la dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur terrestre.

L'aune de Paris est de 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$; elle se divise en demi, tiers, quart, sixième, huitième, douzième et seizième.

Le double décamètre (chaîne d'arpenteur) vaut 10 toises 1 pied 6 pouces 10 lignes. Le décamètre vaut 5 toises 9 pouces 5 lignes. On peut aisément trouver en toises pieds etc, la valeur du demi-décamètre, du double mètre, du demi-mètre etc.

La pinte de Paris vaut 46 pouces cubes $\frac{95}{100}$, et le boisseau 655 pouces cubes $\frac{78}{100}$; c'est d'après ces valeurs qu'on a déterminé celles des mesures de capacité.

On appelle stère, un mètre cube de bois de chauffage.

La corde de bois (Eaux-et-Forêts) de 8 pieds de couche, 4 pieds de haut, le bois ayant 3 pi. 6 pouces, vaut deux voies de bois.

XIII. *TABLEAU comparatif des anciennes mesures avec les nouvelles.*

Noms des anciennes mesures avec leurs subdivisions.	Valeurs en mesures nouvelles.
Lieue terrest. de 25 au degré (2280 t. 2 pi.)	4 kilom., 444466100
Lieue marine de 20 au degré (2850 t. 2 pi. 6 p.).	5, 555553390
Lieue moyenne (2565 toises 2 pieds).	4, 997979498
Lieue de poste (2000 toises).	3, 898073182
Perche (Ea.-et-For.) 22 pieds de long.	7 mètr., 146346750
Perche (de Paris) 18 pieds, ou 3 toises.	5, 847109774
Toise 6 pieds,	1, 949036591
Pied 12 pouces.	0, 324839432
Pouce 12 lignes.	0, 027069954
Ligne 12 points.	0, 002255829
Aune de Paris.	1, 188445912
Arpens (Ea.-et-For.) 100 perches quarrées.	0 hectare, 510719945
Arp. (Paris) 100 perch. quar.	0, 341886927
Perche qu. (Ea.-et-For.) 484 pi. qu.	0 are, 510719945
Perche qu. (Paris) 324 pieds quar.	0, 341886927
Toise quarrée, 36 pieds quar.	3 m. q., 798743633
Pied quarré 144 pouces quarrés.	0, 105520657
Pouce quarré 144 lignes qu.	0, 000732781
Ligne quarrée 144 points qu.	0, 000005100
Muid de vin (Paris) 288 pintes ou 36 veltes.	268 litres, 219152696
Velte 8 pintes.	7, 450532019
Pinte 2 chopines.	0, 931316502
Muid de bled (Paris) 12 setiers.	18 hectolit., 731922891
Setier 12 boisseaux.	1, 560993574
Boisseaux 16 litrons.	13 litres, 008279786
Litron.	0, 813017487
Toise cube, 216 pi. cub.	7 m. c., 403890341
Pied cube, 1728 pouces cub.	0, 034277270
Pouce cube, 1728 lig. cub.	0, 000019836
Ligne cube.	0, 000000011
Corde de bois (Ea.-et-For.) 112 pi. cub.	3 ster., 839054272
Solive (charpente) 3 pieds cubes.	0, 102831811
Livre, 16 onces.	0 kilog., 489505847
Once, 8 gros.	0, 030594115
Gros, 3 deniers.	0, 003824264
Denier, 24 grains.	0, 001274755
Grain.	0, 000053115

Suite des observations.

Le kilogramme est le poids d'un décimètre cube d'eau distillée pesé dans le vide à 10 degrés du thermomètre. Le pied cube d'eau distillée, pesé à la même température, a été trouvé de 69 livres 14 onces 1 gros 54 grains, suivant les expériences faites en 1799 pour les nouvelles mesures.

Le millier vaut 10 quintaux, ou 1000 kilogrammes; c'est le poids du tonneau de mer.

Le quintal vaut 100 kilogrammes.

Le franc vaut 1 liv. 0 sous 3 deniers.

XIV. *TABLEAU contenant différens rapports, très-approchés des anciennes mesures avec les nouvelles.*

N.	Mesures nouvelles.	N.	Mesures anciennes.	Noms anc.
4	Pieds valent	13	Décimètres	Palmes
7	Pouces	19	Centimètres	Doigts
4	Lignes	9	Millimètres	Traits
39	Toises	76	Mètres	. . . . .
69	Aunes de Paris	82	Mètres	. . . . .
9	Lieues terrestres	4	Myriamètres	lieues
18	Lieues marines	10	Myriamètres	lieues
47	Arpents (Eaux-et-For.)	24	Hectares	Arpens
47	Perches quarrées	24	Ares	Perc. qu.
117	Arpents de Paris	40	Hectares	Arpens
117	Perches quarr. de Paris	40	Ares	Perc. qu.
5	Toises quarrées	19	Mètres quarrés	. . . . .
51	Veltes	38	Décalitres	Veltes
29	Pintes	27	Litres	Pintes
63	Muids de bled	118	Hectolitres	Muids
41	Setiers	64	Hectolitres	Setiers
16	Litrons	13	Litres	Litrons
5	Toises cubes	37	Mètres cubes	. . . . .
25	Cordes de bois	96	Stères	. . . . .
35	Solives (charpente)	36	Décistères	Solives
143	Livres poids	70	Kilogrammes	Livres
188	Marcs	46	Kilogrammes	Marcs
36	Onces	11	Hectogrammes	Onces
34	Gros	13	Décagrammes	Gros
11	Deniers	14	Grammes	Deniers
15	Grains	8	Décigrammes	Grains
81	Livres tournois	80	Francs	. . . . .
405	Livres tournois	400	Francs	. . . . .

XV. *TABLEAU. Valeur de 20ſ, depuis Charlemagne jusqu'à nos jours, donnée en livres tournois au titre ordonné par Louis XV.*

768	Charlemagne	66#	8ſ	« d	1461	Louis XI	4#	19ſ	7 d
822	L. le Débonnaire	49	16	8	1483	Charles VIII	4	10	7
1113	Louis VII	18	13	6	1497	Louis XII	3	19	8
1156	Philippe Auguste	19	10	10 4/5	1514	François Premier	3	11	2
1222	Saint Louis	18	4	11 3/5	1546	Henri II	3	6	5
1226	Philippe le Bel	17	19	«	1559	Charles IX	2	18	7
1285	Louis Hutin	18	8	10	1574	Henri III	2	12	1
1313	Charles le Bel	17	13	7	1589	Henri IV	2	8	«
1321	Philippe de Valois	14	11	10	1611	Louis XIII	1	15	3
1344	Jean	9	5	5	1642	Louis XIV	1	4	11
1364	Charles V	9	9	8	1715 1726	Louis XV	1	«	«
1380	Charles VI	7	2	3					
1422	Charles VII	5	13	9	1774	Louis XVI	1	«	«

